ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

Separation of Flow

by Paul K. Chang

Professor of Mechanical Engineering

The Catholic University of America

Washington, D.C., U.S.A.

Pergamon Press. 1970

Oxford . London . Edinburgh . New York .

Toronto . Sydney .

Paris . Braunschweig

Таблица 4

ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ f_1, f_2, f_3, f_4 и f_5 [44]

η	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	1	1	1	1	1
0,005	0,9053	0,8650	0,8332	0,8064	0,7828
0,01	0,8577	0,8009	0,7572	0,7211	0,6901
0,02	0,7895	0,7126	0,6559	0,6102	0,5718
0,03	0,7380	0,6489	0,5846	0,5340	0,4923
0,04	0,6957	0,5981	0,5291	0,4758	0,4327
0,05	0,6594	0,5556	0,4838	0,4291	0,3854
0,06	0,6276	0,5193	0,4455	0,3903	0,3467
0,07	0,5991	0,4875	0,4127	0,3574	0,3142
0,08	0,5734	0,4593	0,3839	0,3289	0,2864
0,09	0,5498	0,4340	0,3585	0,3041	0,2624
0,10	0,5282	0,4111	0,3359	0,2821	0,2414
0,15	0,4405	0,3224	0,2508	0,2020	0,1665
0,20	0,3753	0,2609	0,1947	0,1513	0,1209
0,25	0,3243	0,2154	0,1550	0,1168	0,0907
0,30	0,2831	0,1804	0,1256	0,0920	0,0697
0,35	0,2490	0,1528	0,1032	0,0737	0,0545
0,40	0,2204	0,1306	0,0858	0,0597	0,0433
0,45	0,1961	0,1124	0,0719	0,0490	0,0348
0,50	0,1752	0,0974	0,0608	0,0405	0,0282
0,55	0,1571	0,0848	0,0517	0,0337	0,0231
0,60	0,1413	0,0742	0,0442	0,0283	0,0190
0,65	0,1274	0,0651	0,0380	0,0239	0,0158
0,70	0,1152	0,0574	0,0328	0,0202	0,0132
0,75	0,1044	0,0507	0,0284	0,0172	0,0110
0,80	0,0948	0,0450	0,0247	0,0147	0,0093
0,85	0,0862	0,0400	0,0215	0,0126	0,0079
0,90	0,0786	0,0356	0,0188	0,0109	0,0067
0,95	0,0717	0,0317	0,0165	0,0094	0,0057
1,00	0,0655	0,0285	0,0145	0,0082	0,0049
1,1	0,0549	0,0229	0,0113	0,0062	0,0036
1,2	0,0462	0,0186	0,0089	0,0047	0,0027
1,3	0,0390	0,0151	0,0070	0,0036	0,0020
1,4	0,0331	0,0124	0,0056	0,0028	0,0015
1,5	0,0282	0,0102	0,0045	0,0022	0,0012
1,6	0,0240	0,0084	0,0036	0,0017	0,0009
1,7	0,0205	0,0070	0,0029	0,0014	0,0007
1,8	0,0176	0,0058	0,0024	0,0011	0,0005

УДК 532.51:532.526:533.601.1

В монографии Чжена впервые в мировой литературе обобщен и систематизирован материал по одному из наиболее актуальных и интересных направлений механики жидкости и газа — отрывным течениям, возникающим при обтекании тел вязкой жидкостью или газом во всем диапазоне скоростей, от дозвукового до гиперзвукового, при течениях в каналах, в газовых машинах, турбинах и т. п. Отражая современное состояние в этой бурно развивающейся области гидро- и аэродинамики, книга наряду с достаточно глубоким теоретическим анализом содержит богатые экспериментальные материалы, весьма полезные для практических приложений.

Монография адресована научным работникам и инженерам, специализирующимся в области гидро- и аэродинамики и теплопередачи в приложениях к самолетам, ракетам и космическим летательным аппаратам, газовым машинам и двигателям, скоростным надводным и подводным кораблям, гидротурбинам, компрессорам и т. п. Она может служить также учебным пособием и справочником для студентов и аспирантов университетов и втузов.

Редакция литературы по новой технике

© Перевод на русский язык, «Мир», 1973

Ч $\frac{0243\text{-}342}{041(01)\text{-}73}$

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A — площадь омываемой поверхности, площадь поперечного сечения тела;
a — скорость звука;
C_L — коэффициент подъемной силы;
C_D — коэффициент сопротивления;
c_f — коэффициент поверхностного трения;
C_p — коэффициент давления;
c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении;
D — сопротивление;
d — диаметр;
$H = \delta^*/\theta$ — формпараметр пограничного слоя;
h — коэффициент теплоотдачи; высота;
Le — число Льюиса;
M — число Маха;
Nu — число Нуссельта;
n — показатель степени;
Pr — число Прандтля;
p — давление;
q — скоростной напор;
Re — число Рейнольдса;
T — температура;
t — время;
u — составляющая вектора скорости в направлении течения;
v — составляющая вектора скорости в направлении y;
w — составляющая вектора скорости в направлении z;
x — координата в направлении течения;
y — координата в направлении, перпендикулярном направлению x;
z — координата в направлении, перпендикулярном направлению x и y;
α — угол атаки;
γ — отношение удельных теплоемкостей;
δ — толщина пограничного слоя или свободного вязкого слоя;
δ^* — толщина вытеснения пограничного слоя;

ε — коэффициент турбулентной вязкости;
θ — толщина потери импульса пограничного слоя;
μ — коэффициент динамической вязкости;
ν — коэффициент кинематической вязкости;
ρ — плотность жидкости или газа;
τ — напряжение трения;
ψ — функция тока.

Индексы

e — условия на внешней границе пограничного слоя;
S — отрыв;
w — значение на стенке;
∞ — условия в невозмущенном потоке.

Глава X

ДОННОЕ ДАВЛЕНИЕ

Обозначения

a — скорость звука;
b — ширина;
$c = u/u_{\text{макс}}$; хорда профиля;
$F = (f/\varkappa^2) - 1$;
f — параметр;
h — высота уступа или донного среза, толщина задней кромки;
k — коэффициент смешения;
I — поток количества движения;
L — расстояние перпендикулярно плоскости чертежа; характерная длина;
l — расстояние между вихрями в каждом ряду; длина области отрыва; расстояние между задней кромкой и началом области замыкания, измеренное вдоль оси x; длина свободного слоя смешения; $l = \bar{x}_{b'} - \bar{x}_{\text{перех}}$;
$\bar{m}$ — поток массы;
N — параметр присоединения;
n — частота срыва вихрей;
q — скоростной напор; плотность потока массы;
$r = M_{e_1}^2/M_{e_2}^2$;
S — число Струхаля;
t — толщина;
$u^* = u/u_e$;
$u_m = I/\bar{m}$;
v — составляющая скорости, перпендикулярная u;
$W_e = u_e/a_S$;
X — локальная координата;
x — координата, направленная по потоку;
$\bar{x} = x/\delta_S$, или расстояние от начала асимптотического слоя смешения;
Y — локальная координата;
$z = 1 - u_1^*$;
Γ — интенсивность вихря;
δ_b — толщина пограничного слоя у задней кромки;
δ_b' — толщина слоя смешения после изэнтропического расширения;

δ^{**} — толщина потери кинетической энергии;
ε — коэффициент турбулентной вязкости; поправочный параметр;
$\zeta = y/\delta_2$ или $\zeta = \sigma_y/\overline{x}$;
η_p — параметр положения;
Θ — местный угол между внешним потоком и осью x;
θ — толщина потери импульса пограничного слоя;
$\varkappa = u_m/u_e$;
λ — отношение плотностей;
ν — коэффициент кинематической вязкости; угол разворота течения Прандтля — Майера;
σ — масштабный множитель; параметр подобия $\sigma = c_f/2k\,(1-\varkappa)$; параметр, характеризующий утолщение слоя смешения.

Индексы

B — донный срез;
b — задняя кромка;
b' — за изэнтропическим расширением;
i — несжимаемый;
j — струя;
l — ламинарный;
M — средняя линия тока;
R — точка замыкания;
s — торможение;
t — турбулентный;
1 — непосредственно перед донным срезом или начало взаимодействия;
2 — конец взаимодействия;
крит — критический;
перех — переход.

Благодаря успехам аэрокосмической техники расширились интервалы полетных чисел Маха и Рейнольдса. Следовательно, расширилась и область исследований донного давления. В этой главе сначала рассматривается донное давление в несжимаемом потоке, а затем в сжимаемом.

Донное сопротивление тела вращения может достигать 30% полного сопротивления, а донное сопротивление тонких обтекаемых тел велико по сравнению с их малым сопротивлением трения. У ракет донное сопротивление приближается к 500 или 1000 кгс, в то время как полное сопротивление достигает нескольких тысяч кгс. Следовательно, оценки характеристик, траекторий и требуемых тяг ракет невозможны, пока неизвестно донное давление. Сказанное справедливо также и для тел, движущихся с высокими скоростями, таких, как пули, артиллерийские снаряды и т. д.

1. ДОННОЕ ДАВЛЕНИЕ ПРИ ДОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Прежде всего рассмотрим классическую проблему донного давления за пластиной при дозвуковых скоростях. Ее решение еще нельзя считать удовлетворительным.

1.1. РАСЧЕТ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ ЗА ПЛОХО ОБТЕКАЕМЫМ ТЕЛОМ ПРИ ДОЗВУКОВЫХ И ТРАНСЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Теория донного давления при дозвуковых скоростях разрабатывалась Кирхгофом [1] и Карманом [2]. Теория Кирхгофа уже упоминалась в гл. VIII. По теории Кирхгофа получается сильно заниженное сопротивление, поскольку давление в следе и на донном срезе цилиндра принимается равным давлению в невозмущенном потоке, хотя истинное значение донного давления значительно ниже. Карман [2] пытался решить проблему донного давления для случая периодически срывающихся вихрей при исследовании вихревой дорожки, но его теория неполна, поскольку не позволяет установить зависимость размеров и скоростей вихревой дорожки от размеров цилиндра и скорости набегающего потока. Требуются две дополнительные зависимости, обычно определяемые из эксперимента [3].

1.1.1. Донное давление за пластиной

Чтобы рассчитать донное давление или донное сопротивление плоской пластины, установленной перпендикулярно потоку, движущемуся со скоростью u_∞, Гейзенберг [4] определил скорость вихрей u относительно набегающего потока и расстояние между вихрями l в каждом ряду.

Приравняем циркуляцию, создаваемую в единицу времени на краях плоской пластины $u_\infty (u_\infty/2)$, циркуляции, переносимой вихрями

$(\Gamma/l)\ (u_\infty - u)$,

$$u_\infty (u_\infty/2) = (\Gamma/l)\ (u_\infty - u),$$

где Γ — интенсивность вихря.

Другое уравнение получается приравниванием потока массы, отбрасываемого движущейся пластиной $u_x d$, потоку массы в вихревой дорожке $\Gamma b/l$ (где b — ширина вихревой дорожки), который определяется с помощью комплексного потенциала для вихревой дорожки Кармана

$$u_\infty d = \Gamma b/l.$$

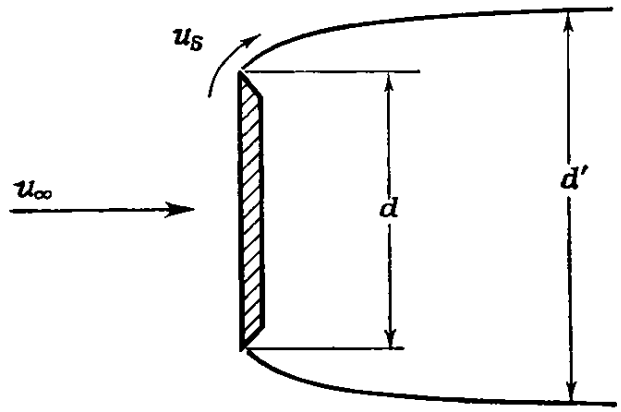
С помощью этих двух уравнений и результатов теории Кармана Гейзенберг [4] получил следующие результаты:

$$u/u_\infty = 0{,}229 \text{ и } l/b = 5{,}45.$$

Используя эти две величины, вычислим коэффициент сопротивления плоской пластины, установленной перпендикулярно к набегающему потоку,

$$C_D = D/(L\, bu_\infty^2 \rho) = 0{,}90,$$

где D — сопротивление, L — длина в направлении нормали к плоскости чертежа. Это расчетное значение хорошо согласуется с экспериментальными данными, однако, ссылаясь на подстрочное примечание Кармана, Рошко [3] отмечает, что решение Гейзенберга [4] дает одинаковые значения сопротивления для цилиндрических тел различных форм. Поскольку теория Кирхгофа [1] нуждается в дальнейшем усовершенствовании для более точного расчета донного давления, Рошко [3, 5] модифицировал ее, приняв $u_S = u_\infty k$, где u_S — скорость на линии тока при отрыве, k — параметр, определяемый из соотношения $C_{p_S} = 1 - k^2$, а C_{p_S} — коэффициент донного давления. Если $k = 1$, то C_{p_S} соответствует случаю, рассмотренному Кирхгофом; эксперименту соответствует $k > 1$. Принимая $k \neq 1$, избежим ограничения теории Кирхгофа (скорость отрыва равна скорости набегающего потока). В качестве следующего шага Рошко определил полуэмпирический параметр, который связывает результаты для плохо обтекаемых тел различной формы. С помощью анализа размерностей и путем введения определения для числа Струхаля следа



Фиг. 1. Плоская пластина, расположенная перпендикулярно к невозмущенному потоку.

$$S^* = S\frac{u_\infty}{u_S}\frac{d'}{d} = \frac{S}{k}\frac{d'}{d}$$

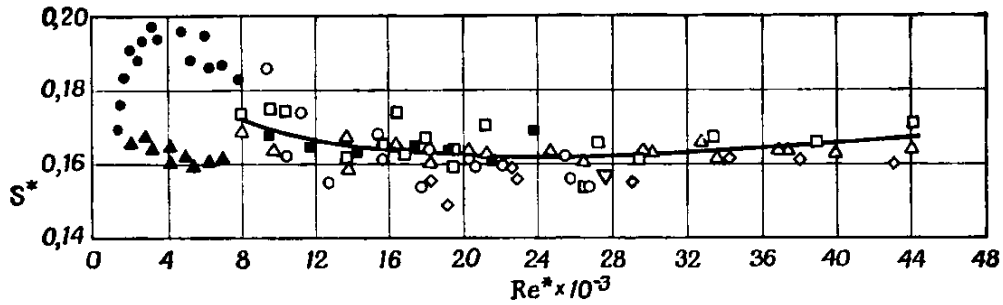
он получил одинаковую величину S^* для всех плохо обтекаемых тел. Например, $S^* \approx 0{,}16$ для всех цилиндров [5], причем $S = nd/u_\infty$ — число Струхаля, n — частота срыва вихрей и d' — расстояние между линиями тока, ограничивающими след (фиг. 1). Как показано на фиг. 2, экспериментальные значения S^* для разных плохо обтекаемых тел являются функциями числа Рейнольдса в следе, определяемого в виде,

$$\mathrm{Re}^* = u_S d'/\nu = \mathrm{Re}\, k\, (d'/d),$$

где

$$\mathrm{Re} = u_\infty d/\nu.$$

Для донного давления в дозвуковом потоке характерно следующее: скорость в точке отрыва и на начальном участке линии тока набегающего потока равна $u_S = ku_\infty$ и, если донное давление равно давлению в точке отрыва, коэффициент донного давления будет равен $C_{p_S} = 1 - k^2$. Если k известен, то потенциальное течение вне следа определено и коэффициент сопротивления является



Фиг. 2. Число Струхаля в следе S* в зависимости от числа Рейнольдса в следе Re* [5].

□ ■ плоская пластина; △ ▲ клин 90°; ○ ● круговой цилиндр; ◇ плоская пластина с интерференцией; ▽ круговой цилиндр с интерференцией.

функцией только k. Так как d' зависит от k, то, если k известен, d' можно рассчитать. Уравнение Гейзенберга [4] можно преобразовать к виду

$$\varepsilon k^2 \frac{u_\infty^2}{2} = \frac{\Gamma}{l}(u_\infty - u),$$

где ε — доля завихренности вязкого слоя, превращающаяся в изолированные вихри. Величина ε определяется экспериментально. Однако известно, что значение k одно и то же для всех цилиндров, имеющих одинаковую величину ε.

Теорию потенциального обтекания можно объединить с теорией вихревой дорожки Кармана, чтобы получить решение, зависящее только от одной экспериментально измеренной величины [3, 5].

Как видно из представленного анализа, теории донного давления являются ограниченными и неполными, и исследования донного давления проводятся главным образом экспериментально.

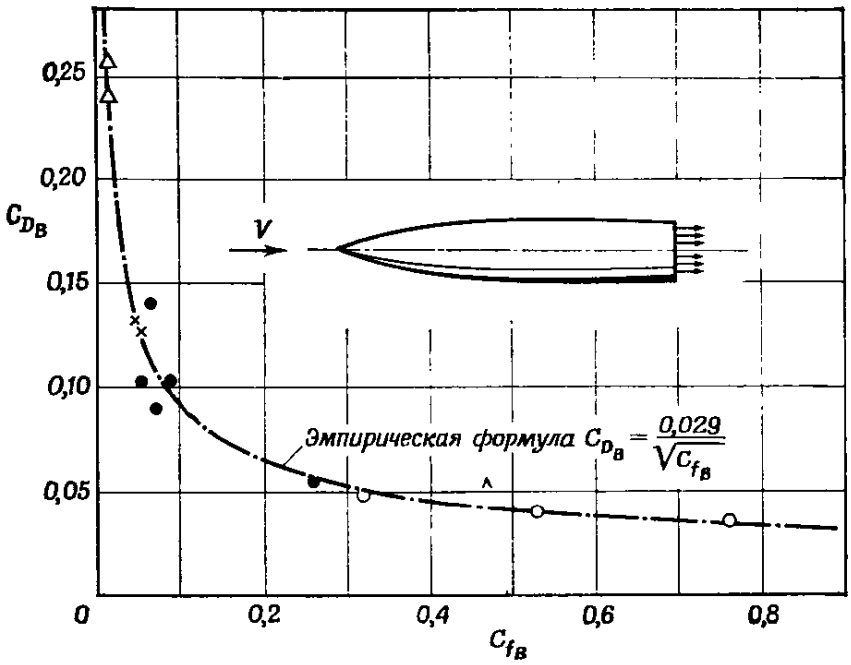
1.2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ ДОЗВУКОВЫХ И ТРАНСЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Результаты измерений донного давления за круговым цилиндром и сферой представлены в гл. I. Для кругового цилиндра коэффициент донного давления отрицателен при сверхкритических и докритических числах Рейнольдса; однако при сверхкритических числах Рейнольдса абсолютная величина коэффициента донного

давления больше, чем при докритических. При сверхкритических числах Рейнольдса коэффициент донного давления сферы положителен лишь вблизи задней критической точки и отрицателен при всех докритических числах Рейнольдса.

1.2.1. Исследования Хорнера [6, 7] *донного давления за телами различной формы*

Донное давление за телами различной формы (снарядами, фюзеляжами с плоским донным срезом, крыловыми профилями с толстой задней кромкой или плоским срезом и т. д.) при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях в значительной степени зависит от



Фиг. 3. Сопротивление, создаваемое донным срезом осесимметричного тела, в зависимости от поверхностного трения [6].

● фюзеляж с плоским донным срезом, $Re = 5 \cdot 10^6$, данные AVA (Аэродинамическая исследовательская лаборатория, Гёттингенский аэродинамический институт, ФРГ); ○ фюзеляж с плоским донным срезом, $Re = 2 \cdot 10^7$, данные DVL (Научно-исследовательский институт в области аэронавтики и космонавтики, ФРГ); △ цилиндр с конической носовой частью, $M = 1,56$; × снаряды фирмы «Гвидония», $M = 2$; коэффициент C_{D_B} отнесен к площади донного среза; c_{f_B} — коэффициент трения.

длины носовой части, отношения диаметра донного среза к диаметру тела, состояния поверхности тел. Кроме того, оно пропорционально скоростному напору внешнего потока.

Хорнер предполагает, что течение в окрестности донного среза и за ним подобно «струйному насосу». Внешний струйный поток, подобный трубке тока, окружающей донную область за сферой, смешивается с воздухом в зоне отрыва и отсасывает его. Для

снарядов и фюзеляжей донное давление может быть рассчитано по формуле

$$C_{D_B} = 0{,}029/\sqrt{c_{f_B}},$$

где C_{D_B} — коэффициент донного сопротивления, обусловленного давлением (отнесенный к площади донного среза), а c_{f_B} — коэффициент донного сопротивления, обусловленного трением и неровностями поверхности [1]) (фиг. 3). Хорнер установил, что для снаряда $C_{D_B} \approx 0{,}2$.

Форма кормовой части не должна существенно изменять механизм формирования донного давления, но державка за моделью плохо обтекаемого тела, как сфера, может изменить картину течения в донной области. Другими словами, по Хорнеру, круговое поперечное сечение струйного насоса становится кольцеобразным, улучшая таким образом эффект эжекции и соответственно уменьшая сопротивление давления (фиг. 4).

Донное давление за снарядами и телами, подобными им по форме, отличается от донного давления за сферой. На снарядах поток отрывается от острой кромки донного среза, и когда отношение $d_r/d_{\text{макс}}$ уменьшается, начиная от единицы, где d_r — диаметр державки, а $d_{\text{макс}}$ — максимальный диаметр модели, кольцеобразная донная область может рассматриваться как двумерная, а когда $d_r/d_{\text{макс}} \to 0$ — как осесимметричная.

Из фиг. 3 и 5 видно, что донное сопротивление за двумерными поверхностями примерно в 3 раза больше, чем сопротивление за телами вращения, рассчитываемое по формуле $C_{D_B} = 0{,}135\sqrt[3]{c_{f_B}}$ (фиг. 5).

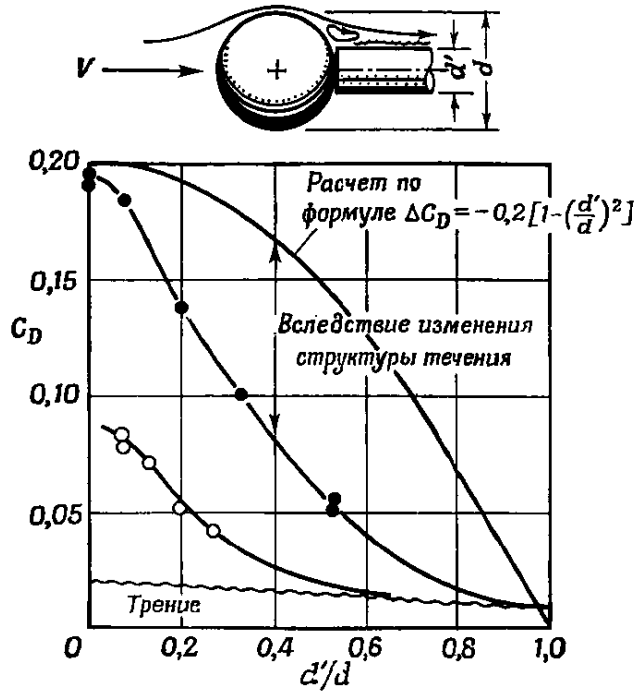
Это объясняется различным распределением скоростей по ширине следа. Для двумерных поверхностей распределение скорости может быть задано соотношением

$$u/u_\infty = (y/\delta)^{1/6},$$

где u — местная скорость внутри пограничного слоя; u_∞ — скорость набегающего потока, y — расстояние по нормали к направлению набегающего потока, а δ — толщина пограничного слоя. Для осесимметричных тел распределение скорости соответствует степенному закону с показателем $1/3$ вместо $1/6$. Такое изменение в распределении скоростей связано с изменением поперечного сечения следа от кольцеобразного к круговому [6]. В результате

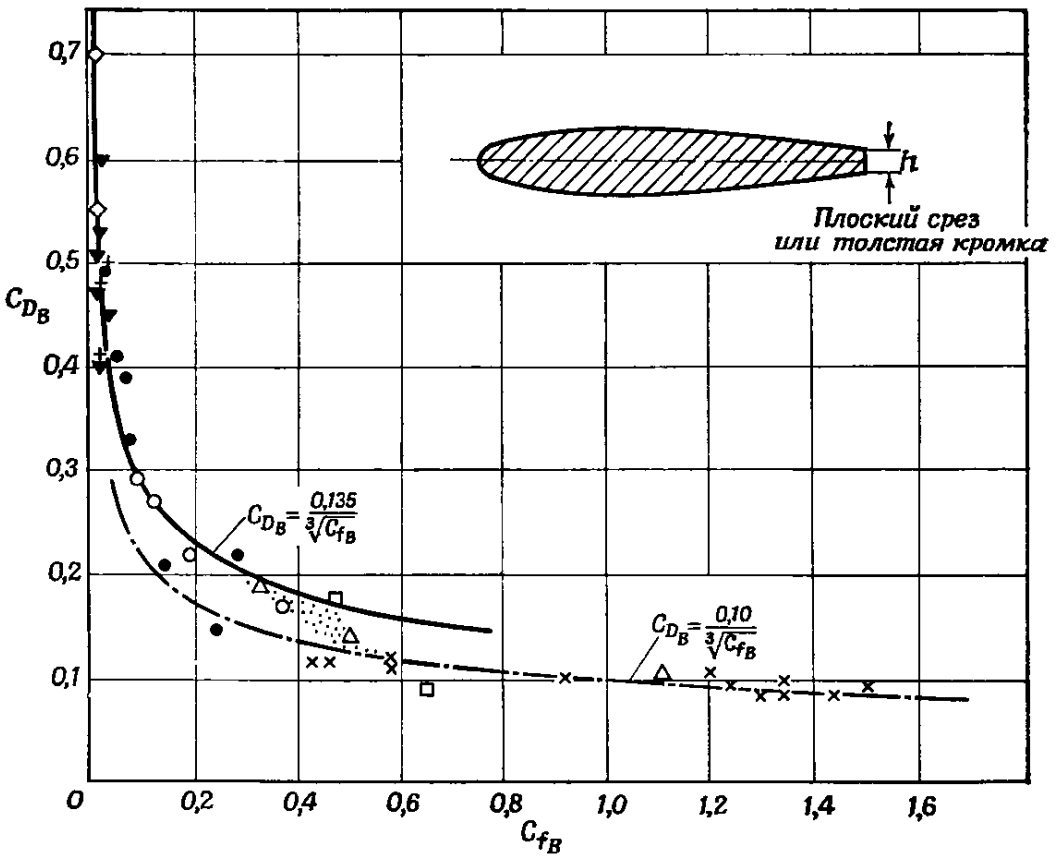
---

[1]) Величина $c_{f_B} = c_f\,(S/S_B)$ в случае осесимметричного тела и $c_{f_B} = 2c_f\,(c/h)$ в случае двумерного тела выбрана в качестве параметра, характеризующего поверхностное сопротивление тела перед донным сечением, влияющее на толщину пограничного слоя.— *Прим. ред.*



Ф и г. 4. Сопротивление сферы при числах Рейнольдса, превосходящих критическое, в зависимости от диаметра державки [6].

● метод баллистического маятника, Re = $6 \cdot 10^5$; ○ измерения силы, Re = $4 \cdot 10^5$.



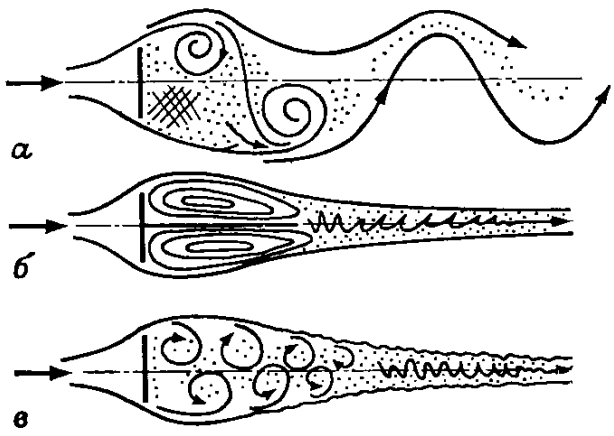
Ф и г. 5. Сопротивление, вызванное толстой кромкой или плоским срезом профиля [6].

Коэффициенты рассчитаны по площади донного среза bh; ● t/c = 16,5% и 20,5%, водяная труба AVA; ○ профиль 0013 (Токио); □ профиль 2412 (Мюнхен); △ профиль 0018, DVL; ◇ профиль фирмы «Дорнье»; × стык металлических листов; ▼ водяная труба AVA; + данные NACA T Rept 852, Re = 10^6, M = 0,3.

распределение скоростного напора по радиусу изменяется от закона $^1/_3$ к закону $^2/_3$. Средний скоростной напор в пограничном слое уменьшается примерно до $^1/_3$ скоростного напора в двумерном пограничном слое.

Сравнение структуры течения за двумерной и осесимметричной пластинами также полезно для установления причины уменьшения донного давления за осесимметричными телами.

В следе за двумерной поверхностью образуется вихревая дорожка Кармана, и благодаря упорядоченному движению в этом слое происходит интенсивный обмен количеством движения между следом и внешним потоком. В следе за осесимметричной пластиной, такой, как диск, обмен количеством движения значительно слабее, а следовательно, и сопротивление меньше. Однако донное сопротивление двумерной пластины можно уменьшить с помощью разделительной пластины, которая ослабляет вихревое движение (фиг. 6). Утолщение задней кромки профиля также вызывает увеличение донного сопротивления, но при этом возрастает подъемная сила и заметно улучшается аэродинамическое качество. Поэтому толстые профили с затупленной задней кромкой могут использоваться для воздушных винтов.



Фиг. 6. Структура течения за пластинами [6].

а — двумерная пластина, $C_D=2{,}0$, $\Delta p_B/q = -1{,}3$; *б* — двумерная пластина с разделительной пластиной, $C_D = 1{,}5$, $\Delta p_B/q = -0{,}8$; *в* — трехмерная пластина или диск, $C_D = 1{,}2$; $\Delta p_B/q = -0{,}5$.

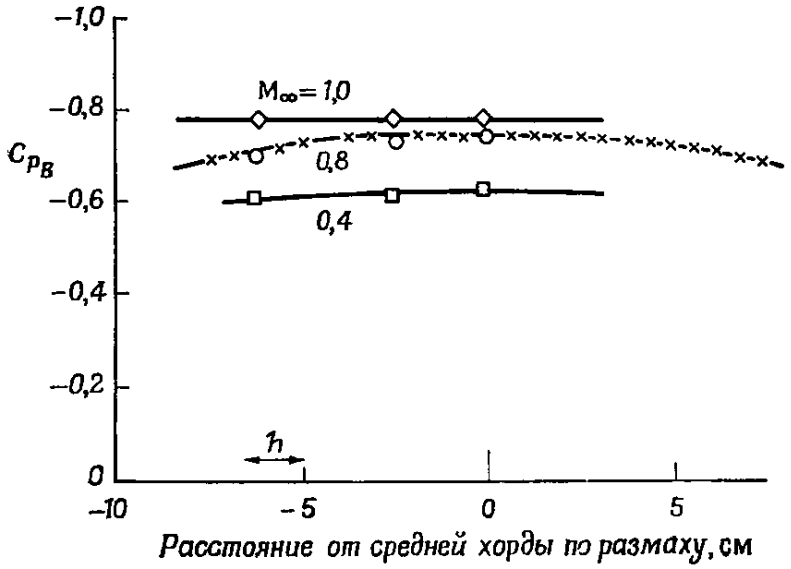
Дополнительные сведения о донном давлении в несжимаемом потоке можно получить из обзорной работы Нэша [8].

Хорнер [6] дал оценку донного сопротивления при сверхзвуковых скоростях на основе данных по донному сопротивлению при дозвуковых скоростях. Этот вопрос будет рассмотрен в следующем разделе.

В интервале чисел Маха $0{,}2 \leqslant M_\infty \leqslant 1{,}12$, охватывающем трансзвуковую область, и чисел Рейнольдса $0{,}8 \cdot 10^6 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 2{,}7 \cdot 10^6$ Нэш и др. [9] экспериментально исследовали донное течение и донное давление за изолированным профилем с затупленной задней кромкой и за уступом, расположенным по потоку. При затупленной задней кромке в дозвуковом интервале скоростей течение в донной области характеризуется периодическим образованием вихрей и их сходом в след. Коэффициент донного давления изменяется от —0,6 приблизительно до —0,78, а максимальный подсос имеет место на осевой линии донной области (фиг. 7). Нача-

ло оси ординат на фиг. 7 расположено по осевой линии донной области.

Коэффициент донного давления C_{p_B} уменьшается с ростом числа Маха, вероятно, вследствие влияния сжимаемости на вихревую дорожку, при этом ширина следа медленно увеличивается. Появление скачка уплотнения на задней кромке профиля и установление сверхзвукового обтекания задней части профиля приводят к сложному взаимодействию между движением вязкого слоя.



Фиг. 7. Распределение донного давления по размаху [9].
$M_\infty = 0,8$: ○ давление на поверхности донного среза, × измерения трубкой Пито; h — толщина задней кромки профиля.

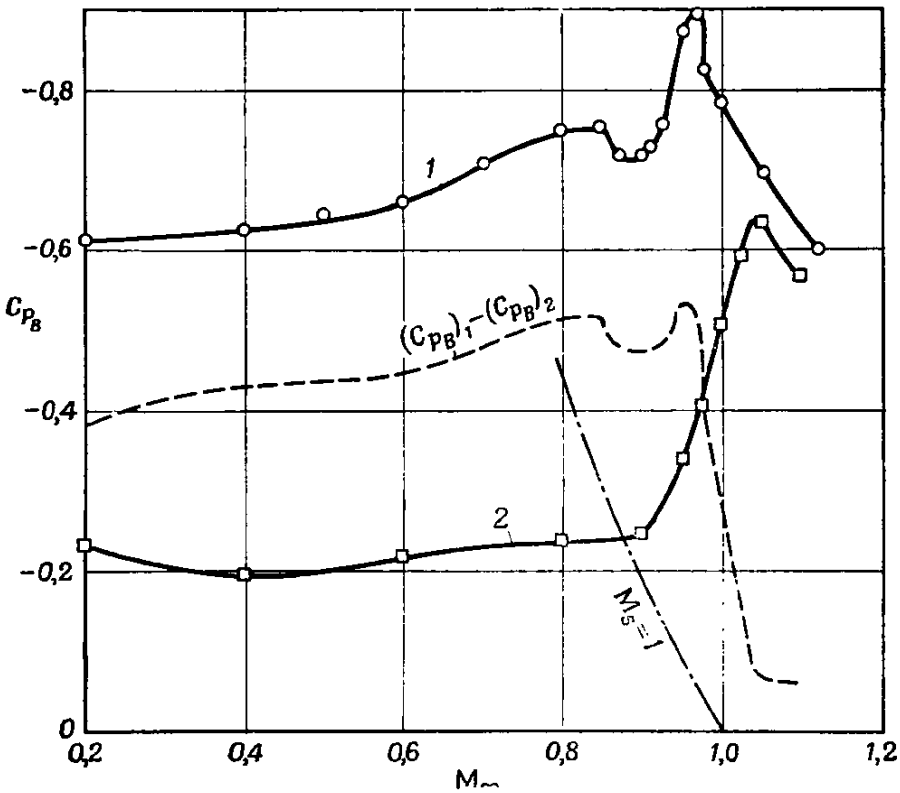
замыкающим скачком уплотнения и образованием вихрей и, по-видимому, не подавляют влияние периодических явлений при $M_\infty = 0,9-0,975$. Однако по достижении числа Маха, равного единице, происходит существенное изменение структуры течения, приводящее к установлению почти стационарного режима, при котором периодические явления и срывы вихрей утрачивают свое значение.

При визуальном исследовании донного течения за уступом, расположенным по потоку, наблюдалось образование вихрей, движущихся вниз по потоку в вязком слое, но при этом с помощью стробоскопа не удалось обнаружить периодичности наблюдаемых явлений.

Изменение донного давления за уступом в зависимости от числа Маха показано на фиг. 8.

Отмечено, что во всей дозвуковой области коэффициент донного давления почти постоянен и равен примерно —0,2. При больших дозвуковых скоростях, когда в зоне отрыва и присоединения достигается скорость звука, донное давление резко падает, приближаясь к величине, измеренной на модели профиля с зату-

пленной задней кромкой вследствие изменения распределения давления в области присоединения. Как видно из фиг. 8, в дозвуковом интервале скоростей имеется большая разница между донным давлением на задней кромке и за уступом. Например, при $M_\infty = 0{,}8$ для уступа $C_{p_B} = -0{,}23$, а для затупленной задней кромки $C_{p_B} = -0{,}75$. Вероятно, эта разница обусловлена образованием вихревой дорожки за затупленной задней кромкой.



Фиг. 8. Донное давление за профилем с затупленной задней кромкой и за уступом [9].

1 — модель профиля; *2* — уступ, расположенный по потоку.
Примечание. Индекс 1 относится к основной модели, индекс 2 — к уступу.

На фиг. 8 M_s — число Маха при условиях во внешнем потоке после расширения от p_∞ до p_B, т. е.

$$M_s^2 = \frac{2}{\gamma-1}\left\{\left(\frac{p_\infty}{p_B}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right)-1\right\}.$$

Аналогичные выводы сделал Хорнер [6]. Он сравнил данные для профилей с затупленными задними кромками и для стыков металлических листов (соответствующих небольшому уступу, расположенному по потоку) и показал, что сопротивление возрастает приблизительно по степенному закону в зависимости от отношения высоты уступа к толщине пограничного слоя в степени $^1/_3$. По сравнению с данными Нэша и др. [9] такой закон дает заниженные значения донного давления или завышенные значения сопротивления. При дозвуковых скоростях донное давление зависит

от толщины набегающего пограничного слоя, а вихревая дорожка, по-видимому, является причиной пониженного донного давления. Интенсивность вихревой дорожки и донное давление, по-видимому, также зависят от геометрии профиля.

Вырезы у задней кромки профиля или разделительная пластина, оказывающие слабое влияние в стационарном потоке, способствуют росту донного давления при нестационарном режиме донного течения. Вырезы у задней кромки профиля снижают сопротивление благодаря их стабилизирующему влиянию на присоединенные вихри, свойственные возникающему стационарному донному течению, которые на профилях без вырезов нестационарны и периодически сбегают вниз по потоку с образованием вихревой дорожки. Разделительная пластина также оказывает стабилизирующее действие.

2. ДОННОЕ ДАВЛЕНИЕ ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

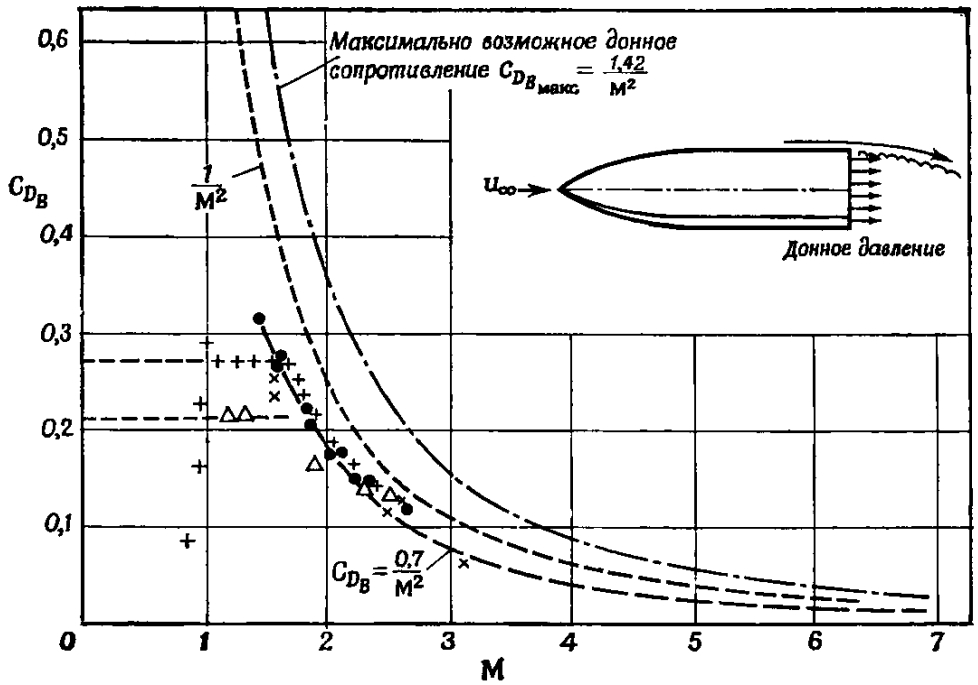
Как отмечалось ранее, экспериментальные и теоретические исследования донного давления при сверхзвуковых скоростях проводились гораздо интенсивней, чем при дозвуковых скоростях.

Теория смешения Крокко — Лиза [10] (гл. I) может быть использована для приближенного расчета донного давления в сжимаемом потоке. Эта теория предполагает, что падение давления на донном срезе обусловлено целиком диффузией импульса поперек вязкого слоя, однако концепция простой диффузии импульса, удовлетворительная для сверхзвукового течения, недостаточна для несжимаемого потока, поскольку для несжимаемого потока (кроме диффузии импульса по ширине вязкого слоя) важным фактором является также динамика вихрей [3, 5]. Тем не менее следует отметить, что донное давление при сверхзвуковых скоростях можно рассчитать по донному давлению при дозвуковых скоростях, хотя и существует естественный предел для отрицательного коэффициента донного давления при сверхзвуковых скоростях. Например, максимальный коэффициент донного сопротивления задается в функции числа Маха [6] в виде

$$C_{D_{B_{\text{макс}}}} = -\left(\frac{\Delta p}{q}\right)_{\text{макс}} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} = \frac{1{,}42}{M_\infty^2},$$

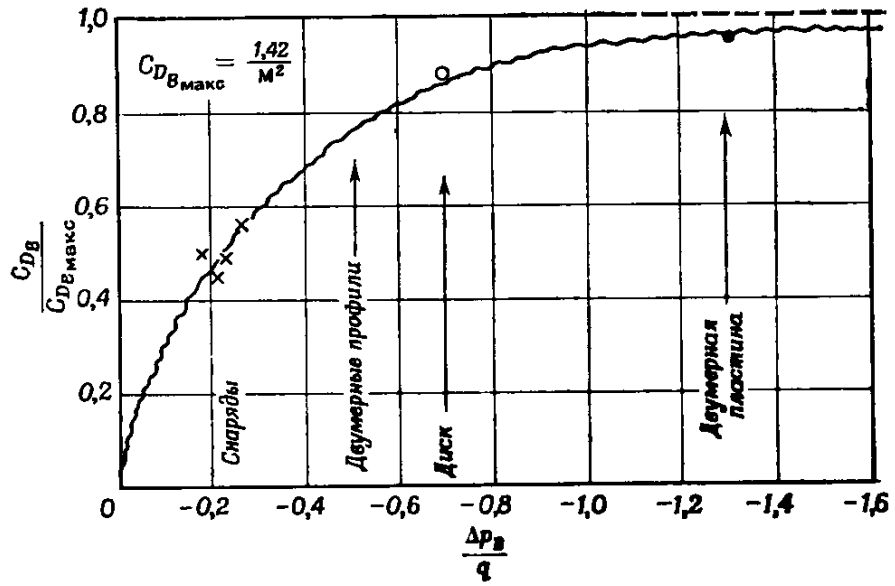
где Δp — разность статических давлений, а q — скоростной напор, рассчитанный по скорости набегающего потока. Но этот коэффициент максимального донного сопротивления никогда не достигается, и эмпирическое выражение для C_{D_B} для снарядов и подобных им тел имеет вид (фиг. 9)

$$C_{D_B} = 0{,}5\, C_{D_{B_{\text{макс}}}} \approx 0{,}7/M_\infty^2.$$



Ф и г. 9. Коэффициент донного сопротивления при сверхзвуковых скоростях [6].

× за конусами; △, ● за снарядами; + летные испытания.



Ф и г. 10. Функция, позволяющая рассчитать донное сопротивление тела произвольной формы [6].

Δp_B — донное давление при дозвуковых скоростях.

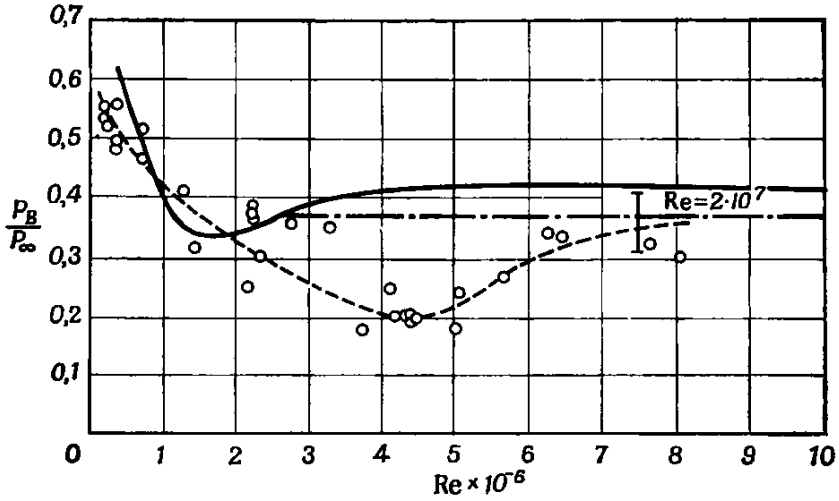
Это выражение подтверждается результатами полигонных испытаний снарядов в интервале чисел Маха $0,8 < M_\infty < 2,5$ [11].

Расчет донного давления при сверхзвуковых скоростях по донному давлению при дозвуковых скоростях иллюстрируется на фиг. 10.

2.1. ЗАВИСИМОСТЬ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ ОТ ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА

Зависимость донного давления от числа Рейнольдса исследовалась экспериментально для цилиндрических моделей с конической носовой частью Курцвегом [12] при $M_\infty = 1,5-5,0$ и $Re = 0,3 \cdot 10^6 - 4,4 \cdot 10^6$, Богдоновым [13] при $M_\infty = 2,95$ и $Re = 0,4 \cdot 10^6 - 1,0 \cdot 10^6$, Каванау [15] при $M_\infty = 2,84$ и $Re = 4,5 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^5$ и др. Все упомянутые числа Рейнольдса рассчитаны по длине тела.

Каванау [15] получил выражение для донного давления в широком интервале чисел Рейнольдса, используя эксперименталь-



Фиг. 11. Донное давление в зависимости от числа Рейнольдса. Сравнение результатов баллистических испытаний и экспериментальных данных, полученных в аэродинамических трубах [12].

l/d — отношение длины к диаметру цилиндрической модели с конической головной частью; ——— аэродинамическая труба переменной плотности Принстонского университета, $M = 2,95$, $l/d = 3,3$; —·— асимптота экспериментальных данных, полученных в аэродинамической трубе NOL (Лаборатория ВМС США), при турбулентном режиме течения, $M = 3,24$, $l/d > 5$; —○— баллистическая трасса с переменным давлением, $M = 3,00-3,28$, $l/d = 4$; I — баллистическая трасса, BRL (Лаборатория баллистических исследований, Абердинский полигон), $M = 3,24$.

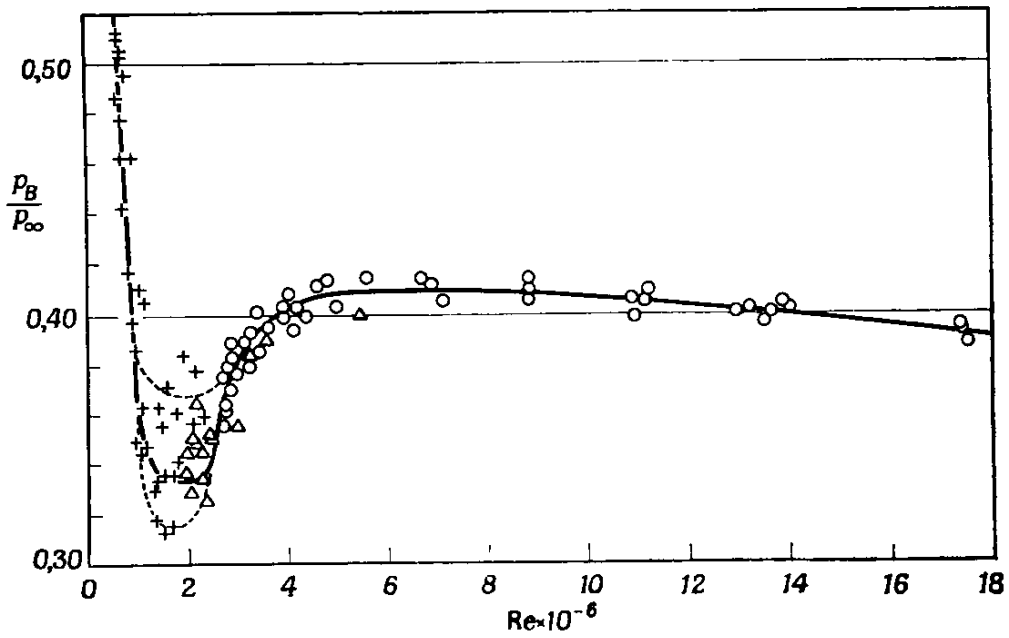
ные данные других исследователей. Эти данные вначале были сопоставлены, а затем было найдено выражение для донного давления.

Согласно результатам измерений [12], донное давление значительно уменьшается с ростом чисел Рейнольдса, когда числа Рейнольдса невелики. Но при достаточно больших числах Рейнольдса донное давление становится постоянным (фиг. 11).

Экспериментальные данные Богдонова [13], приведенные на фиг. 12, также отражают тенденцию донного давления к уменьшению с возрастанием числа Рейнольдса в области малых чисел Рейнольдса; подобную тенденцию наблюдал и Чепмен [14].

Подводя итог, можно сказать, что с возрастанием числа Рейнольдса примерно до 10^6 донное давление быстро уменьшается, а при числах Рейнольдса более 10^6 поток все более напоминает турбулентную струю. Дальнейшее возрастание числа Рейнольдса не вносит существенных изменений в картину течения в следе, но донное давление снова резко возрастает при более высоких числах Рейнольдса, а затем слабо изменяется с ростом числа Рейнольдса.

Экспериментальные данные Чепмена [14] и Богдонова [13] отличаются в области чисел Рейнольдса $2 \cdot 10^6 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 5 \cdot 10^6$. Чепмен наблюдал постоянное донное давление в этой области перед дальнейшим резким возрастанием, а Богдонов [13] не отмечал такого постоянства донного давления. На шероховатой поверхности с возрастанием толщины пограничного слоя донное давление уменьшается [13].

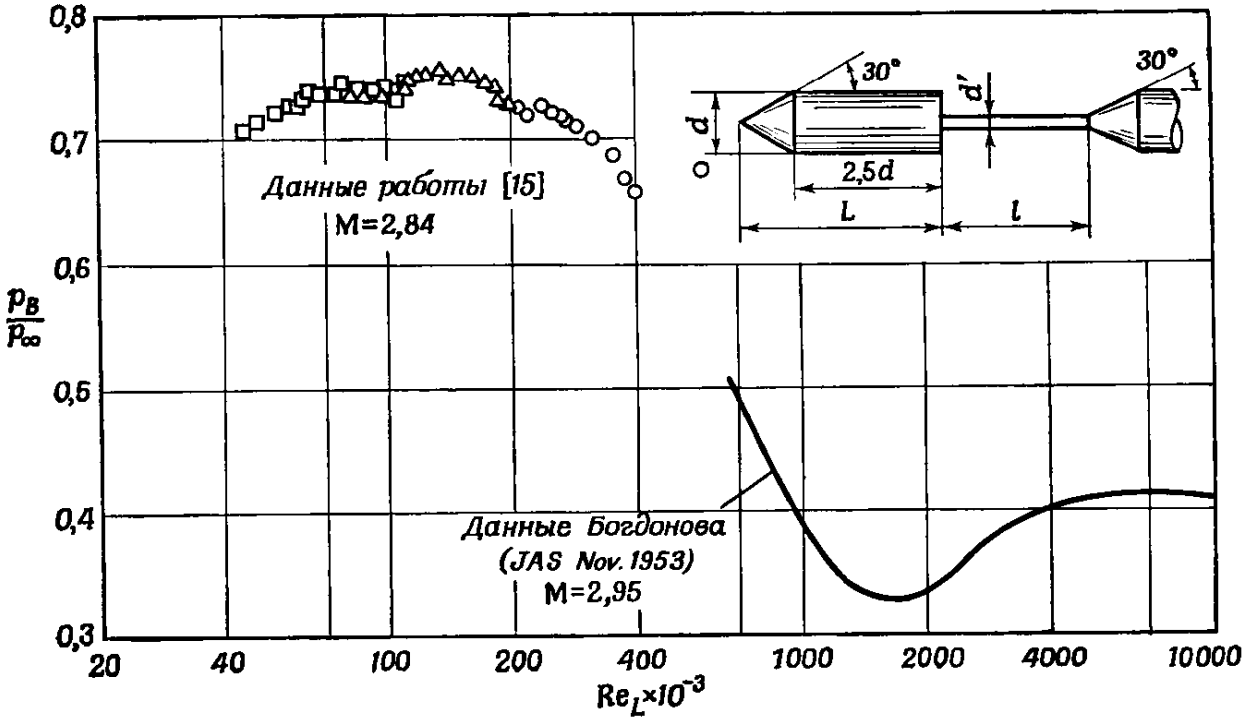


Фиг. 12. Донное давление в зависимости от числа Рейнольдса для гладкой модели [13].
d — диаметр тела; + d = 6,35 мм; Δ d = 12,7 мм, ○ d = 25,4 мм.

Крокко и Лиз [10] определили теоретически максимум донного давления при числе Рейнольдса, соответствующем промежуточному режиму между полностью ламинарным и полностью турбулентным течением, и этот максимум $p_B/p_\infty = 0{,}75$ при промежуточном числе Рейнольдса 140 000 показан на фиг. 13.

Максимум донного давления при промежуточном числе Рейнольдса вызван переходом от ламинарного течения к турбулентно-

му в области следа, примыкающей к донному срезу, и перемешиванием внешнего почти изэнтропического течения с течением в этой области следа. Путем измерений донного давления при полностью ламинарном течении за простой цилиндрической моделью с конической носовой частью и при малых числах Рейнольдса, рассчитанных по длине модели, $159 < \mathrm{Re} < 7400$ [16], а также с помощью экспериментальных данных Каванау [15] и Богдонова [13] была получена для этой модели почти непрерывная кривая изменения донного давления в интервале чисел Рейнольдса $1{,}6 \cdot 10^2 <$



Фиг. 13. Донное давление в зависимости от числа Рейнольдса [15].
○ $L = 51{,}3$ мм; △ $L = 25{,}6$ мм; □ $L = 14{,}7$ мм.

$< \mathrm{Re} < 1{,}8 \cdot 10^7$ при числе Маха, близком к 3, показанная на фиг. 14 (см. также гл. I).

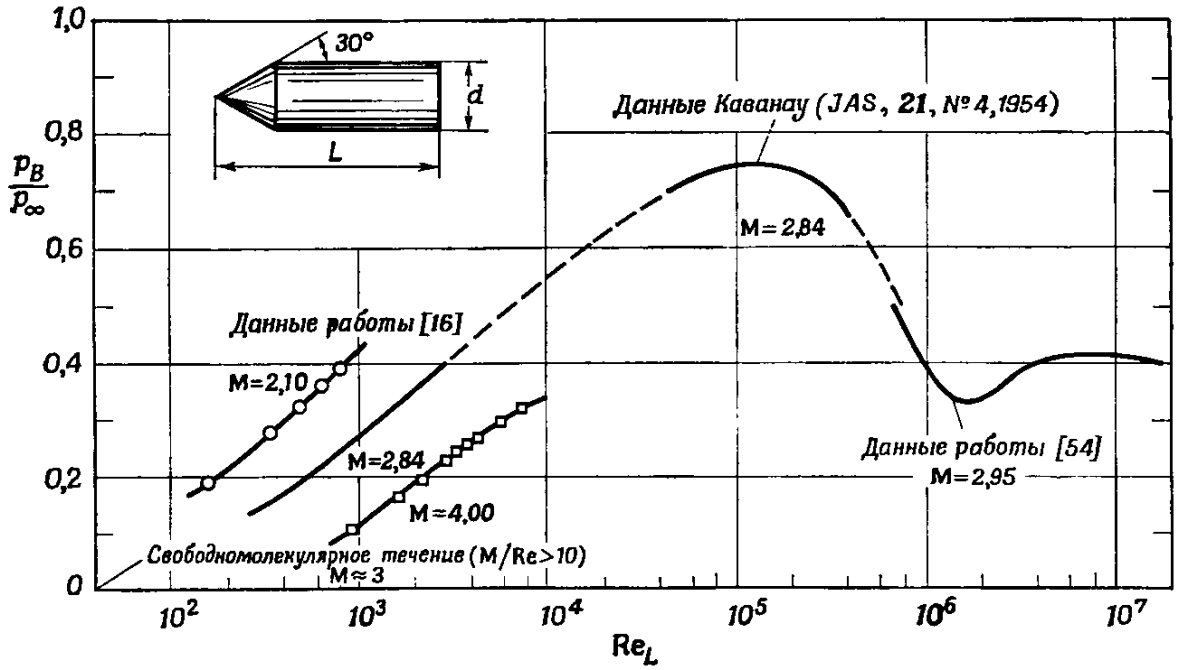
При малых числах Рейнольдса и полностью ламинарном течении местное значение донного давления изменяется вдоль радиуса донного среза по параболическому закону, причем в центре оно в четыре раза больше, чем на периферии цилиндра. Поэтому вместо местного значения донного давления на фиг. 14 представлен осредненный по площади коэффициент $\bar{p}_B/p_\infty$. Интервал чисел Маха в испытаниях Каванау составлял от 2 до 4. При таких скоростях потока малые числа Рейнольдса соответствуют области разреженного газа на большой высоте. Если воспользоваться характеристикой областей течения, предложенной Цзяном [17],

$\mathrm{M}/\sqrt{\mathrm{Re}} < 0{,}01$ — для течения сплошной среды,

$0{,}01 < \mathrm{M}/\sqrt{\mathrm{Re}} < 1$ — для течения со скольжением,

и $10 < \mathrm{M}/\mathrm{Re}$ — для свободномолекулярного течения,

то данные испытаний Каванау [16] попадают в область $0{,}05 < M/\sqrt{Re} < 0{,}15$, относящуюся к режиму течения со скольжением. Возникает вопрос, является ли представленная на фиг. 14 зависимость универсальной, поскольку при течении газа разрежение оказывает специфическое влияние на донное давление в отличие от течения несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса. Показано, что влияние скольжения на донное давление имеет порядок величины $(u_s/u_\infty)^2$, где u_s — скорость скольжения,



Фиг. 14. Донное давление в зависимости от числа Рейнольдса [16].

а u_∞ — скорость набегающего потока. Коэффициент донного давления p_B/p_∞ считается равным нулю для всех практических случаев, если $M_\infty > 2$ в свободномолекулярном течении [16]. Так как интервал исследованных значений u_s/u_∞ составлял от 0,05 до 0,11, разрежением в течении со скольжением можно пренебречь и зависимость, представленная на фиг. 14, может рассматриваться как универсальная для течения сплошной среды. На основании фиг. 14 можно заключить, что донное давление резко меняется в зависимости от числа Рейнольдса при малых и умеренных числах Рейнольдса, но при очень больших числах Рейнольдса донное давление практически не зависит от числа Рейнольдса. При очень малых числах Рейнольдса на донное давление оказывает влияние ламинарное течение. (Кривая донного давления на фиг. 14 начинается в области свободномолекулярного течения и проходит через область ламинарного течения со скольжением.) В области умеренных чисел Рейнольдса, где происходит переход, донное давление достигает максимального значения и с ростом числа Рейнольдса точка перехода движется вверх

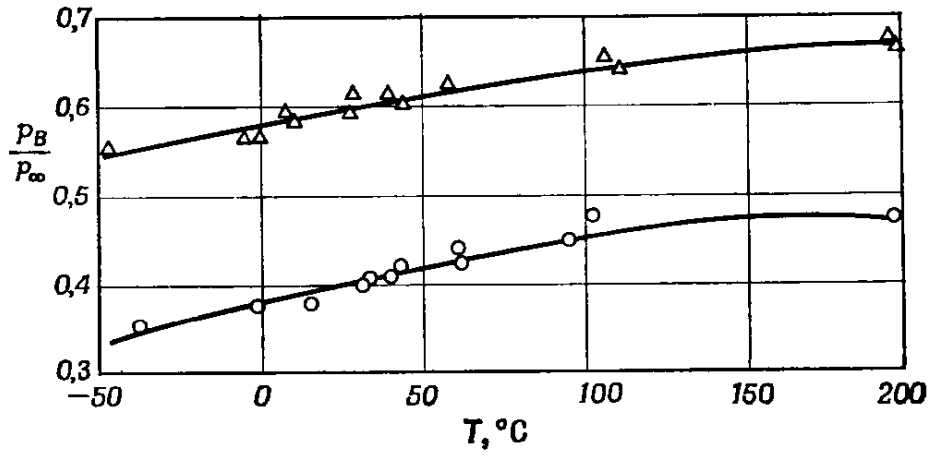
по потоку до тех пор, пока пограничный слой и течение в следе не станут полностью турбулентными. Наконец, при очень больших числах Рейнольдса донное давление становится практически независимым от числа Рейнольдса.

2.2. ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА, УГЛА НАКЛОНА ПОВЕРХНОСТИ ХВОСТОВОЙ ЧАСТИ ТЕЛА И ЧИСЛА МАХА НА ДОННОЕ ДАВЛЕНИЕ

Донное давление зависит также от характерных условий в пограничном слое на теле, таких, как условия, определяемые трением, теплопередачей и углом наклона поверхности хвостовой части тела [12].

Донное давление возрастает с ростом температуры поверхности тела (фиг. 15).

Оно возрастает также и с ростом угла сужения хвостовой части тела до 7° при ламинарном течении и до 15° при турбулентном

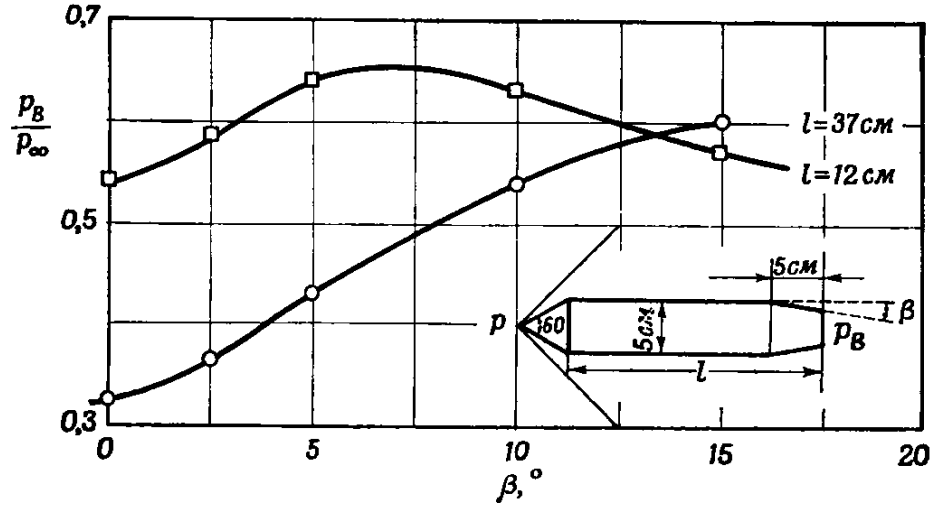


Фиг. 15. Донное давление в зависимости от температуры поверхности тела, $M_\infty = 4{,}24$ [12].

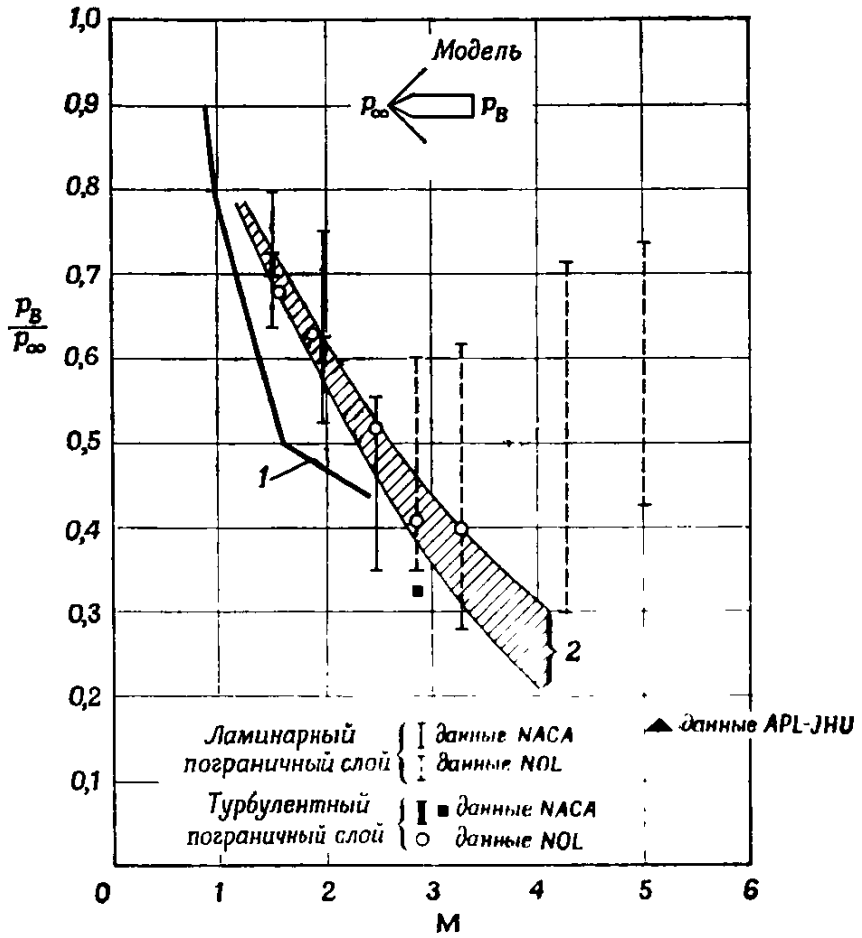
Δ цилиндр диаметром 10 см; ○ цилиндр диаметром 45 см.

течении. При ламинарном течении и углах наклона поверхности более 7° донное давление уменьшается (фиг. 16).

При малых числах Рейнольдса, в области полностью ламинарного течения, донное давление монотонно уменьшается с увеличением числа Маха [12, 16]. Этот экспериментальный результат подтверждается расчетами по методу Крокко — Лиза [10]. Расчет по этому методу согласуется с экспериментальными данными, в соответствии с которыми донное давление уменьшается с уменьшением числа Рейнольдса при полностью ламинарном течении. Однако, согласно результатам Богдонова [13] и Курцвега [12], в области турбулентного течения (в противоположность полностью ламинарному течению) донное давление уменьшается с увеличением



Ф и г. 16. Донное давление в зависимости от угла сужения хвостовой части тела, $M_\infty = 3{,}24$ [12].



Ф и г. 17. Донное давление в зависимости от числа Маха [12].

1 — ракеты, стабилизированные оперением, данные APL — JHU (Лаборатория прикладной физики Университета им. Джонса Гопкинса); *2* — вращающиеся снаряды, данные BRL, полученные на баллистической трассе.

числа Рейнольдса. Это различие можно объяснить с учетом теплопередачи.

В области больших чисел Рейнольдса (турбулентное течение) донное давление увеличивается с ростом температуры поверхности тела (фиг. 15), однако при малых числах Рейнольдса (ламинарное течение) донное давление увеличивается с понижением температуры поверхности тела. Поскольку влияние охлаждения на пограничный слой идентично возрастанию числа Рейнольдса, становится понятным кажущееся расхождение между экспериментальными результатами, касающимися донного давления и температуры поверхности.

Из фиг. 17 видно, что донное давление уменьшается с увеличением числа Маха, и заданному числу Маха соответствует широкий интервал измеренных значений донного давления с разбросом, достигающим более 50% [12]. Зависимость донного давления от числа Маха исследовали также Коуп [18] и Каванау [16].

2.3 РАСЧЕТ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ

Много внимания уделялось расчету донного давления за телами вращения, двумерными конфигурациями и крыльями самолетов.

2.3.1. Донное давление за телом вращения

Этот вопрос изучался наиболее интенсивно. Лоренц [19], Габо [20] и Карман [21] использовали различные гипотезы для определения донного давления за телом вращения, но их расчеты неудовлетворительны. В предположении, что скорость воздуха, уменьшаясь в пограничном слое, после отрыва пограничного слоя от тела восстанавливается, была получена приближенная формула для расчета донного давления [12]

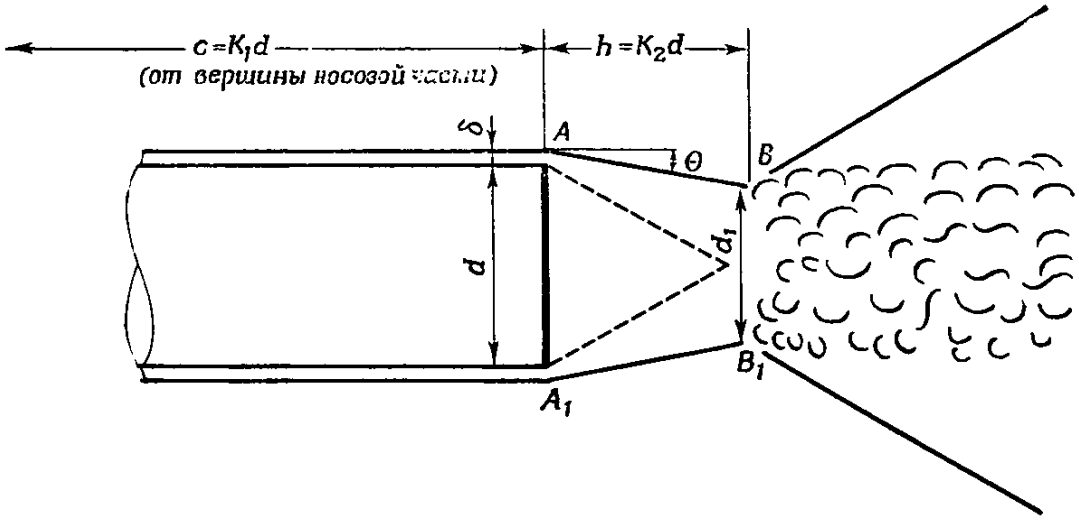
$$\frac{p_B}{p_\infty} = \frac{\int\limits_{y=r}^{y=\delta} \frac{v_y}{v_e} \frac{\rho_y}{\rho_e} \frac{p_y}{p_e} y\, dy}{\int\limits_{y=r}^{y=\delta} \frac{v_y}{v_e} \frac{\rho_y}{\rho_e} y\, dy},$$

где v_y — скорость, ρ_y — плотность в пограничном слое на расстоянии y от поверхности тела, δ — толщина пограничного слоя, r — радиус тела, индекс ∞ относится к условиям в набегающем потоке перед скачком, e — к условиям на границе пограничного слоя, p_y — статическое давление в слое y за расширением, если слой y может расширяться независимо от других слоев от давления торможения p_s и достигает своей начальной скорости v. Курцвег [12]

отмечал на основании шлирен-фотографий, что скорость почти восстанавливается на расстоянии 2—3 калибров вниз по потоку за донным срезом. Предыдущее уравнение преобразуется к виду

$$\frac{p_B}{p_\infty}=\frac{\int\limits_0^\delta \frac{v_y}{v_e}\frac{T_e}{T_y}\left[\frac{1+\left\{\frac{1}{2}(\gamma-1)\right\}M^2(1-T_s/T_{ys})}{1+\left\{\frac{1}{2}(\gamma-1)\right\}\times M^2\{1-(T_s/T_{ys})(v_y^2/v_e^2)\}}\right]^{\gamma(\gamma-1)} y\,dy}{\int\limits_0^\delta \frac{v_y}{v_e}\frac{T_e}{T_y}\,y\,dy}.$$

Для расчета необходимо знать профили скорости и температуры, а также распределение температуры торможения в пограничном слое. Хотя это уравнение дает удовлетворительные результаты



Фиг. 18. Течение за донным срезом снаряда.

при расчете донного давления за телом вращения, оно не пригодно для расчета крылового профиля [22]. Расчетные значения донного давления при числе Маха 2,0 составляют около половины величины экспериментальных значений для турбулентного и примерно в два-три раза больше для ламинарного течения. Коуп [18] использовал для расчета донного давления за телом вращения упрощенную модель (фиг. 18).

Физические явления в потоке вблизи донного среза, обусловленные вязкостью, следующие: поток отрывается от задней кромки тела, в результате образуется отрывная зона Ad_1A_1 и благодаря существованию этой зоны статическое давление вдоль AB приблизительно постоянно. Донное давление ниже статического в точке A, поэтому в этой точке возникает веер волн слабого разрежения.

Если течение ламинарное, переход начинается в некоторой точке между A и B; после пересечения области замыкающего скачка течение в следе становится полностью турбулентным. Профили скорости между точками A и B такие же, как на границах сверхзвуковой струи, истекающей в окружающее затопленное пространство. Внутри зоны отрыва происходит медленное циркуляционное движение, вызванное вязкостью воздуха [14]. Установившееся равновесие между донным давлением и положением линии BB_1 обеспечивается благодаря эжектирующему влиянию внешнего потока на течение в зоне отрыва. Часть воздуха вытекает из зоны отрыва, вызывая увеличение угла поворота потока в точке A и уменьшение давления в зоне отрыва. Линия BB_1 перемещается к донному срезу, при этом отношение давлений в замыкающем скачке возрастает, затрудняя течение эжектированного воздуха и воздуха, движущегося с малой скоростью в пограничном слое, против возрастающего давления в скачке. Противодействие этого эффекта эжектированию внешним потоком воздуха из отрывной зоны, снижающему давление в ней, способствует установлению равновесных условий в донном течении. Качественный характер течения вблизи донного среза за двумерным телом аналогичен.

За донным срезом след сужается, образуя усеченный конус ABB_1A_1, и угол Θ между направлением оси тела и прямой AB сравнительно мал (около 15°). AB — разделяющая линия тока, она же является траекторией вихрей, образующих вихревую дорожку, при пересечении которой скорость меняется, но давление остается постоянным. За сечением BB_1 ширина следа постепенно возрастает. Более подробно след при высоких скоростях рассмотрен в гл. VIII. При бо́льших углах Θ отношение p_B/p_A уменьшается. Такой же результат можно получить расчетным путем, исходя из условий в основном потоке, а также из условия $d_1 = BB_1$. Соотношение между донным давлением и сопротивлением следующее:

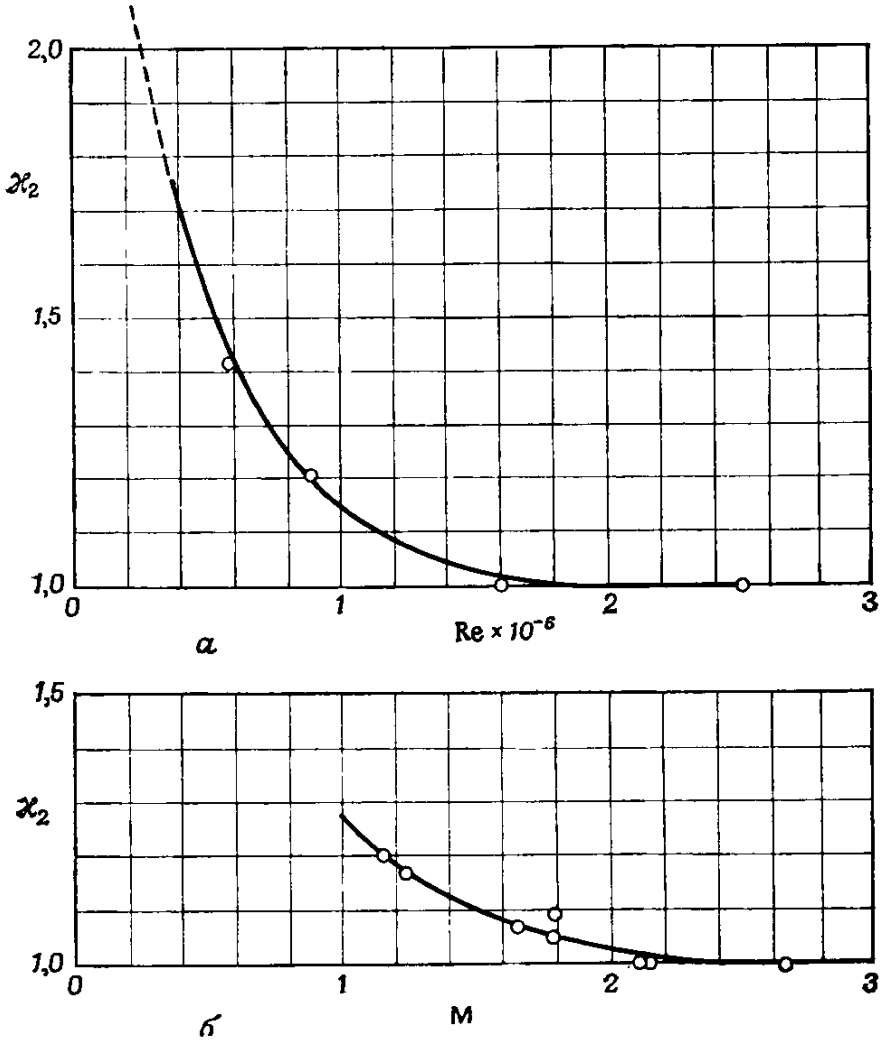
$$p_B/p_\infty = 1 - \frac{\gamma M^2}{\pi} C_{D_B},$$

где C_{D_B} = (донное сопротивление)/($\rho u_\infty^2 d^2/4$) — коэффициент донного сопротивления. Предполагая, что полная энергия на единицу массы в сечениях AA_1 и BB_1 одинакова, находим донное давление

$$\frac{p_B}{p_\infty} = \left\{0{,}92\,\frac{1+\frac{1}{2}(\gamma-1)\,M_A^2 u_{e_A}}{1+\frac{1}{2}(\gamma-1)\,M_B^2 u_{e_B}}\right\}(1-\delta^*/\delta)\,\frac{\delta}{c}\,\frac{4\varkappa_1}{(1-2\varkappa_2\,\mathrm{tg}\,\theta)^2},$$

где c — длина тела, δ и δ^* — физическая толщина и толщина вытеснения пограничного слоя у донного среза тела, $\varkappa_1 = c/d$, $\varkappa_2 = h/d$, h — длина замкнутой отрывной зоны. Как показано на фиг. 19, $\varkappa_2$ является функцией числа Рейнольдса и Маха.

Для тел под углами атаки донное давление систематически не измерялось, но, согласно имеющимся экспериментальным данным, донное давление значительно уменьшается с увеличением угла атаки. Формула Коупа [18] для p_B, применимая для тел вращения, не может дать удовлетворительных результатов для дву-



Фиг. 19. Зависимость $\varkappa_2$ от Re и M [18].
а — $\varkappa_2$ в функции Re, M = 2—3; *б* — $\varkappa_2$ в функции M.

мерных тел, поскольку при сравнении расчетного значения p_B (с использованием формулы Коупа) с экспериментальными данными для профиля при числе $M_\infty = 2$ получено плохое соответствие [14].

В начале 50-х годов Чепмен [14] опубликовал теорию донного давления, применимую как к осесимметричным, так и двумерным течениям. Первая попытка решить задачу о донном давлении с привлечением теории невязкого течения дала неудовлетворительные результаты, так как для всех необходимых условий при заданном числе Маха набегающего потока существовало бесконечное число возможных решений. В частном случае тела без державки возмож-

но только одно решение, но оно соответствует нереальному выводу о нулевом донном давлении. После этого Чепмен учел вязкость среды, пренебрег сужением хвостовой части и разработал приближенную полуэмпирическую теорию донного давления.

В некоторых качественных отношениях полуэмпирическая теория Чепмена [14] подобна теории Коупа [18], хотя обе эти теории были разработаны независимо одна от другой. Экспериментальные данные для различных тел вращения при постоянном числе Маха допускают корреляцию с помощью отношения толщины пограничного слоя у донного среза к диаметру донного среза. Итак, полуэмпирическая формула для донного давления выведена Чепменом при следующих предположениях:

1. Вводится коэффициент донного давления $P'_B = (p_B - p_1)/(1/2\rho_1 u_{e_1}^2)$, где p_B — донное давление, p_1, ρ_1 и u_{e_1} — соответственно статическое давление, плотность и скорость на границе пограничного слоя непосредственно перед донным срезом. Коэффициент P'_B зависит только от типа течения в пограничном слое, числа Маха и отношения толщины пограничного слоя непосредственно перед донным срезом к диаметру донного среза δ_1/d.
2. При заданном числе Маха разность $(P_B^* - P'_B)$, где P_B^* — величина, полученная из условия наилучшей экстраполяции кривой P'_B от δ_1 линейной зависимостью вплоть до нулевой толщины пограничного слоя, пропорциональна отношению δ_1/d. Коэффициент донного давления для ламинарного пограничного слоя равен

$$P_B = P_B^* \left(1 - \frac{k_l}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \frac{c}{d}\right)(1+\varepsilon) + P_\infty,$$

а для турбулентного

$$P_B = P_B^* \left(1 - \frac{k_t}{(\mathrm{Re})^{1/5}} \frac{c}{d}\right)(1+\varepsilon) + P_\infty,$$

где k_l и k_t — эмпирические константы, ε — поправочный коэффициент к скоростному напору, определяемый из соотношения $q_1/q_\infty = 1 + \varepsilon$, где q_1 и q_∞ — скоростной напор непосредственно перед донным срезом и в набегающем потоке, а P_∞ — коэффициент давления, отнесенный к условиям в набегающем потоке

$$P_\infty = \frac{p_1 - p_\infty}{{}^1/_2\rho_\infty u_\infty^2},$$

p_1 — статическое давление непосредственно перед донным срезом, c — длина тела от носка до среза (для осесимметричных течений — длина тела, для двумерных — хорда профиля), d — поперечный размер донного среза (для осесиммет-

ричных течений — диаметр донного среза, для двумерных — толщина задней кромки).

Величина k_l зависит от числа Маха и равна $k_l = 44$ при $M_\infty = 1{,}53$ и $k_l = 66$ при $M_\infty = 2{,}0$. Поскольку величина k_t мала, ею можно пренебречь до $M_\infty = 4{,}0$. Эти выражения для донного давления применимы к осесимметричным телам без сужения хвостовой части и к крыльям конечного размаха.

2.3.2. Донное давление за двумерным телом

Как было упомянуто в предыдущих разделах, в прошлом были проведены многочисленные эксперименты по исследованию донного давления за телом вращения. Однако для донного давления за двумерными телами имеется больше расчетных методов, чем для тел вращения. В этом разделе рассматриваются вначале экспериментальные исследования донного давления за двумерными телами, а затем — теоретические.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ ЗА ДВУМЕРНЫМ ТЕЛОМ

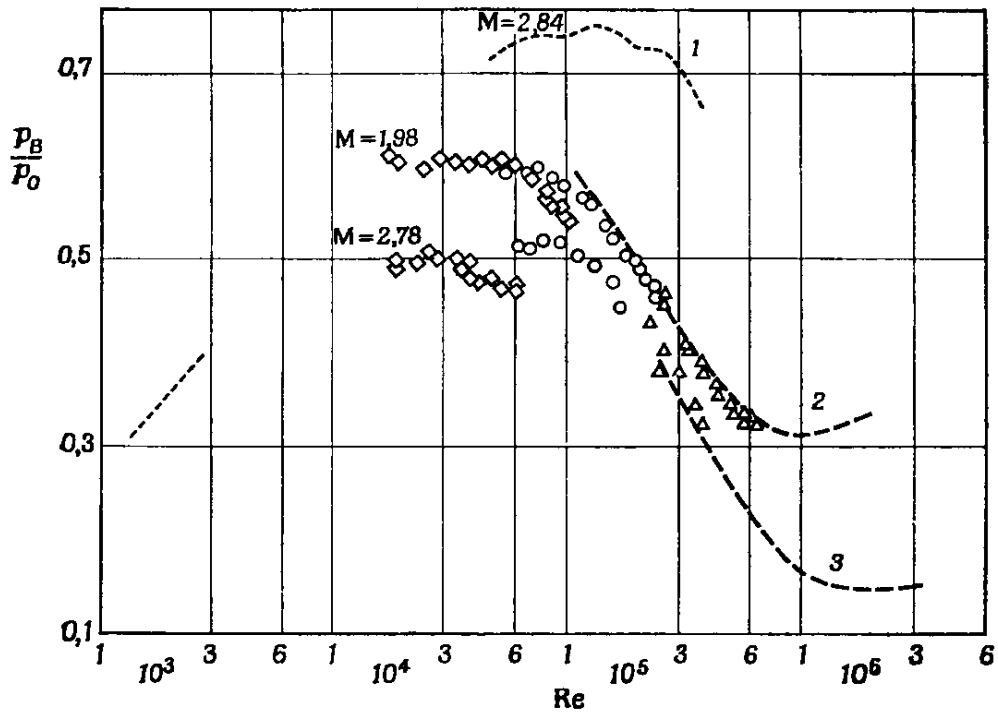
Донное давление за клиновидным профилем измерялось несколькими исследователями [23—25]. Харват и Якура [25] проводили эксперименты при числах Маха 1,98 и 2,78 в ламинарном и переходном режимах. Они исследовали также развитие слоя смешения, поскольку на донное течение в следе влияет динамика свободного слоя смешения, отделяющего внешний поток от внутреннего циркуляционного течения.

Картина течения в следе за двумерным телом подобна картине течения за осесимметричным телом и имеет горло и область повторного сжатия, замыкающую донное течение, с замыкающим скачком уплотнения. Так, характер изменения p_B в зависимости от числа Рейнольдса для двумерного течения подобен характеру изменения этого параметра для осесимметричного течения. Донное давление возрастает от некоторого постоянного значения для турбулентного следа до более высокого постоянного значения при числах Рейнольдса, меньших критического, так как переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в свободной струе.

На фиг. 20 донное давление за клином, измеренное в турбулентной области течения [26], сравнивается с донным давлением, измеренным в ламинарной и переходной областях течения [25]. Как видно из фиг. 20, донное давление за двумерным телом ниже, чем за осесимметричным. Индексы 0 и c относятся соответственно к области повторного сжатия ниже по потоку (что примерно соответствует невозмущенному потоку для тонких тел) и хорде клина.

Распределение потоков массы и количества движения, характеристики устойчивости и другие параметры набегающего пограничного слоя играют важную роль в развитии слоя смешения. Измеренные распределения местных чисел Маха в слое смешения для двух значений числа Маха набегающего потока и трех значений числа Рейнольдса показаны на фиг. 21 [25].

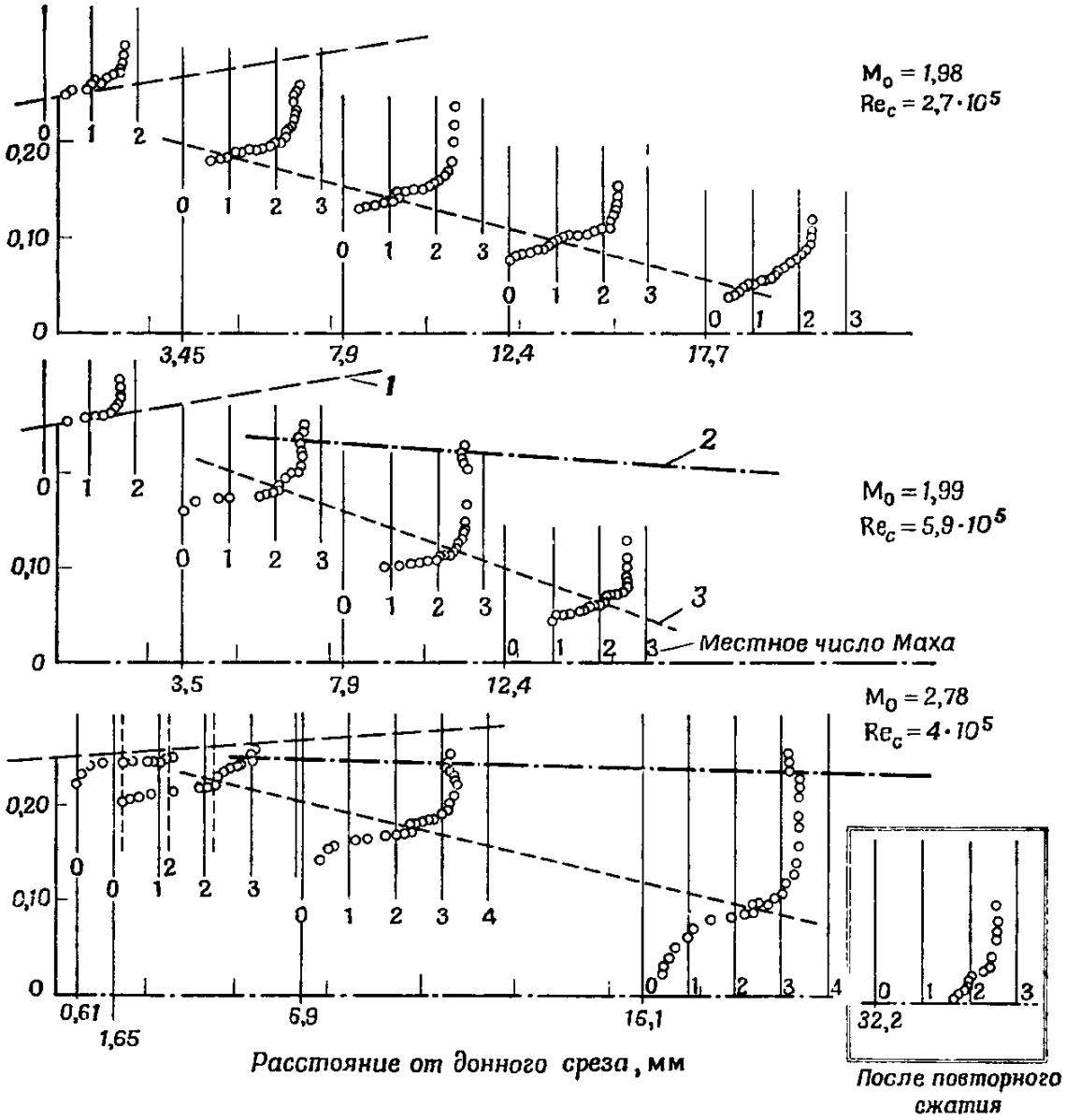
На начальной стадии развития слоя смешения его профиль соответствует теоретическому только по основным характеристи-



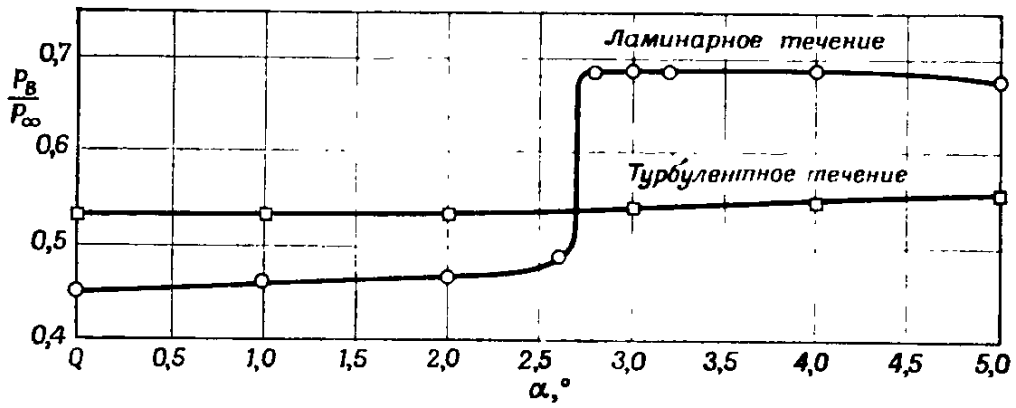
Фиг. 20. Донное давление за клином в зависимости от числа Рейнольдса [25].

1 — цилиндр с конической носовой частью, M = 2,84; *2* — клин 8 : 1, M = 2 [26]; *3* — клин 4 : 1, M = 3 [26]; Δ хорда модели 50,8 мм; ○ хорда модели 20,8 мм; ◇ хорда модели 7,9 мм.

кам. В частности, излом профиля распределения скорости заметен, и он размывается, но продолжает существовать даже в зоне повторного сжатия. Этот излом гораздо заметней при более высоком числе Маха. В отрывной зоне обратного течения не наблюдается. Из рассмотрения характера смешения сжимаемой жидкости при $M_\infty = 1{,}6$ установлено, что существенной разницы между профилями скорости в несжимаемом и сжимаемом потоках нет, особенно во внутренней части слоя с малой скоростью течения [27]. Измеренный масштабный коэффициент σ равен 15—20 [25]. Более высокие значения σ указывают на более низкий уровень турбулентности, но различие этих величин не означает серьезного различия в характеристиках течения, поскольку, согласно теории слоя смешения, σ связано с «длиной смешения» зависимостью, обратной закону $^3/_2$ степени. Двумерный след — изобарический в отличие от следа за телами



Ф и г. 21. Развитие слоя смешения [25].
1 — конец веера волн разрежения; *2* — замыкающий скачок; *3* — линия скольжения.



Ф и г. 22. Сравнение донного давления на профиле № 5-0,25 (*R*) при ламинарном и турбулентном течениях; $M_\infty = 1{,}5$, $Re = 1{,}3 \cdot 10^6$ [22].
α — угол атаки.

вращения. Напомним, что для цилиндрического тела с конической носовой частью донное давление изменяется вдоль радиуса по параболическому закону с минимальным значением на периферии цилиндра. Вихрь на задней кромке двумерного тела является трехмерным возмущением с осью, перпендикулярной слою смешения, однако это трехмерное движение оказывается слишком медленным, чтобы повлиять на основную структуру следа. Поэтому донное давление остается постоянным по размаху в пределах точности измерений. Но трехмерные возмущения могут влиять на переход в следе за соответствующими участками размаха. При высоких скоростях профиль с затупленной задней кромкой имеет большее сопротивление и в то же время обладает лучшим аэродинамическим качеством по сравнению с профилем с острой задней кромкой [22]. Были экспериментально исследованы пятьдесят пять крыльев прямоугольной формы в плане с затупленными задними кромками и удлинением 3. Относительная толщина профиля составляла от 0,05 до 0,10, углы сужения β' хвостовой части — от 2,9 до 20° и отношение толщины задней кромки к толщине профиля — от 0,2 до 1,0. Исследованные интервалы чисел Маха составляли от 1,25 до 3,1 и Рейнольдса — от $0{,}2\cdot10^6$ до $3{,}5\cdot10^6$. При турбулентном течении изменения чисел Рейнольдса вызывают лишь небольшие изменения донного давления, а числа Маха существенным образом влияют на донное давление [25]. Кроме того, изменения в форме профиля, угле сужения хвостовой части и угле атаки вызывают малые изменения донного давления, в то время как отношение толщины пограничного слоя к толщине задней кромки является основной переменной, влияющей на донное давление.

Как видно из фиг. 22 и 23, характеристики донного давления при турбулентном течении заметно отличаются от соответствующих характеристик при ламинарном течении. Влияние угла сужения хвостовой части на донное давление при турбулентном течении с малой сверхзвуковой скоростью за профилем заметно отличается от его влияния в случае тела вращения, причем оно мало для профиля и велико для тела вращения.

К тому же при малых числах Маха донное давление при турбулентном течении за профилем значительно ниже донного давления за телом вращения, а при больших числах Маха донное давление в обоих случаях примерно одинаковое [22].

Для практических целей можно использовать кривые изменения средних величин донного давления в зависимости от параметров $c/[h\,(\mathrm{Re})^{1/5}]$ и $c/[h\,(\mathrm{Re})^{1/2}]$, где c — хорда профиля, а h — толщина задней кромки (фиг. 24).

Чепмен и др. [22] отмечали существование возмущений в пограничном слое, начинающихся предположительно в месте стыка крыла с фюзеляжем. Из-за таких возмущений распределение донного давления по размаху неравномерно. Бадринараянан [28]

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

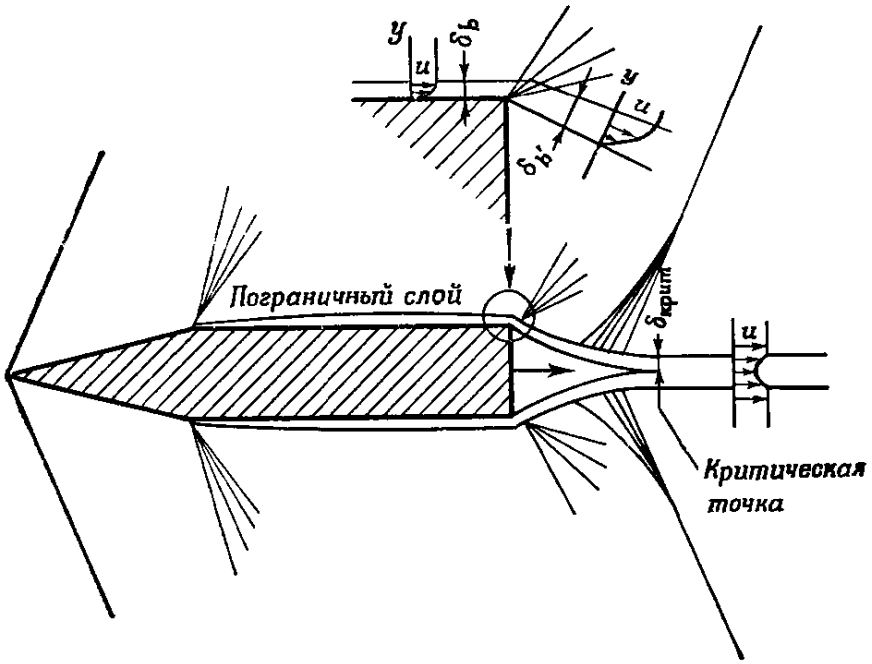
измерил донное давление, распределение чисел Маха, плотность потока и расход массы вниз по течению за двумерным и осесимметричным телами при $M_\infty = 2{,}0$. Для двумерных тел его экспериментальные данные согласуются с теорией Крокко — Лиза [10]. Вдув воздуха в донную область существенно увеличивает давление. Кроме того, масса, возвращаемая в отрывную зону, примерно равна массе, отсасываемой из нее (в единицу времени).

4. РАСЧЕТ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ ЗА ДВУМЕРНЫМ ТЕЛОМ

Аналитический подход к решению задачи о донном давлении при сверхзвуковых скоростях основан на предложенной Крокко и Лизом [10] концепции взаимодействия диссипативного вязкого течения с соседним изэнтропическим течением. В гл. I и VII эта теория уже была кратко изложена. Здесь этот метод рассматривается более подробно применительно к расчету донного давления при стационарном течении за тупой задней кромкой профиля.

4.1. ТЕОРИЯ СМЕШЕНИЯ КРОККО-ЛИЗА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ

Расчетная схема течения изображена на фиг. 25. Поток, обтекающий заднюю кромку, непосредственно за областью расширения имеет характер свободной струи и в нем происходит смеше-



Фиг. 25. Модель сверхзвукового профиля с тупой задней кромкой [10].

ние свободных струй. Ниже по течению от задней кромки находится критическая точка. Эта критическая точка очень важна для расчета и играет роль критического сечения сопла при определе-

нии донного давления, но положение критической точки, как правило, не совпадает с минимальным поперечным сечением области смешения. Математически при численном интегрировании нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, полученного из уравнения движения, обнаруживается существование такой критической точки. Два важных параметра, $\varkappa$ и f, связанных с толщиной пограничного слоя, определяются по Крокко и Лизу [10] следующим образом:

$$\varkappa = u_m/u_e = (\delta - \delta^* - \theta)/(\delta - \delta^*)$$

и

$$f = (\delta_i - \delta_i^* - \theta_i)\,\delta_i/(\delta_i - \delta_i^*)^2,$$

где $u_m = I/\overline{m}$ — средняя скорость внутреннего течения, I — поток количества движения, определяемый уравнением

$$I = \int_0^\delta \rho u^2\,dy,$$

и $\overline{m}$ — поток массы, задаваемый в виде

$$\overline{m} = \int_0^\delta \rho u\,dy,$$

а δ^* и θ — соответственно толщина вытеснения и толщина потери импульса, определяемые уравнениями

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy,$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy.$$

Индекс i обозначает несжимаемый поток в преобразовании Стюартсона. Параметр f появляется в соотношении между средней температурой и средней скоростью в следующем виде:

$$T_m/T_s = f - \frac{\gamma - 1}{2} W_m^2,$$

где $W_m = u_m/a_s$, a — скорость звука, T — абсолютная температура, а индексы m и s обозначают соответственно среднее значение и параметр торможения. Параметры f и $\varkappa$, впервые упомянутые в гл. I, важны для расчета донного давления. Они связаны с параметром F, который обычно используется при расчете донного давления,

$$F = \frac{f}{\varkappa^2} - 1 = \frac{\delta_i^* + \theta_i}{\delta_i - \delta_i^* - \theta_i}.$$

Уравнения импульсов и неразрывности преобразуются к системе двух уравнений для $d\varkappa/d(\ln m)$ и $dW_e/d(\ln m)$, где $m = \overline{m}a_s$ и $W_e = u_e/a_s$. Затем два уравнения сводятся к одному уравнению для $d\varkappa/dW_e$ или для dF/dW_e

$$\frac{dF}{dW_e} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}W_e^2-1\right)\left(1-\frac{\gamma-1}{2}W_e^2\right)(1-\sigma)+F\left\{\gamma W_e^2(1-\sigma)-\frac{F\varkappa}{1-k}+\frac{\Theta}{k}\frac{\left(1-\frac{\gamma-1}{2}W_e^2\right)}{1-\varkappa}\right\}+\sigma F\left(1-\frac{\gamma-1}{2}W_e^2\right)}{W_e\left(1-\frac{\gamma-1}{2}W_e^2\right)\left[\left\{\frac{1-\frac{\gamma-1}{2}W_e^2}{\varkappa(1-\varkappa)}\frac{\Theta}{k}-\frac{F}{K(1-K)}\right\}\frac{d\varkappa}{dF}-1+\sigma\left(\frac{F+1-\frac{\gamma-1}{2}W_e^2}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{dF}+1\right)\right]}, \tag{1}$$

где Θ — местный угол между направлением внешнего потока при $y=\delta$ и осью x; $\sigma = c_f/2k(1-\varkappa)$, а k — коэффициент смешения, определяемый из уравнения

$$d\overline{m}/dx = k\rho_e u_e.$$

Критическая точка находится из условия, что числитель и знаменатель уравнения (1) стремятся к нулю. Таким образом, полагая и числитель, и знаменатель равными нулю и решая совместно результирующие уравнения для $F_{\text{крит}}$ и $W_{e\text{крит}}$ (с помощью соотношения Прандтля — Майера), определим положение критической точки в функции $\overline{W}_e$ или $\overline{\mathrm{M}}$, где $\overline{W}_e$ и $\overline{\mathrm{M}}$ — приведенные скорость и число Маха невозмущенного потока вдали от тела, где $\Theta = 0$.

Рассмотрим теперь простейший случай, когда поверхность профиля у задней кромки параллельна направлению потока и число Маха непосредственно перед кромкой до начала расширения примерно равно числу Маха в невозмущенном потоке. Число Маха ниже по течению равно числу Маха невозмущенного потока, если повторное сжатие в следе изэнтропическое.

Предложенная Крокко и Лизом [10] методика интегрирования заключается в следующем: интегрирование уравнения (1) можно начать от критической точки в обе стороны: вниз по течению вдоль следа и вверх по течению в сторону задней кромки профиля. Поскольку числитель и знаменатель уравнения в критиче-

ской точке стремятся к нулю, вблизи этой точки справедлива квадратичная зависимость вида

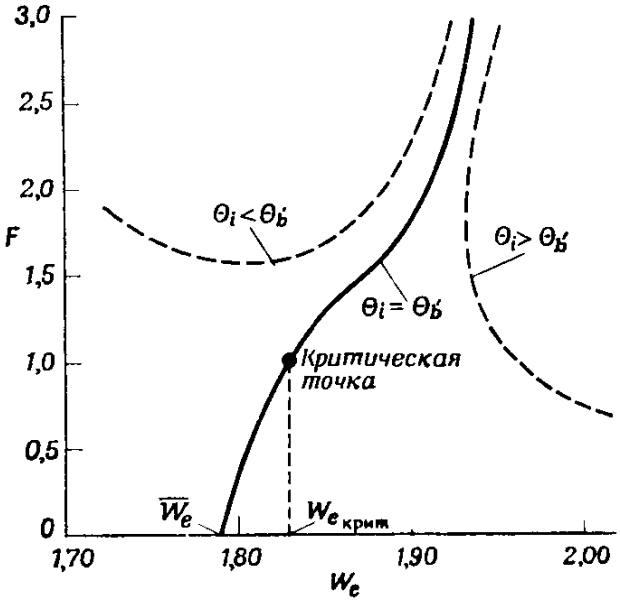
$$F - F_{\text{крит}} = \left(\frac{dF}{dW_e}\right)_{\text{крит}} (W_e - W_{e_{\text{крит}}}) + \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2F}{dW_e^2}\right)_{\text{крит}} (W_e - W_{e_{\text{крит}}})^2.$$

Значения $(dF/dW_e)_{\text{крит}}$ и $(d^2F/dW_e^2)_{\text{крит}}$ рассчитываются путем подстановки в уравнение (1) квадратичной зависимости $F(W_e)$. Вблизи критической точки возможно аналитическое представление зависимости $\varkappa = \varkappa(F)$ в виде

$$\varkappa = 0{,}92954 - 0{,}10382F - 0{,}36842F^2 + 0{,}44575F^3 + \\ + 0{,}09582F^4 - 0{,}09948F^5 + 0{,}04505F^6,$$

а вдали от критической точки, где интегральная кривая менее чувствительна к функции $\varkappa = \varkappa(F)$, можно использовать подходящую аппроксимацию в виде полинома с меньшим числом членов.

Численное интегрирование начинается как только точность численного расчета производной dF/dW_e из уравнения (1) становится удовлетворительной. Можно также начать интегрирование непосредственно за течением расширения у задней кромки методом проб и ошибок, принимая различные пробные значения Θ_i или W_{e_i}. Таким путем определяется величина Θ_i, при которой интегральная кривая проходит через критическую точку (фиг. 26).



Фиг. 26. Критическая точка, определяющая интегральную кривую, $\overline{M} = 3{,}0$, $\varkappa = 0{,}03$; турбулентное течение [10].

Кроме того, Крокко и Лиз [10] показали, что последний метод является единственно возможным для общего случая, когда k — функция от m и $\varkappa$, или для осесимметричных сверхзвуковых течений, когда зависимость между W_e и Θ заранее неизвестна. Теперь для расчета донного давления при интегрировании от критической точки в направлении к профилю строится зависимость $F(\varkappa)$ до тех пор, пока $\varkappa$ не станет равным $\varkappa_j$ свободной струи. В этой области уравнение

(1) заменяется уравнением

$$W_e \frac{dF}{dW_e} = -\left(\frac{\gamma+1}{2} W_e^2 - 1\right) - \frac{F}{1-\frac{1}{2}(\gamma+1) W_e^2} \times$$

$$\times \left[\gamma W_e^2 - \frac{\varkappa}{1-\varkappa} F + \frac{1-\frac{1}{2}(\gamma-1) W_e^2}{1-\varkappa} \frac{\Theta}{k}\right]. \qquad (2)$$

Граничное условие на задней кромке следующее:

$$\delta = \frac{d}{2} + d' \quad \text{или} \quad \delta/\delta_b = \frac{d}{2\delta_b} + \frac{d'}{\delta_b}, \qquad (3)$$

где d — толщина профиля, а величина d' заключена между δ_b (толщиной пограничного слоя у задней кромки) и $\delta_{b'}$ (толщиной области смешения свободной струи после изэнтропического расширения (фиг. 25).

Так как d'/δ_b — малая величина по сравнению с $d/2\delta_{b'}$, принимаем $d' = \delta_{b'}$.

Из уравнения для потока массы

$$\overline{m}_{b'} = (\rho_e u_e)_{b'} \delta_{b'} \{1 - (\delta^*/\delta)\}_{b'} = (\rho_e u_e)_b \delta_b \{1 - (\delta^*/\delta)\}_b \qquad (4)$$

или

$$\delta_b/\delta_{b'} = \frac{\{1-(\delta^*/\delta)\}_{b'}}{\{1-(\delta^*/\delta)\}_b} \frac{G(\mathrm{M}_{b'})}{G(\mathrm{M}_b)},$$

где

$$G(\mathrm{M}) = \mathrm{M}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{-1/2(\gamma+1)/(\gamma-1)}.$$

Уравнение (4) может быть представлено в функции только числа Маха, так как на основании теории Толмина для турбулентной изотермической струи, занимающей полупространство, при малой скорости и постоянном давлении величина $\{1 - (\delta^*/\delta)\}_{b'}$ принимается равной 0,45. Если принять, что пограничный слой турбулентный и распределение скоростей в нем следует закону $^1/_7$ степени, теплопередача на поверхности равна нулю и энтальпия торможения постоянна, то $\{1 - (\delta^*/\delta)\}_b$ будет иметь следующие значения:

M	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0
$\{1-(\delta^*/\delta)\}_b$	0,806	0,763	0,669	0,583	0,506

Если принять $m_b = m_{b'}$, то отношение δ/δ_b, входящее в граничное условие (3), выражается в функции $W_{e_{b'}}$ в виде

$$\frac{\delta}{\delta_b} = \frac{\left[\left\{1 + F - \frac{1}{2}(\gamma-1) W_e^2\right\} (\varkappa/pW_e)\right]_{b'}}{\left[\left\{1 + F - \frac{1}{2}(\gamma-1) W_e^2\right\} (\varkappa/pW_e)\right]_b}. \qquad (5)$$

Для численных расчетов $\varkappa_{b'}$ принимается равным 0,720. Таким образом, величины δ/δ_b и $\delta_{b'}/\delta_b$ определяются в функции $W_{e_{b'}}$ по результатам численного интегрирования уравнения (1) для $F(W_e)$, а также из уравнений (4) и (5). Так как для каждого значения $W_{e_{b'}}$ существует рассчитанная по уравнению (3) величина $\Theta_{b'}$, относительное донное давление

$$p_{b'}/\bar{p} = f(\Theta_{b'}, \overline{W}_e) \tag{6}$$

может быть вычислено в функции δ_b/d и коэффициента смешения k, причем $\bar{p}$ — давление на значительном удалении от тела, а $\overline{W}_e$ — приведенная скорость вдали от тела.

Чепмен [22] установил корреляцию значений донного давления за затупленной задней кромкой профиля с помощью величины $\delta_1/d - (\delta_1 - \delta_b)$. Так как

$$\frac{\delta_b}{d} = \frac{\delta_b}{c}\frac{c}{d} = \frac{c}{d}\, g\left(\mathrm{Re}_c, \overline{\mathrm{M}}, \mathrm{Pr}, \frac{T_W}{T_1}\right). \tag{7}$$

где c — хорда профиля, а T_1 — температура диссипативного течения, донное давление определяется как функция чисел Рейнольдса, Маха и Прандтля, а также тепловых условий на поверхности профиля, если известны значения числа Рейнольдса перехода пограничного слоя и коэффициента k в турбулентном следе. Крокко и Лиз [10] дали определение донного давления для двух случаев: турбулентного и переходного следов.

Турбулентный след — переход в пограничном слое на профиле. Исходя из определений

$$\bar{\delta} = \{\delta - \varkappa_j(\delta_j - \delta_j^*)\}/\delta_R \quad \text{и} \quad \bar{\delta}_R = 1 - \varkappa_j[1 - (\delta^*/\delta)_j],$$

найдем $\bar{\delta}/\bar{\delta}_R$ для полностью турбулентного следа в функции от Θ для любого $\overline{\mathrm{M}}$, так как

$$d\delta/dx = \Theta + k,$$

а для полностью турбулентного следа k может быть принято постоянным.

В приведенных выше опеределениях δ_R — значение δ в точке смыкания внешних потоков, где исчезает застойная зона и внешняя скорость u_e изменяется постепенно; δ_j — ширина струи или слоя смешения, а δ_j^* — толщина вытеснения, соответствующая распределению скорости и температуры по ширине слоя.

Так как у задней кромки

$$\delta = d/2 + \delta_{b'},$$

то

$$\bar{\delta}/\bar{\delta}_R = \left\langle \left(\frac{d}{2} + \delta_{b'}\right) \Big/ \left[\delta_R\{1 - \varkappa_j(1 - \delta^*/\delta)_j\}\right]\right\rangle - \\ - \{\varkappa_j[1 - (\delta^*/\delta)_j]\}/\{1 - \varkappa_j[1 - (\delta^*/\delta)_j]\}. \tag{8}$$

Для турбулентной изотермической струи, движущейся с малой скоростью,

$$\varkappa_j = 0{,}72 \text{ и } \{1 - (\delta^*/\delta)_j\} = 0{,}45.$$

Каждому значению

$$\left(\frac{d}{2} + \delta_{b'}\right) \Big/ \delta_R = (\delta_{b'}/\delta_R) \left\{1 + \left(\frac{d}{2\delta_b}\right)\left(\frac{\delta_b}{\delta_{b'}}\right)\right\}$$

соответствует некоторое значение $\bar{\delta}/\bar{\delta}_R$, определенное по уравнению (8), а следовательно, некоторое значение $\Theta_{b'}$ и, наконец, некоторое значение относительного донного давления $p_{b'}/\bar{p} = f(\Theta_{b'}, \bar{M})$. Если принять по определению

$$\bar{m}_R = (p_R/\varphi_{e_R})\, \delta_R \{1 - (\delta^*/\delta)_R\},$$

$$\bar{m}_{b'} = (p_{b'}/\varphi_{e_{b'}})\, \delta_{b'} \{1 - (\delta^*/\delta)_{b'}\},$$

где индексы R и b' относятся к сечениям, где δ равно δ_R и $\delta_{b'}$, то

$$\bar{m}_R/\bar{m}_{b'} = \{(p_R/\varphi_{e_R})\, \delta_R\}/\{(p_{b'}/\varphi_{e_{b'}})\delta_{b'}\}, \tag{9}$$

причем φ_e задается выражением

$$\varphi_e = (T_e/T_s)\left(\frac{1}{\gamma W_e}\right) = \langle[1 - \{(\gamma - 1)/2\}\, W_e^2]/\gamma W_e\rangle.$$

Уравнение (9) получено при допущении, что

$$1 - (\delta^*/\delta)_{b'} = 1 - (\delta^*/\delta)_R = 1 - (\delta^*/\delta)_j = \text{const}.$$

Так как скорость смешения

$$d\bar{m}/dx = k\,(p/\varphi_e), \tag{10}$$

то после интегрирования уравнения (10) и последующего деления на $\bar{m}_{b'}$ получим

$$\frac{\bar{m}_R}{\bar{m}_{b'}} = 1 + \frac{k}{\bar{m}_{b'}} \int\limits_{x_{b'}}^{x} \frac{p}{\varphi_e}\, dx = 1 + \frac{k}{\bar{m}_{b'}} \int\limits_{\Theta_{b'}}^{\Theta_R} \frac{p}{\varphi_e} \frac{(d\delta/d\Theta)}{(d\delta/dx)}\, d\Theta,$$

где x — координата, параллельная поверхности, или

$$\frac{\bar{m}_R}{\bar{m}_{b'}} = 1 + \frac{p_R/\varphi_{e_R}}{p_{b'}/\varphi_{e_{b'}}} \frac{\delta_R}{\delta_{b'}} \left\{\frac{1}{\{1 - (\delta^*/\delta)_j\}} - \varkappa_j\right\} \frac{1}{1 - \varkappa_j} D,$$

где

$$D = \int\limits_{\Theta_b}^{\Theta_R} \left(\frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta}_R}\right) \frac{p/\varphi_e}{(p_R/\varphi_{e_R})} \frac{d\Theta}{\sqrt{M^2 - 1}}. \tag{11}$$

Из уравнений (9) и (11) следует

$$\frac{\delta_R}{\delta_{b'}}\left\langle 1-\left[\frac{1}{\{1-(\delta^*/\delta)_j\}}-\varkappa_j\right]\frac{D}{1-\varkappa_j}\right\rangle=\frac{p_{b'}/\varphi_{e_{b'}}}{p_R/\varphi_{e_R}}. \tag{12}$$

Для полностью турбулентного следа интеграл D является функцией только от $\Theta_{b'}$ для всех M_∞. Таким образом, донное давление можно определить из уравнения (12).

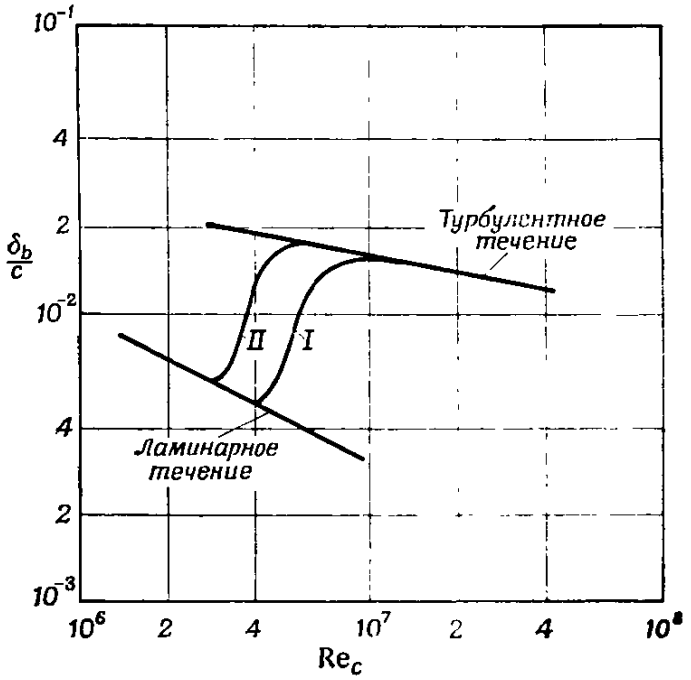
Переход в следе — пограничный слой на профиле ламинарный. Число Рейнольдса перехода принято известным. Оно зависит в значительной мере от предшествующего развития ламинарных пульсаций и от расширения следа. Точное значение числа Рейнольдса перехода неизвестно, но, согласно имеющимся ограниченным данным,

$$\mathrm{Re}_{\text{перех след}} = 4\cdot 10^5 - (\mathrm{Re}_c/10)$$

или (13)

$$\mathrm{Re}_{\text{перех след}} = 3\cdot 10^5 - (\mathrm{Re}_c/10)$$

в зависимости от того, при каких числах Рейнольдса (меньших или больших) происходит переход (фиг. 27). Если число Маха



Фиг. 27. Толщина пограничного слоя в зависимости от числа Рейнольдса, $M_\infty = 3$ [10].

I и II — две принятые переходные кривые.

задано, донное давление рассчитывается в функции числа Рейнольдса методом итераций. Методика расчета здесь описывается вкратце, более подробное ее описание приведено в статье Крокко и Лиза [10]. Предполагается, что c/d задано. Выбирается ряд пробных значений величины углов отклонения потока в точке

перехода $\Theta_{перех}$ для некоторых значений Re_c. Затем устанавливается соотношение между $\bar{\delta}/\bar{\delta}_R$ и Θ, требуемое в соответствии с граничным условием (8), с помощью следующего уравнения:

$$\bar{\delta}/\bar{\delta}_R = e^{\{1/(1-\varkappa_j)\} I(\Theta,\, \Theta_R)},$$

где

$$I(\Theta,\, \Theta_R) = \int\limits_{\Theta_R}^{\Theta} \frac{(\Theta/k)+1}{\sqrt{M^2-1}}\, d\Theta$$

или

$$I(\Theta,\, \Theta_R) = \frac{1}{k_{лам}} \{J(M) - J(M_{перех})\} +$$

$$+ \frac{1}{k_{турб}} \{J(M_{перех}) - J(M_R)\} -$$

$$- \bar{\nu} \left(\frac{1}{k_{турб}} \ln \frac{W_{e\,перех}}{W_{eR}} + \frac{1}{k_{лам}} \ln \frac{W_e}{W_{e\,перех}} \right) - \ln \frac{W_e}{W_{eR}},$$

где функция

$$J(M) = \int\limits_1^M \frac{\nu\, dM}{M\,[1 + \{(\gamma-1)/2\}\, M^2]}$$

табулирована и представлена графически в функции числа Маха (табл. 1 и фиг. 28).

Таблица 1

M	J (M)	M	J (M)	M	J (M)	M	J (M)
1,0	0	2,0	0,08305	2,7	0,16989	3,4	0,24091
1,4	0,01587	2,1	0,09588	2,8	0,18118	3,5	0,24955
1,5	0,02461	2,2	0,10872	2,9	0,19209	3,6	0,25783
1,6	0,03486	2,3	0,12144	3,0	0,20262	3,7	0,26577
1,7	0,04604	2,4	0,13397	3,1	0,21277	3,8	0,27338
1,8	0,05795	2,5	0,14626	3,2	0,22253	3,9	0,28067
1,9	0,07035	2,6	0,15824	3,3	0,23191	4,0	0,28766

Характеристическое соотношение выражается в виде $\Theta = \bar{\nu} - \nu$, причем характерная угловая переменная плоского изэнтропического течения имеет вид

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\, \mathrm{arctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\, \sqrt{M^2-1} \right) - \mathrm{arctg}\, \sqrt{M^2-1},$$

где $\bar{\nu}$ — значение величины ν на большом расстоянии от тела.

Для расчета $I(\Theta, \Theta_R)$ должна быть известна величина $k_{лам}$, которая может быть принята равной коэффициенту смешения в ламинарном пограничном слое непосредственно у задней кромки профиля,

$$k_{лам} = \frac{c_{f_0}/2}{1-\varkappa_0} = \frac{g(\mathrm{M})}{\sqrt{\mathrm{Re}_c}} \frac{0{,}332}{1-\varkappa_0},$$

где $\varkappa_0 = 0{,}827$, а значения $g(\mathrm{M})$ следующие [29]:

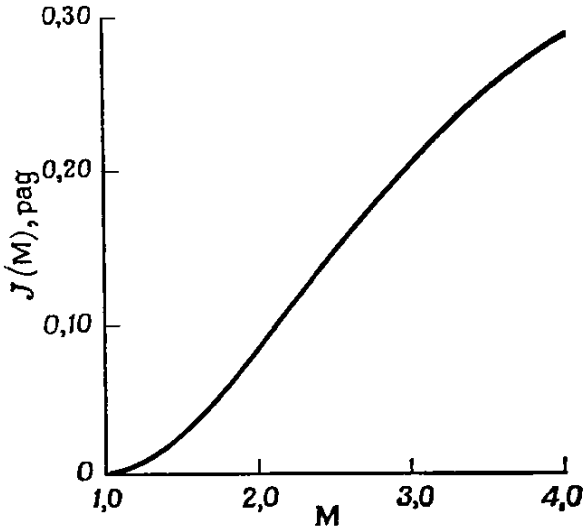
M	1,55	2,0	3,0	4,0	5,0
$g(\mathrm{M})$	0,98	0,95	0,91	0,87	0,81

Правая часть уравнения (8) вычисляется с помощью уравнений (12) и (4) в функции от Θ. Величина $\{1-(\delta^*/\delta)\}_b$ для ламинарного пограничного слоя без теплообмена на поверхности профиля задается в виде

$$3{,}87/\{5{,}60 + 1{,}20\,(\gamma-1)\,\mathrm{M}_b^2\}.$$

Величина $\{1-(\delta^*/\delta)_{b'}\}^2$ принимается равной 0,45, как для полностью турбулентной струи. Для заданных c/d и Re_c рассчитывается величина $\delta_b/d = (\delta_b/c)\,(c/d)$,

$$\frac{\delta_b}{c} = \{5{,}60 + 1{,}20\,(\gamma-1)\,\mathrm{M}_b^2\}/\sqrt{\mathrm{Re}_c}.$$



Фиг. 28. Функция $J(\mathrm{M})$ [10].

Правильное значение Θ_b для выбранных пробных значений $\Theta_{перех}$ находится по пересечению кривой $\bar\delta/\bar\delta_R$ с кривой, соответствующей правой части уравнения (8), представленной в функции Θ. Тогда положение l точки перехода в следе за задней кромкой определяется в виде

$$\frac{l}{\bar\delta_R} = \frac{\bar x_{b'} - \bar x_{перех}}{\bar\delta_R} = \int\limits_{(\bar\delta/\bar\delta_R)_{перех}}^{\bar\delta_{b'}/\bar\delta_R} \frac{1}{\Theta + k_{лам}}\, d\left(\frac{\bar\delta}{\bar\delta_R}\right),$$

где $\bar x = x/\delta_R$, $l = \bar x_{b'} - \bar x_{перех}$, и соответствующая величина $\mathrm{Re}_{перех\,след}$ рассчитывается по формуле

$$\mathrm{Re}_{перех\,след} = \frac{l}{c}\,\mathrm{Re}_c \left(\frac{p_{перех}}{\bar p}\right)^n \frac{\mathrm{M}_{перех}}{\bar{\mathrm{M}}} \qquad (14)$$

где

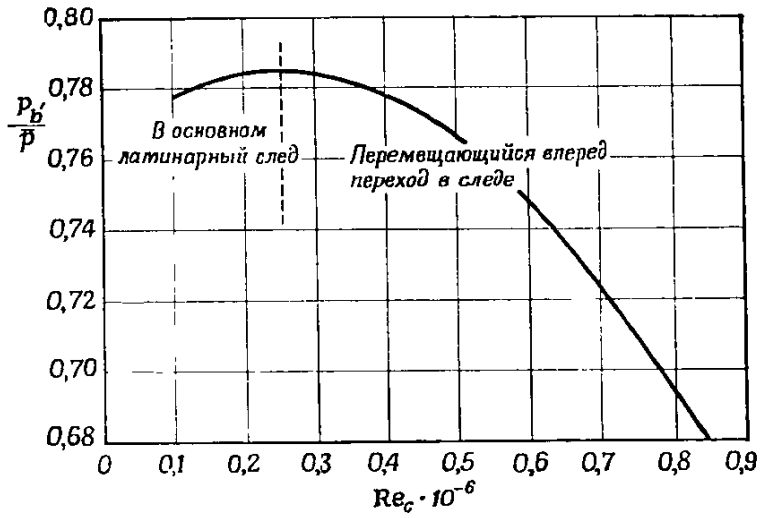
$$n = \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - m_1\right),$$

если $\mu \sim T^{m_1}$ и

$$\frac{l}{c} = \frac{l}{\delta_R}\{1-\varkappa_j[1-(\delta^*/\delta)_j]\}\,\frac{\delta_R}{\delta_{b'}}\,\frac{\delta_{b'}}{\delta_b}\,\frac{\delta_b}{c}.$$

Для воздуха $\gamma = 1{,}40$, $m_1 = 0{,}76$, следовательно, $n = 0{,}64$.

Поскольку, как правило, значение $\mathrm{Re}_{\text{перех след}}$, вычисленное по уравнению (14), не должно совпадать с принятым значением (13), расчет следует повторить для трех или четырех пробных зна-

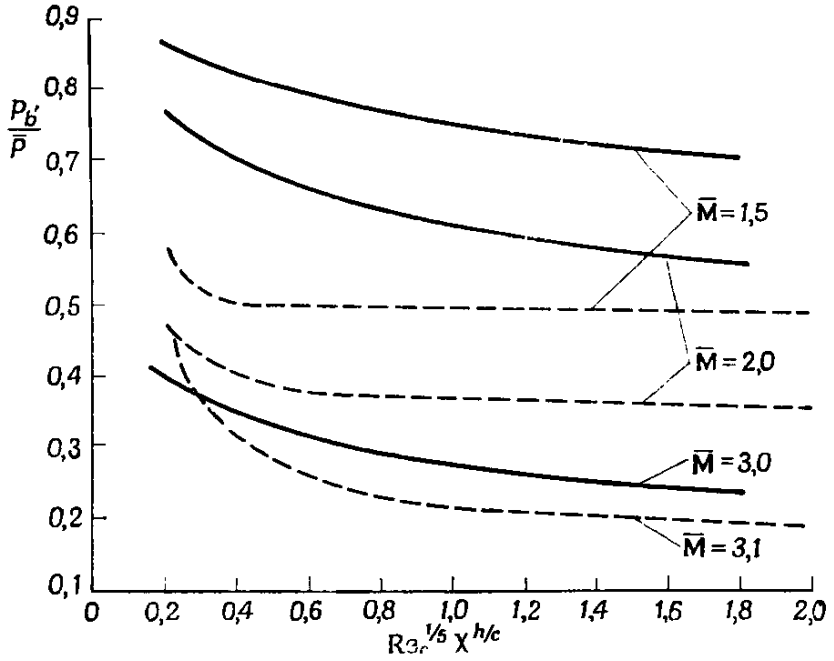


Фиг. 29. Донное давление в зависимости от Re_c в области малых чисел Рейнольдса [10].
$M_\infty = 2{,}0$, $k_t = 0{,}03$, $c/d = 10$.

чений $\Theta_{\text{перех}}$, чтобы определить с достаточной точностью истинное значение $\mathrm{Re}_{\text{перех след}}$ и с помощью интерполяции — донное давление. Расчет повторяется для нескольких характерных значений Re_c, но после приобретения некоторого опыта достаточно лишь нескольких проб.

Крокко и Лиз установили, что донное давление и δ_b/d достигают больших значений, если при заданных числах Рейнольдса и Маха отношение хорды к толщине задней кромки велико. Сравним результаты расчетов по теории Крокко — Лиза с экспериментальными данными Каванау [15] и Чепмена [22]. На фиг. 29 приведено донное давление в функции числа Рейнольдса в области малых чисел Рейнольдса при $M_\infty = 2{,}0$, $k_t = 0{,}03$ и $c/d = 10$. Эти зависимости очень близки к экспериментальным кривым Каванау для области умеренных чисел Рейнольдса и определенные по ним значения относительного донного давления почти оди-

наковы, хотя соответствующие значения Re_c на фиг. 29 немного больше полученных Каванау. На фиг. 30 представлены коэффициенты донного давления в области полностью развитой турбулентности для $M_\infty = 1{,}5$, 2,0 и 3,0, рассчитанные по теории Крокко — Лиза и по результатам измерений Чепмена [22]. Экспериментальные кривые представляют собой осредненные кривые для всей серии толщин профилей. Относительные толщины составляли 0,05, 0,075, 0,10, а отношения толщины задней кромки профиля к максимальной его толщине—0,25, 0,50 и 1,0. Таким образом, отношение



Фиг. 30. Донное давление в полностью турбулентной области [10].
— — — данные Чепмена [22], ——— упрощенная теория [10], $\varkappa = 0{,}03$.

c/d составляло от 10,0 до 8,0. Несмотря на приближенный и скорее качественный характер теории Крокко — Лиза, соответствие между результатами расчета по этой теории и экспериментальными данными вполне удовлетворительное.

4.2. ТЕОРИЯ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ КОРСТА

Как и в теории Крокко — Лиза, Корстом [30] использована концепция взаимодействия между диссипативным вязким течением и прилежащим к нему невозмущенным потоком. Предложенная им схема двумерного течения представлена на фиг. 31.

Основные особенности модели течения Корста [30] следующие: поток, набегающий на донную часть вдоль двумерной поверхности, является звуковым или сверхзвуковым и остается сверхзвуковым после отрыва от угла. Образуются четыре области течения:

где

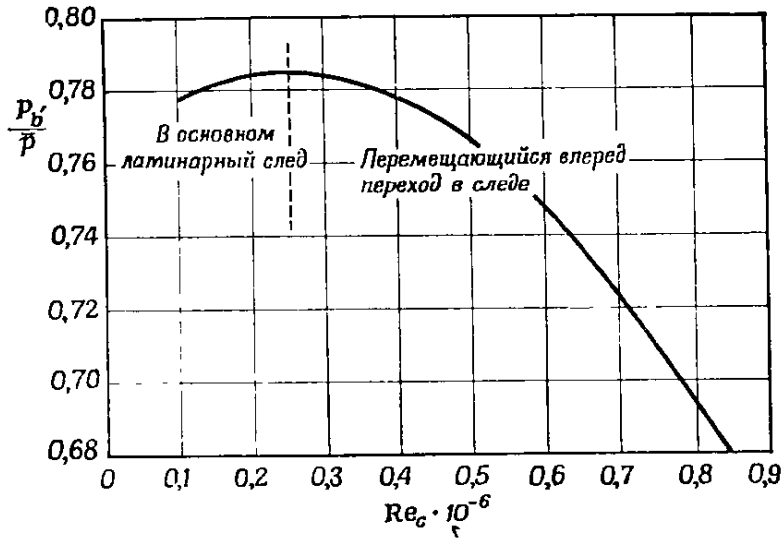
$$n = \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - m_1\right),$$

если $\mu \sim T^{m_1}$ и

$$\frac{l}{c} = \frac{l}{\delta_R}\{1-\varkappa_j[1-(\delta^*/\delta)_j]\}\,\frac{\delta_R}{\delta_{b'}}\,\frac{\delta_{b'}}{\delta_b}\,\frac{\delta_b}{c}.$$

Для воздуха $\gamma = 1{,}40$, $m_1 = 0{,}76$, следовательно, $n = 0{,}64$.

Поскольку, как правило, значение $\mathrm{Re}_{\text{перех след}}$, вычисленное по уравнению (14), не должно совпадать с принятым значением (13), расчет следует повторить для трех или четырех пробных зна-

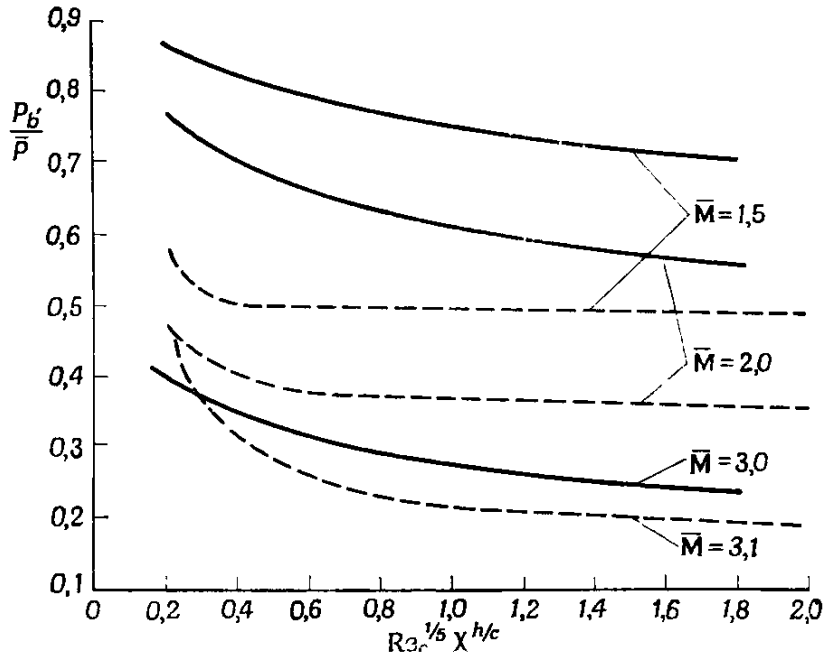


Фиг. 29. Донное давление в зависимости от Re_c в области малых чисел Рейнольдса [10].
$M_\infty = 2{,}0$, $k_t = 0{,}03$, $c/d = 10$.

чений $\Theta_{\text{перех}}$, чтобы определить с достаточной точностью истинное значение $\mathrm{Re}_{\text{перех след}}$ и с помощью интерполяции — донное давление. Расчет повторяется для нескольких характерных значений Re_c, но после приобретения некоторого опыта достаточно лишь нескольких проб.

Крокко и Лиз установили, что донное давление и δ_b/d достигают больших значений, если при заданных числах Рейнольдса и Маха отношение хорды к толщине задней кромки велико. Сравним результаты расчетов по теории Крокко — Лиза с экспериментальными данными Каванау [15] и Чепмена [22]. На фиг. 29 приведено донное давление в функции числа Рейнольдса в области малых чисел Рейнольдса при $M_\infty = 2{,}0$, $k_t = 0{,}03$ и $c/d = 10$. Эти зависимости очень близки к экспериментальным кривым Каванау для области умеренных чисел Рейнольдса и определенные по ним значения относительного донного давления почти оди-

наковы, хотя соответствующие значения Re_c на фиг. 29 немного больше полученных Каванау. На фиг. 30 представлены коэффициенты донного давления в области полностью развитой турбулентности для $M_\infty = 1{,}5$, 2,0 и 3,0, рассчитанные по теории Крокко — Лиза и по результатам измерений Чепмена [22]. Экспериментальные кривые представляют собой осредненные кривые для всей серии толщин профилей. Относительные толщины составляли 0,05, 0,075, 0,10, а отношения толщины задней кромки профиля к максимальной его толщине—0,25, 0,50 и 1,0. Таким образом, отношение



Фиг. 30. Донное давление в полностью турбулентной области [10].
— — — данные Чепмена [22], ——— упрощенная теория [10], $\varkappa = 0{,}03$.

c/d составляло от 10,0 до 8,0. Несмотря на приближенный и скорее качественный характер теории Крокко — Лиза, соответствие между результатами расчета по этой теории и экспериментальными данными вполне удовлетворительное.

4.2. ТЕОРИЯ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ КОРСТА

Как и в теории Крокко — Лиза, Корстом [30] использована концепция взаимодействия между диссипативным вязким течением и прилежащим к нему невозмущенным потоком. Предложенная им схема двумерного течения представлена на фиг. 31.

Основные особенности модели течения Корста [30] следующие: поток, набегающий на донную часть вдоль двумерной поверхности, является звуковым или сверхзвуковым и остается сверхзвуковым после отрыва от угла. Образуются четыре области течения:

ортогональная обобщенная криволинейная система координат (X, Y), связанная с границей соответствующей невязкой струи. Эта невязкая струя определяется как некая гипотетическая струя без трения, движущаяся со скоростью M_{1a} и расширяющаяся при том же отношении давлений p_2/p_1 и тех же геометрических параметрах физических границ $\sum\limits_n (l_i/L)$, что и действительная вязкая струя, где L — характерная длина. Угловое отклонение исходной системы координат от направления однородного течения в сечении 1 равно

$$\Lambda\Theta_a = \Theta_a - \Theta_{1a} = \Delta\Theta_a \left(M_{1a},\ p_2/p_1,\ \sum \frac{l_i}{L}\right). \tag{21}$$

Поточная система координат (X, Y) смещена относительно исходной в направлении Y, но если угол между системами координат (x, y) и (X, Y) мал, то $X \approx x$, $Y = y - y_{m'}(x)$, причем $y_{m'}(0) = 0$, где индекс m' означает смещение координат, определяемое величиной интеграла количества движения.

Основанная на упрощенном уравнении движения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{u_{2a}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

где ε — коэффициент турбулентной вязкости, теория смешения строится с помощью интеграла количества движения.

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\varphi = u/u_{2a}, \quad \psi = x/\delta_2, \quad \zeta = y/\delta_2,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\sigma^2} \psi\delta_2 u_{2a} f(\psi), \tag{22}$$

где σ — параметр подобия, соответствующий автомодельной переменной y/x, δ — толщина пограничного слоя, а $f(\psi) \to 1$ при $\psi \to \infty$. Тогда с помощью преобразования

$$\xi = \frac{1}{2\sigma^2} \int\limits_0^{\psi} \psi f(\psi)\, d(\psi) \tag{23}$$

смешение описывается уравнением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}
&\varphi(0, \zeta) = 0 && \text{при } -\infty < \zeta < 0,\\
&\varphi(0, \zeta) = \varphi_2(\zeta) && \text{при } 0 < \zeta < 1,\\
&\varphi(0, \zeta) = 1 && \text{при } 1 < \zeta < +\infty,\\
&\varphi(\xi, -\infty) \to 0 && \text{при } \xi > 0,\\
&\varphi(\xi, +\infty) \to 1 && \text{при } \xi > 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Приближенное решение дифференциального уравнения в поточной системе координат, которое удовлетворяет начальным и граничным условиям, имеет вид

$$\varphi = \varphi\{\varphi_2(\zeta),\ \eta_P;\ \eta\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{1 + \operatorname{erf}(\eta - \eta_P)\} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\eta-\eta_P}^{\eta} \varphi_2\left(\frac{\eta-\beta}{\eta_P}\right) e^{-\beta^2} d\beta, \tag{25}$$

где η_P — параметр положения

$$\eta_P = 1/(2\sqrt{\xi}) \tag{26}$$

или

$$\eta = \zeta\eta_P, \tag{27}$$

а β — переменная интегрирования.

Интеграл количества движения определяет положение поточной системы координат относительно исходной. Ограничиваясь рассмотрением адиабатического отрывного режима течения, для изоэнергетических условий в области смешения имеем

$$\frac{T_s}{Tsa} = 1,$$

где T_s — температура торможения. Смещение поточной системы относительно исходной, определяемое интегралом количества движения $\eta_{m'} = y_{m'}\eta_P/\delta_2$, задается в виде

$$\eta_{m'} = \eta_{m'}\{\varphi_2(\zeta),\ \eta_P,\ C_{2a}\} =$$

$$= \eta_R - \eta_P + (1 - C_{2a}^2)\left(\eta_P \int\limits_0^1 \frac{\varphi_2^2\, d\zeta}{1 - C_{2a}^2\varphi_2^2} - \int\limits_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\varphi^2\, d\eta}{1 - C_{2a}^2\varphi^2}\right), \tag{28}$$

где $C = u/u_{\text{макс}}$ — безразмерная скорость, заменяющая число Маха

$$C = \left\{1 + \frac{2}{(\gamma - 1)\,\mathrm{M}^2}\right\}^{-1/2}, \tag{28a}$$

а η_R — исходная величина, выбранная достаточно большой, так что

$$1 - \varphi\ \{\varphi_2(\zeta),\ \eta_P,\ \eta_R\ \} < t,$$

где t — малая величина.

Положение η_s линии тока s определяется из уравнения неразрывности с помощью зависимости

$$\int\limits_{\eta_s}^{\eta_R} \frac{\varphi\, d\eta}{1 - C_{2a}^2\varphi^2} + \frac{\eta_P G_s}{\delta_2\rho_{2a}u_{2a}(1 - C_{2a}^2)} =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\varphi^2\, d\eta}{1-C_{2a}^2\varphi^2} + \eta_P \int_0^1 \frac{\varphi_2(1-\varphi_2)\, d\zeta}{1-C_{2a}^2\varphi_2^2}, \tag{29}$$

где

$$G_s = \int_{y_j}^{y_s} \rho u\, dy, \tag{30}$$

а скорость вдоль линии тока может быть рассчитана по уравнению (25). Граничная линия тока j струи, соответствующая положению η_j и отделяющая набегающую жидкость от жидкости в застойной зоне, определяется из условия $G_s = 0$. Таким образом,

$$\int_{\eta_j}^{\eta_R} \frac{\varphi\, d\eta}{1-C_{2a}^2\varphi^2} = \int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\varphi^2\, d\eta}{1-C_{2a}^2\varphi^2} + \eta_P \int_0^1 \frac{\varphi_2(1-\varphi_2)\, d\zeta}{1-C_{2a}^2\varphi^2}. \tag{31}$$

IV. Возрастание давления в области повторного сжатия в конце отрывной области течения определяется примыкающим внешним течением в соответствии с допущением I, а сжатие во внешнем потоке — плоским косым скачком между областями 3 и 4. Таким образом, если заданы условия в набегающем внешнем потоке, а для расчета угла отклонения $(\Theta_{3a} - \Theta_{4a})$ используется соотношение

$$\frac{p_4}{p_3} = \frac{p_4}{p_3}(M_{2a},\ \Theta_{3a} - \Theta_{4a}), \tag{32}$$

то можно вычислить статическое давление в диссипативной области за скачком.

V. В отрывной области масса должна сохраняться. Упомянутое выше условие смыкания линий тока получается из условия сохранения массы в отрывной зоне и применяется к линии тока d (с безразмерной координатой η_d внутри зоны смешения), которая приходит в критическую точку области замыкания. На этой линии тока уровень механической энергии выражается через давление торможения p_{s3d} в поперечном сечении, так что вдоль нее повторное сжатие происходит при полном преобразовании кинетической энергии до статического давления p_4 в поперечном сечении 4, т.е.

$$\frac{p_{s\,3d}}{p_3} = \frac{p_4}{p_3}. \tag{33}$$

Отношение p_4/p_3 можно определить, если известны условия в набегающем внешнем потоке и определен угол отклонения $(\Theta_{3a} - \Theta_{4a})$. Из условия адиабатичности потока левая часть уравнения (33) задается в виде

$$\frac{p_{s\,3d}}{p_3} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{3d}^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \tag{34}$$

Это условие смыкания, которому удовлетворяет линия тока d, если жидкость вдоль линий тока, имеющих $p_{s3}/p_4 < 1$, не может проникать в область p_4, а жидкость вдоль линий тока, имеющих $p_{s3}/p_4 > 1$, проходит через область повторного сжатия. Корст [30] называет след «открытым», когда в отрывную зону подводится дополнительная масса G_b (масса на единицу ширины, поступающая в след извне за единицу времени) либо путем вдува, либо за счет возвратного течения из области высокого давления за зоной повторного сжатия. Условие сохранения массы в следе

$$G_b + G_s = 0, \tag{35}$$

где G_s — масса на единицу ширины, протекающая за единицу времени между линией тока, ограничивающей струю, и линией тока s.

Кроме того,

$$\frac{p_{s\,3s}}{p_{s\,3d}} = \frac{p_{s\,3s}}{p_4} = 1. \tag{36}$$

Корст [30] называет след «замкнутым», если G_b и G_s равны нулю и

$$\frac{p_{s\,3j}}{p_s} = \frac{p_{s\,3j}}{p_4} = 1, \tag{37}$$

где индекс j относится к условиям вдоль линии тока, ограничивающей струю. Так как в диссипативной области вблизи замыкающего скачка возможно обратное течение, то, строго говоря, замкнутого следа не существует. Но такой идеализированный замкнутый след может быть использован в практических расчетах.

Принципиально система уравнений, соответствующая допущениям I — V, достаточна для решения задачи донного давления. Однако для соотношений (18) и (19) точного решения не получено. Если набегающий пограничный слой тонок, т. е. $\eta_P \to 0$, оба эти соотношения полностью исключаются и не требуется никаких экспериментальных данных о смешивающихся компонентах в замкнутом следе, тогда как для открытого следа требуется знать только один эмпирический коэффициент. Отметим, что, если $\varphi(\eta_P > 0;\ \eta_j) < \varphi(\eta_P = 0,\ \eta_j)$, ограниченная теория донного давления ($\eta_P = 0$) устанавливает нижний предел для значений донного давления, получаемых при конечной толщине набегающего пограничного слоя.

4.2.1. Донное давление по ограниченной теории при тонком пограничном слое перед донным срезом

Принимая $\eta_P \to 0$, из уравнений (25), (28) — (30) получаем

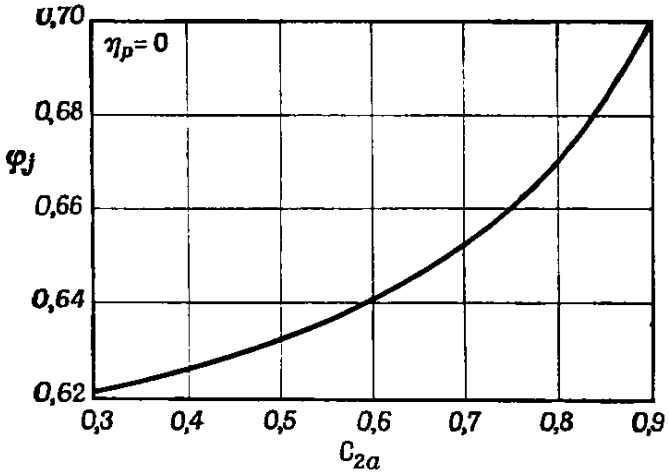
$$\varphi = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}\eta), \tag{38}$$

где $\eta = \sigma\,(y/x)$,

$$\eta_{m'} = \eta_R - (1 - C_{2a}^2) \int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\varphi^2\, d\eta}{1 - C_{2a}^2 \varphi^2}, \tag{39}$$

$$\int_{\eta_s}^{\eta_R} \frac{\varphi\, d\eta}{1 - C_{2a}^2 \varphi^2} + \frac{\sigma G_s}{x \rho_{2a} u_{2a} (1 - C_{2a}^2)} = \int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\varphi^2\, d\eta}{1 - C_{2a}^2 \varphi^2}, \tag{40}$$

$$\int_{\eta_j}^{\eta_R} \frac{\varphi\, d\eta}{1 - C_{2a}^2 \varphi^2} = \int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\varphi^2\, d\eta}{1 - C_{2a}^2 \varphi^2}. \tag{41}$$



Фиг. 33. Безразмерная скорость вдоль линии тока, ограничивающей струю, ($\eta_P \to 0$) [30].

При

$$\int_{-\infty}^{\eta} \frac{\varphi\, d\eta}{1 - C_{2a}^2 \varphi^2} = I_1 (C_{2a}, \eta)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\eta} \frac{\varphi^2\, d\eta}{1 - C_{2a}^2 \varphi^2} = I_2 (C_{2a}, \eta)$$

уравнение (38) табулировано в функции от верхнего предела для двадцати одного значения параметра C_{2a} наряду со значениями $\eta_{m'}(C_{2a})$, $\eta_j(C_{2a})$ и $\varphi_j(C_{2a})$ [33]. Графически функция $\varphi_j(C_{2a})$ представлена на фиг. 33. Корст [30] применял свою теорию как к замкнутому, так и к открытому следам.

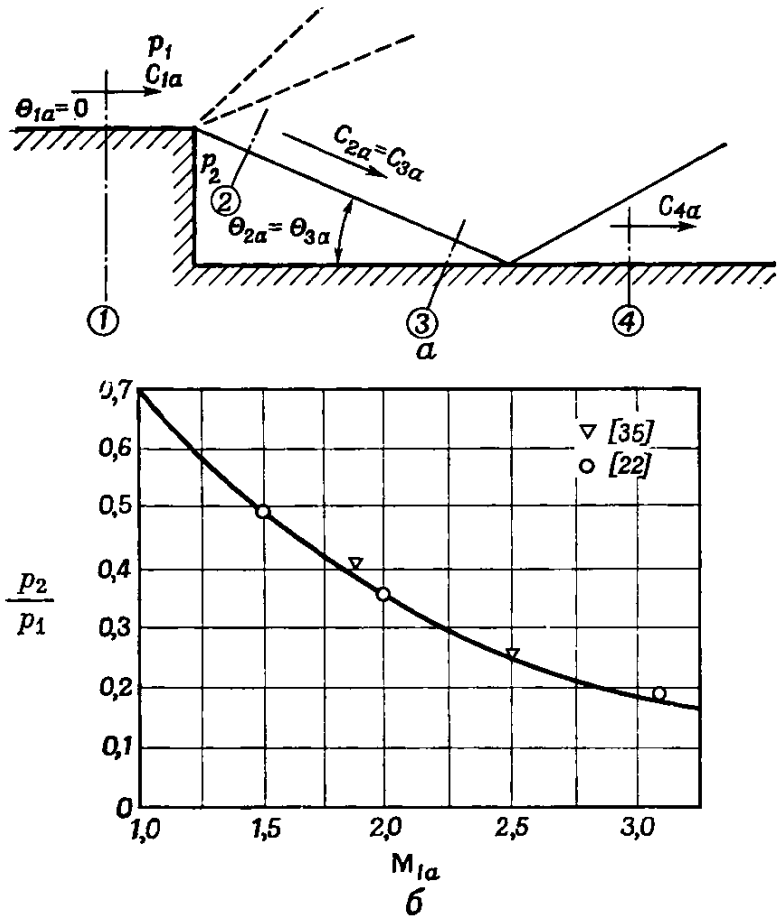
Замкнутый след

Схема течения в замкнутом следе представлена на фиг. 34, *а*. Для заданной геометрии модели и числа Маха набегающего потока донное давление в замкнутом следе определяется единственным образом из условия $G_b = G_s = 0$. Если в качестве независимой переменной выбрано M_{2a}, можно избежать решения методом проб и ошибок. При таком выборе для заданного угла отклонения $\Theta_{3a} - \Theta_{4a}$ определяются значения C_{2a} [уравнение (28а)], φ_j (фиг. 33) и вычисляется $p_{s\,3j}/p_3 = p_4/p_3$ по уравнению (32). Тогда для прямолинейной границы струи $\Theta_{2a} = \Theta_{3a}$ и, следовательно,

$$\Theta_{2a} - \Theta_{1a} = \Theta_{3a} - \Theta_{4a}.$$

Число Маха M_{1a} можно найти из решения для течения расширения Прандтля — Майера [уравнение (17)], p_2/p_1 определяется с помощью формулы для давления при адиабатическом расширении. Результаты расчета по ограниченной теории Корста сравниваются

на фиг. 34, *б* с экспериментальными данными по донному давлению Чепмена [22] и Эгинка [34]. Получено хорошее соответствие.



Фиг. 34. Сверхзвуковое обтекание уступа, расположенного по потоку [30]. *а* — модель течения; *б* — сравнение теории и эксперимента; p_2/p_1 — относительное донное давление; M_{1a} — число Маха набегающего потока.

При более высоких числах Маха (до $M_\infty = 3{,}0$) теоретические результаты Корста [30] также хорошо согласуются с экспериментальными данными Гойна [35].

Открытый след

Для открытого следа $G_b \neq 0$ и $\eta_d \neq \eta_j$, и чтобы рассчитать донное давление, необходима информация об эмпирической величине σ. Так как такая информация в области сжимаемого течения ограничена, для численных расчетов принимается величина $\sigma = 12$, достаточно точно установленная при малых скоростях ($M_\infty \to 0$) [36].

В качестве примера открытого следа Корст [30] выбрал модель со вдувом в след (фиг. 35, *а*). Вдуваемый воздух имеет ту же температуру торможения, что и основной поток, и подводится

в след с малым расходом G_b. Безразмерное число H, характеризующее вдув, определяется по формуле

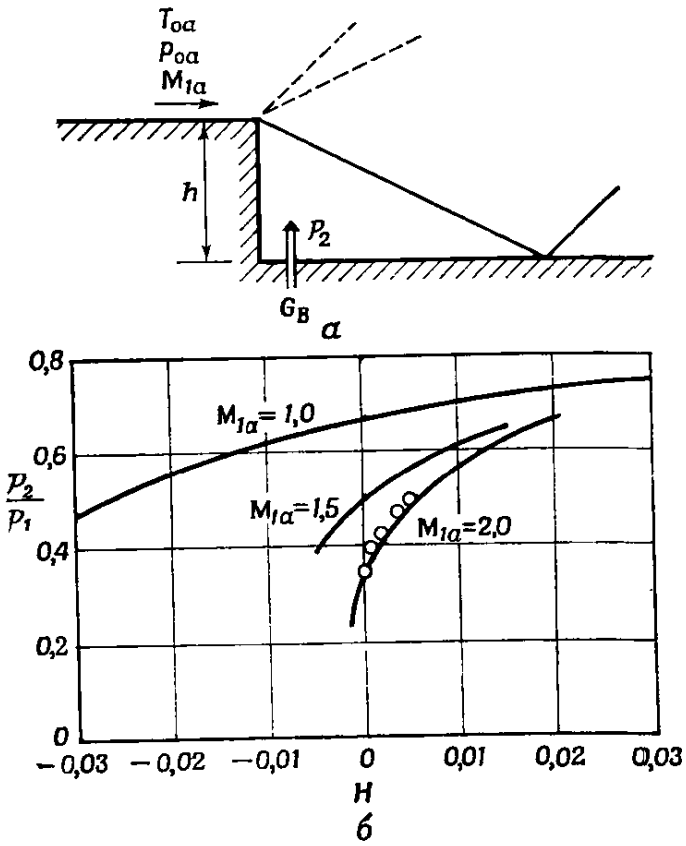
$$H = \frac{G_b \sqrt{T_{s\,a}}}{h p_{s\,a}} \sqrt{\frac{R}{g\gamma}},$$

где R — газовая постоянная, g — ускорение силы тяжести и h — высота уступа. Таким образом,

$$H = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/\{2(\gamma-1)\}} \frac{\{I_1(C_{2a}, \eta_j) - I_1(C_{2a}, \eta_s)\}}{(T_{s\,a}/T_{2a})(A_{2a}/A_a^*)\,\sigma \sin(\Theta_{2a} - \Theta_{1a})},$$

где A^* относится к условиям при $M = 1$.

Как видно из фиг. 35, *б*, теоретические результаты Корста хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными



Фиг. 35. Сверхзвуковое обтекание уступа, расположенного по потоку, со вдувом в след [30].

а — схема течения; *б* — влияние вдува массы; расчет при M_{1a} = 1,0, 1,5 и 2,0 и экспериментальные данные при M_{1a} = 2,0.

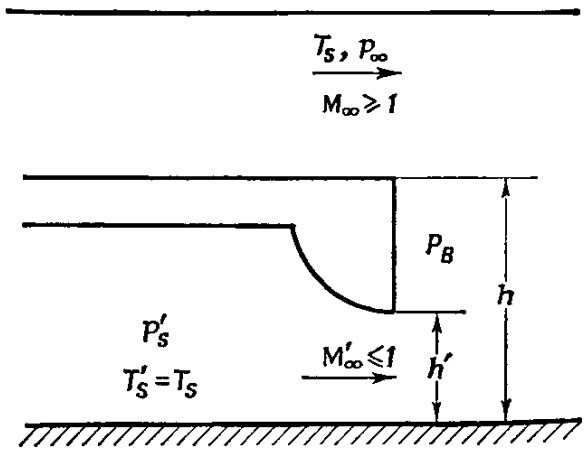
в Иллинойсском университете при $M_{1a} = 2{,}0$. Чтобы лучше понять теорию Корста [30], рассмотрим ее приложение.

Чоу [37] применил теорию Корста [30] к задаче о двумерном донном следе, связанной либо со вдувом в след за затупленной задней кромкой профиля, либо с взаимодействием между внешним сверхзвуковым или звуковым течением со звуковой или дозвуковой струей реактивного двигателя.

4.2.2. Донное давление при взаимодействии внешнего сверхзвукового потока со звуковой или дозвуковой струей

Схема течения Чоу [37] представлена на фиг. 36.

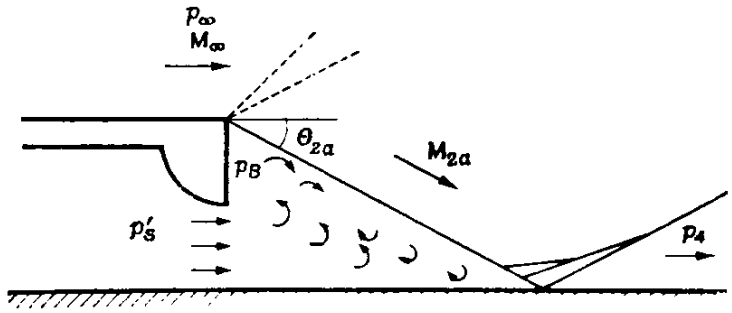
Сверхзвуковой поток, обтекающий струю, течет в верхней части, а дозвуковой вдуваемый — в нижней. Чоу [37] принял те же допущения, что и Корст, а именно: турбулентное изоэнергетическое смешение потока и заторможенной жидкости в области отрыва происходит при постоянном давлении. Он использовал ограниченную теорию Корста и сравнил теоретические результаты с экспериментальными данными для трех режимов (фиг. 37—39), как показано на фиг. 40.



Фиг. 36. Схема двумерного течения [37].

Режим I соответствует $p'_s/p_\infty \leqslant 1$; режим II соответствует $1 < p'_s/p_\infty < \sim 2{,}35$; режим III соответствует $p'_s/p_\infty > \sim 2{,}35$.

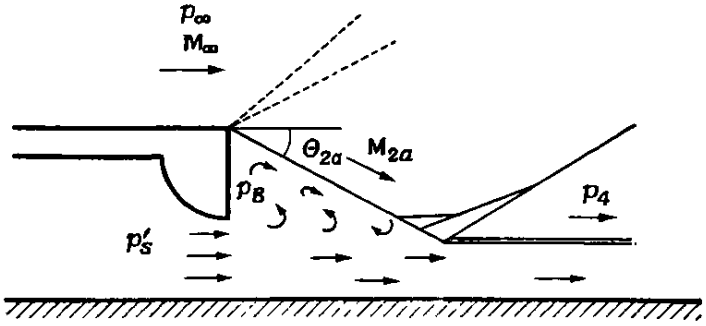
Индекс $'$ относится к течению в струе или в нижней части модели. Эксперименты были проведены в Иллинойсском университете, а также Фуллером и Рейдом [38] в Великобритании и Уимброу [39] в NASA. Экспериментальные данные в основном распола-



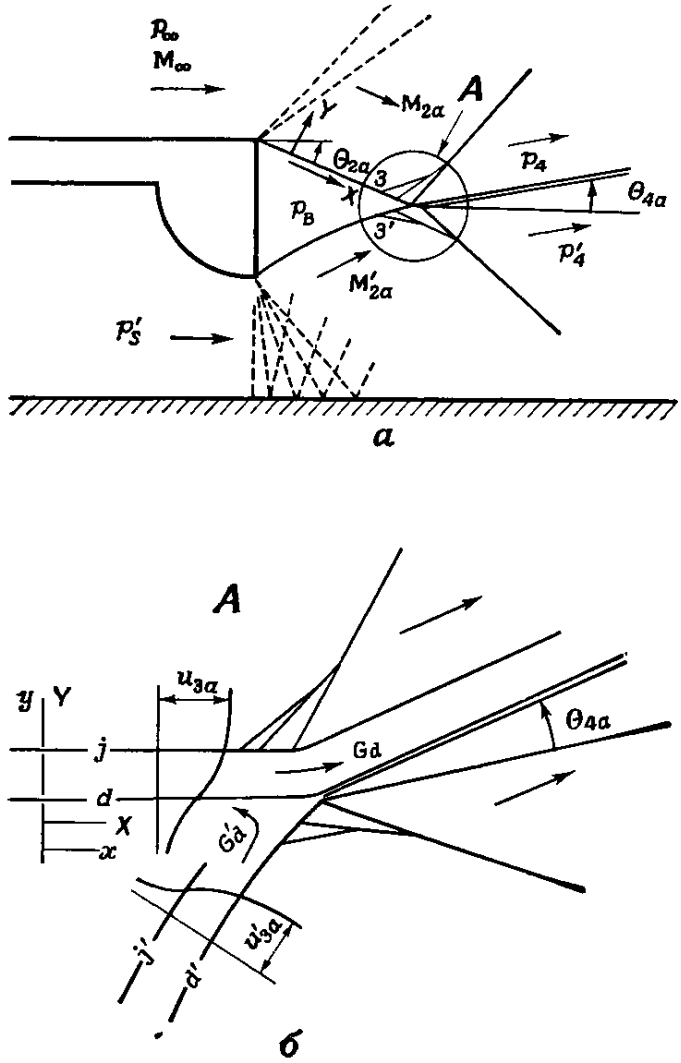
Фиг. 37. Схема течения в режиме I [37].

гаются ниже расчетных, за исключением узкого интервала при переходе от режима I к II (фиг. 40).

При расчете донного давления были сделаны следующие предположения. Внешний обтекающий поток однородный и направлен параллельно стенке. Внешний поток испытывает расширение Прандтля — Майера в режимах I—III, а вдуваемая струя — только в режиме III. В режимах I и II вдуваемый из сопла поток плоскопараллелен.

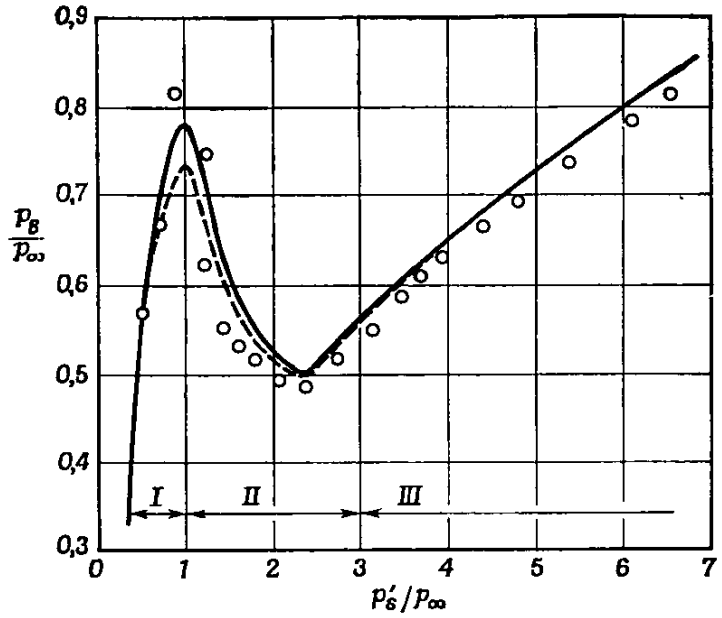


Фиг. 38. Схема течения в режиме II [37].

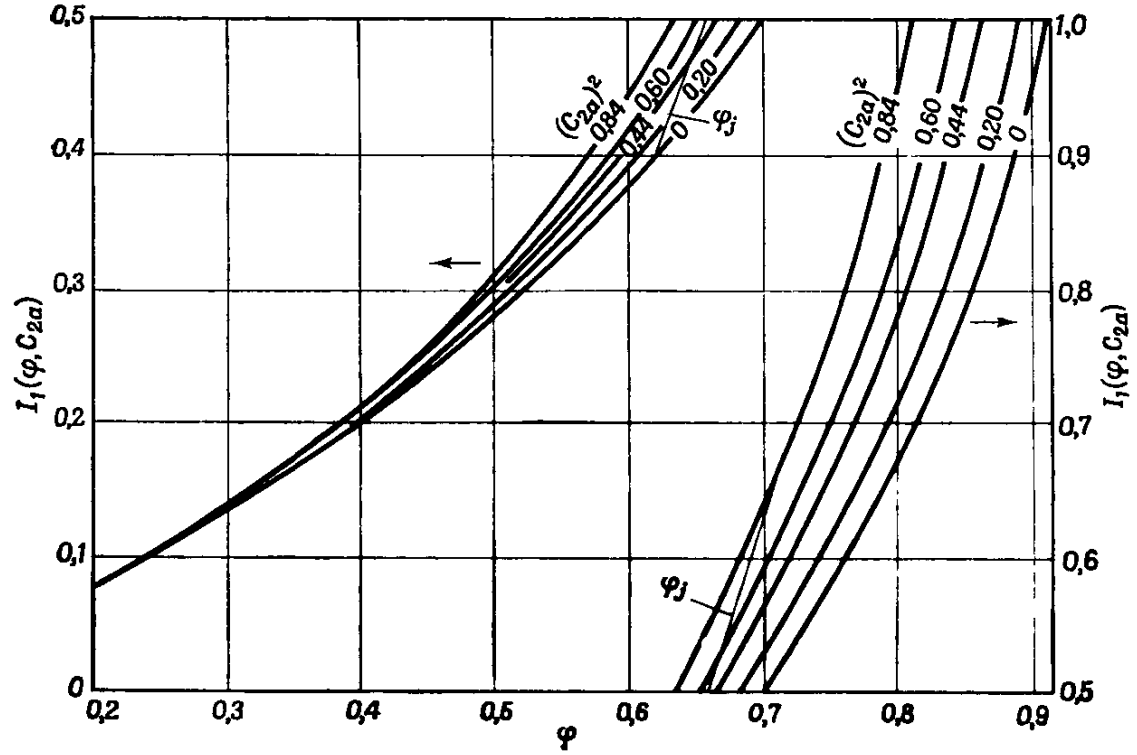


Фиг. 39.

а — схема невязкого течения в режиме III [37]; *б* — схема диссипативного течения у края застойной области [37].



Ф и г. 40. Зависимость между p_B/p_∞ и p_s/p_∞; $M_\infty = 1{,}92$, $h/h' = 1{,}94$ [37]. h — высота уступа, h' — размер выходного сечения сопла. Расчеты: ——— $\sigma = 12 + 2{,}758\,M$; — — — — $\sigma = 12$; ○ экспериментальные результаты.



Ф и г. 41. Вспомогательная функция $I_1(\varphi, C_{2a})$ для изоэнергетического турбулентного смешения сжимаемых струй при постоянном давлении (в случае полностью развитых профилей) [37].

При постоянном статическом давлении в области отрыва границы соответствующих «невязких струй» могут быть построены для всех режимов течения методом характеристик.

Используя уравнения (30) и (38), получаем

$$G_s\sigma_{2a}/x\rho_{2a}u_{2a}(1-C_{2a}^2)=$$

$$=\int\limits_{\eta_j}^{\eta_s}\frac{\varphi\,d\eta}{1-C_{2a}^2\varphi^2}=I_1(\eta_s C_{2a}^2)-I_1(\eta_j,\ C_{2a}^2). \tag{42}$$

Интеграл

$$I_1(\eta,\ C_{2a}^2)=\int\limits_{-\infty}^{\eta}\frac{\varphi\,d\eta}{1-C_{2a}^2\varphi^2}$$

представлен на фиг. 41.

Эмпирический параметр, который может зависеть от числа Маха, дается Корстом и Триппом [40] в виде

$$\sigma = 12 + 2{,}758\,\mathrm{M}.$$

Для определения M_{3d}, C_{3d} и φ_{3d} в конце замкнутой области отрыва (которые необходимы для расчета внешнего течения и течения в струе) используются следующие уравнения:

$$p_{s\,3d}/p_4 = 1,$$

где

$$p_{s\,3d}/p_3=[1+\{(\gamma-1)/2\}\,\mathrm{M}_{3d}^2]^{\gamma/(\gamma-1)}, \tag{43}$$

так как по статическому давлению p_4, вызванному косым скачком во внешнем потоке, из условия смыкания определяется разделяющая линия тока d с безразмерной координатой η_d. Таким образом, из равенств $p_B = p_2 = p_3$ определяются углы наклона линий тока для схемы невязкого течения и статическое давление за зоной повторного сжатия. В режиме течения III методом проб и ошибок определяется угол Θ_{4a}, при котором $p_4 = p_4'$. До сих пор донное давление p_B предполагалось известным. Чтобы найти правильное решение, используется закон сохранения массы в отрывном течении

$$G_d' + G_d' = 0 \quad \text{или} \quad G_d'/G_d = -1,$$

причем для режима I

$$G_d'/G_d=\frac{C_{2a}'\sigma_{2a}\sin\sigma_{2a}}{C_{2a}\,(1-C_{2a}'^2)\,(h/h')\,(I_{1i}-I_{1j})}=-1,$$

а для режимов II и III

$$G_d'/G_d = \frac{C_{2a}'\sigma_{2a}x'(I_{1d}'-I_{1j})}{C_{2a}\sigma_{2a}'x(I_{1d}-I_{1j})} = -1,$$

где x'/x — отношение длин вдоль разделяющих линий тока в рамках модели невязкого течения.

При известном отношении высот h/h' и известных величинах M_∞ и p_s'/p_∞ задача решается путем задания отношения p_B/p_∞. Затем проверяется, удовлетворяется ли с помощью полученного решения закон сохранения массы.

Развивая теорию Корста, Карьер и Сирье [41] разработали метод расчета отрывного течения за уступом, расположенным по потоку, при сверхзвуковых скоростях. Они нашли, что влияние пограничного слоя в точке отрыва эквивалентно влиянию вдува струи в область отрыва. На градиенты давления и энтропии во внешнем потоке влияет кривизна линий тока в слое смешения, а в осесимметричном течении — наклон и кривизна линии тока перед отрывом. Их подход при рассмотрении влияния пограничного слоя подобен подходу Кирка [42].

Кирк [42] независимо от Корста сформулировал задачу о донном течении при нулевой толщине пограничного слоя на теле. Он качественно предсказал влияние вдува воздуха и формы хвостовой части тела на донное давление за уступом при сверхзвуковых скоростях двумерного потока. Он предположил, что существуют четыре основные области, которые следует рассматривать отдельно: смешения, замыкания, отрывного течения и основной поток. Течение в области смешения считается в основном таким же, как при свободном смешении окружающего неподвижного воздуха с однородным сверхзвуковым потоком, т. е. направление линий тока в области смешения такое же, как в основном потоке. В области замыкания происходит сжатие, когда верхняя и нижняя области, смыкаясь, ограничивают область отрыва. В области отрывного течения, формирующейся из воздуха, вытекающего из области замыкания, статическое давление постоянно и равно статическому давлению окружающей среды. Основной поток вне области смешения, в области замыкания и в области отрывного течения очень близок к изэнтропическому.

Влияние пограничного слоя перед донной частью рассматривается при следующих допущениях:

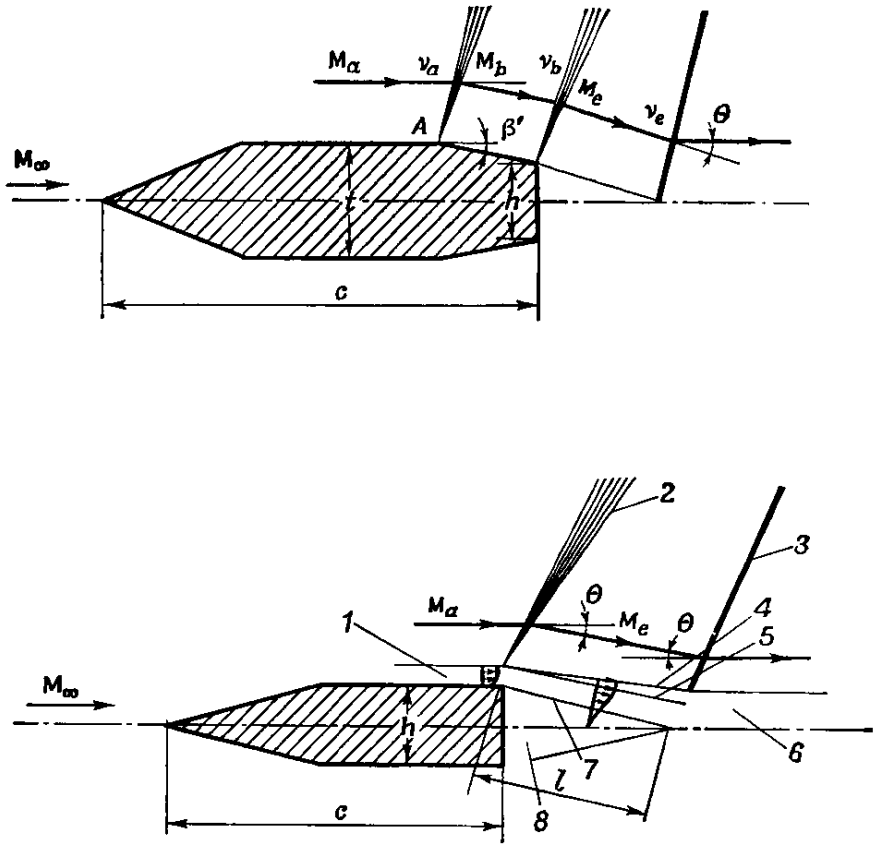
1. Слой смешения ведет себя, как если бы он образовался на некотором расстоянии перед донным срезом, а не в вершине угла.

2. Линия тока с постоянным значением скорости, являющаяся в действительности средней линией области смешения, и разделяющая линия тока различны, но поток массы между ними одинаков во всех сечениях.

Установлено, что качественно влияние пограничного слоя состоит в уменьшении отношения скорости на разделяющей линии тока в конце области смешения к скорости вне области смешения, а также в увеличении донного давления и уменьшении донного сопротивления.

4.3. ТЕОРИЯ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ КАРАШИМЫ

Применяя теорию пограничного слоя, Карашима [43] рассмотрел задачу о донном давлении за крыловым профилем с затупленной задней кромкой для случая с ламинарным пограничным



Фиг. 42. Упрощенная схема обтекания крыловых профилей с сужением и без сужения хвостовой части [43].

1 — пограничный слой перед донным срезом; *2* — веер волн разрежения Прандтля — Майера; *3* — скачок; *4* — граница струи; *5* — разделяющая линия тока; *6* — след; *7* — линия тока, которая приходит в критическую точку области замыкания. *8* — застойная зона.

слоем на профиле. Метод Карашимы практически основан на анализе пограничного слоя с привлечением теории пути смешения Прандтля. Численный расчет выполнен для чисел Маха невозмущенного потока 1,5, 2,0 и 3,1. При сравнении его расчетных результатов с экспериментальными данными Чепмена и др. [22] получено хорошее соответствие.

Упрощенная схема течения представлена на фиг. 42.

Сделаны следующие допущения:

1. Набегающий поток ламинарный и переход происходит на задней кромке.

2. Градиент давления в слое смешения мал и им можно пренебречь.

3. В вязкой области течение изоэнергетическое и число Прандтля равно единице.

4. В слое смешения коэффициент смешения постоянен.

5. В области отрыва коэффициент теплоотдачи и скорость жидкости равны нулю.

6. Профиль настолько тонок, что условия в набегающем невязком потоке заменяются условиями в невозмущенном потоке.

Начало декартовой системы координат расположено над задней кромкой, где $u = u_e/2$, причем u и u_e — составляющие вдоль оси x местной и внешней скоростей невязкого течения соответственно. Индекс e заменяет индекс 2, примененный в работе [43] и соответствующий условиям на внешней границе слоя смешения. Ось x направлена по линии, на которой $u = u_e/2$, а ось y перпендикулярна оси x.

Уравнения неразрывности, количества движения и формула Прандтля для слоя смешения, записанные через осредненные по времени значения параметров, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \tag{44}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \tag{45}$$

и

$$\tau = \varepsilon \rho \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{46}$$

где $\varepsilon = \varkappa b u_e$ — коэффициент турбулентной вязкости, $\varkappa$ — коэффициент пропорциональности, а b — толщина слоя смешения. При b, пропорциональном x,

$$\varepsilon = \varkappa c_1 u_e x, \tag{47}$$

где c_1 — другой коэффициент пропорциональности. Тогда уравнение количества движения принимает вид

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon_0 \frac{x}{L} \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{48}$$

где L — характерная длина слоя смешения и

$$\varepsilon_0 = \varkappa c_1 u_e L.$$

Граничные условия следующие:

$$u(x, 0) = {}^1/_2\, u_e, \quad u(x, \infty) = u_e \text{ и } u(x, -\infty) = 0.$$

С помощью безразмерных величин

$$u^* = u/u_e, \quad v^* = v/u_e, \quad \rho^* = \rho/\rho_e,$$

$$x^* = x/L, \quad y^* = y/L \text{ и } T^* = T/T_e$$

введем безразмерную функцию тока ψ^*:

$$\psi^* = \frac{\psi}{\sqrt{\mu_e \rho_e u_e L}}. \tag{49}$$

Если

$$\varepsilon_0^* = \varepsilon_0/\nu_e, \tag{50}$$

то уравнение количества движения преобразуется к виду

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} = \varepsilon_0^* x^* \frac{\partial}{\partial \psi^*}\left(\rho^{*2} u^* \frac{\partial u^*}{\partial \psi^*}\right), \tag{51}$$

где

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = -\sqrt{\frac{u_e L}{\nu_e}}\, \rho^* v^* \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = \sqrt{\frac{u_e L}{\nu_e}}\, \rho^* u^*. \tag{52}$$

Соответствующие граничные условия имеют вид

$$u^*(x^*, 0) = \frac{1}{2}, \qquad u^*(x^*, \infty) = 1 \text{ и } u^*(x^*, -\infty) = 0. \tag{53}$$

Существование автомодельных решений уравнений (51) и (53) для смешения несжимаемых струй было установлено теоретически Гёртлером [44] и экспериментально Рейхардтом [45], а также экспериментально для смешения сжимаемых струй — Гудерумом и др. [46]. Поэтому принято, что теоретические автомодельные решения также существуют.

С использованием выражения

$$\psi^* = \sqrt{\varepsilon_0^*}\, x^* f(\xi), \tag{54}$$

где $u^* = {}^1/_2 f'(\xi)$, уравнение количества движения получается в виде

$$\frac{d}{d\xi}(\rho^{*2} f'') + 2ff'' = 0 \tag{55}$$

и

$$f'(0) = 1, \quad f'(\infty) = 2, \quad f'(-\infty) = 0.$$

Чтобы решить уравнение (55), нужно задать ρ^* в виде функции $f(\xi)$. Поскольку

$$T^* = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 (1 - u^{*2}) \tag{56}$$

и

$$\varepsilon_e = \frac{u_e}{u_{\text{макс}}} \left\{1 + \frac{2}{(\gamma - 1)\, M_e^2}\right\}^{-1/2}, \tag{57}$$

$$\rho^* = \frac{1}{T^*} = \frac{1 - \varepsilon_e^2}{1 - \frac{1}{4}\varepsilon_e^2 f'^2}, \tag{58}$$

уравнение (55) принимает вид

$$\frac{d}{d\xi}\left\{\left(\frac{1 - \varepsilon_e^2}{1 - \frac{1}{4}\varepsilon_e^2 f'^2}\right)^2 f''\right\} + 2ff'' = 0. \tag{59}$$

Это уравнение можно решить численным интегрированием. Однако для простоты принято $\rho^* = 1$ в качестве первого приближения для распределения скорости, основанного на экспериментально показанном Гудерумом и др. [46] факте, что распределение скорости в слое смешения сжимаемых струй соответствует ее распределению в несжимаемой струе. Следовательно, уравнение (59) преобразуется к виду

$$f''' + 2ff'' = 0. \tag{60}$$

Оно было решено Гёртлером [44] путем разложения в ряды по $f(\xi)$

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F_n(\xi), \tag{61}$$

где

$$F_0(\xi) = \xi \text{ при } \lambda \leqslant 1.$$

Так как эти степенные ряды быстро сходятся, то приближенно

$$f' = 1 + \operatorname{erf} \xi, \tag{62}$$

$$f = \xi + \int_0^{\xi} \operatorname{erf} \alpha \, d\alpha - 0{,}1608 \tag{63}$$

и

$$u^*(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf} \xi). \tag{64}$$

Эти приближенные решения применимы к смешению несжимаемых струй, но предполагается, что они применимы и к смешению сжимаемых струй, если $u^* \approx 1$.

Следовательно, задача о донном давлении может быть решена с помощью приведенных выше приближенных уравнений, так как масса жидкости, поступающая в слой смешения из натекающего пограничного слоя, занимает почти всю часть области диссипативного течения, в которой развиваются высокие скорости.

Параметр, объединяющий число Рейнольдса и геометрические характеристики

Карашима [43] предложил для корреляции данных по донному давлению параметр, объединяющий число Рейнольдса и геометрические характеристики. Если y возрастает, скорость течения в диссипативной области асимптотически приближается к скорости внешнего почти изэнтропического течения. Поэтому необходимо определить границу струи.

Если примем

$$u^* (x^*, y_0^*) = 0{,}9975,$$

где y_0^* — координата границы струи, то при заданном числе Маха u^* — функция только ξ

$$u^* (x^*, y_0^*) = \frac{1}{2} f' (\xi_0) = 0{,}9975.$$

Следовательно, из уравнения (64) найдем параметр положения для границы струи $\xi_0 = 2{,}150$.

Далее, разделяющая линия тока определяется уравнением

$$m = \int_{y_s}^{y_0} \rho u \, dy,$$

где m — масса жидкости, поступающая в диссипативную область из внешнего потока, а y_s — координата разделяющей линии тока.

Если масса жидкости в начале слоя смешения задана в виде $\rho_e u_e \delta_e$, то

$$\int_{y_s^*}^{y_0^*} \rho^* u^* \, dy^* = \frac{m}{\rho_e u_e \delta_e},$$

где δ_e — эффективная толщина слоя смешения у задней кромки.

Если коэффициент смешения $\varkappa$ определить по Крокко — Лизу [10]

$$\frac{dm}{dx} = \varkappa (x, \mathrm{Re}, \mathrm{M}_e) \rho_e u_e,$$

$$m (0, \mathrm{Re}, \mathrm{M}_e) = 0,$$

то предыдущее уравнение преобразуется к виду

$$\omega x^* \int_{\xi_s}^{\xi_0} f' (\xi) \, d\xi = \frac{1}{\delta_e} \int_0^x \varkappa (x) \, dx, \tag{65}$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{u_e \delta_e}} = \sqrt{\varkappa c_1}.$$

На основе предположения (4) о постоянстве коэффициента смешения уравнение (65) принимает следующий вид:

$$\omega \{f(\xi_0) - f(\xi_s)\} = \varkappa. \tag{66}$$

Разделяющая линия тока определяется из закона сохранения количества движения в слое смешения. Следовательно, если принять количество движения в начальном сечении слоя равным количеству движения в области, ограниченной разделяющей линией тока, то

$$\int_{-\infty}^{y_s} \rho u^2\, dy = \text{const}$$

или

$$\omega x^* \int_{-\infty}^{\xi_s} u^* f'(\xi)\, d\xi = \text{const}.$$

Дифференцируя по x^*, найдем

$$\int_{-\infty}^{\xi_s} u^* f'(\xi)\, d\xi = u^*(\xi_s)\, f(\xi_s).$$

Решая это уравнение численно с учетом уравнений (62) — (64), получаем параметр положения разделяющей линии тока $\xi_s = 1{,}339$.

Следует отметить, что ξ_s не зависит от x и что скорость течения вдоль разделяющей линии тока постоянна, поскольку коэффициент смешения $\varkappa$ принят постоянным.

Поток массы, протекающий между разделяющей линией тока и линией тока, приходящей в критическую точку области замыкания, равен потоку массы в начале струи.

Таким образом,

$$\int_{y_d}^{y_s} \rho u\, dy = \rho_e u_e \delta_e, \tag{67}$$

где y_d — координата линии тока, отделяющей застойную зону, или

$$\omega x^* \{f(\xi_s) - f(\xi_d)\} = 1. \tag{68}$$

Если исключить ω из уравнений (66) и (68), то

$$\varkappa x = \frac{f(\xi_s) - f(\xi_d)}{f(\xi_0) - f(\xi_s)} = \delta_e. \tag{69}$$

$f(\xi_0)$ и $f(\xi_s)$ независимы от x, следовательно, функция $f(\xi_d)$ должна зависеть от x и скорость u^* переменна вдоль линии тока, приходящей в критическую точку области замыкания. Из закона сохранения массы

$$\rho_e u_e \delta_e = \rho_a u_e (\delta_a - \delta_a^*), \tag{70}$$

где δ_a и δ_a^* — физическая толщина и толщина вытеснения пограничного слоя перед донным срезом (индекс a обозначает условия в потоке перед донным срезом).

Из теории пограничного слоя

$$\delta_a = 5{,}0 \sqrt{\frac{\nu_a c}{u_{ea}}} \quad \text{и} \quad \delta_a^* = 1{,}73 \sqrt{\frac{\nu_a c}{u_{ea}}}.$$

Следовательно,

$$\delta_e = 3{,}27 \frac{c}{\sqrt{\mathrm{Re}_c}} \frac{\mathrm{M}_a}{\mathrm{M}_e} \left(\frac{5+\mathrm{M}_e^2}{5+\mathrm{M}_a^2}\right)^3, \tag{71}$$

где Re_c — число Рейнольдса, вычисленное по длине хорды c и условиям в потоке перед донным срезом. В предположении, что толщина слоя смешения мала по сравнению с размером донного среза h, расстояние l между донным срезом и началом области замыкания, измеренное вдоль оси x, задается приближенно (фиг. 42) в виде

$$l \approx \frac{h}{2 \sin \Theta}, \tag{72}$$

где Θ — угол поворота невязкого потока при течении расширения Прандтля — Майера в окрестности угловой точки донного среза.

С помощью уравнений (71) и (72) уравнение (69) преобразуется к виду

$$\frac{c}{h} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_c}} = 0{,}1482 \frac{\mathrm{M}_e}{\mathrm{M}_a} \left(\frac{5+\mathrm{M}_a^2}{5+\mathrm{M}_e^2}\right)^2 \frac{\varkappa}{\sin \Theta} \frac{f(\xi_s) - f(\xi_{d_l})}{f(\xi_0) - f(\xi_s)}, \tag{73}$$

где $f(\xi_{d_l})$ — значение $f(\xi_d)$ в начале области замыкания застойной зоны, $(c/h)(1/\sqrt{\mathrm{Re}_c})$ — параметр, объединяющий число Рейнольдса у донного среза и геометрические характеристики, а M_a — число Маха потока перед донным срезом. Уравнение (73) связывает условия в диссипативном слое смешения, обозначаемые $f(\xi_{d_l})$, условия в соседней почти изэнтропической области, обозначаемые индексом e, и условия в потоке перед донным срезом, обозначаемые индексом a, с числом Рейнольдса и формой тела.

Донное давление

Для схемы течения в донной области (фиг. 42) анализ с использованием допущений Карашимы [43] дает

$$p_B = p\,(\mathrm{M}_a,\ \mathrm{Re}_c,\ t/c,\ h,\ \beta'),$$

где t/c, β' и h — отношение толщины профиля к хорде, угол сужения хвостовой части и размер донного среза соответственно. Однако из экспериментов выявляется, что донное давление в меньшей степени зависит от t/c и β', так что можно принять

$$p_B = p\,(\mathrm{M}_a,\ \mathrm{Re}_c,\ h),$$

и это выражение подобно предложенному Чепменом [22]

$$p_B = p\left(\mathrm{M}_a,\ \frac{c}{h},\ \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_c}}\right).$$

На входе в область замыкания теория Корста [30] дает значение числа Маха диссипативного течения на линии тока, отделяющей слой смешения от застойной области.

$$\mathrm{M}_{d_l}^2 = \frac{u_{d_l}^2}{a_{d_l}^2} = \mathrm{M}_e^2 u_{d_l}^* \rho_{d_l}^* = \frac{(1-\varepsilon_e^2)\,\mathrm{M}_e^2 u_{d_l}^{*2}}{1-\varepsilon_e^2 u_{d_l}^*}.$$

Из уравнения Рэнкина — Гюгонио при переходе через скачок

$$\frac{p_4}{p_e} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\,(\mathrm{M}_e^2 \sin\beta - 1),$$

где β — угол наклона скачка, определяемый уравнением

$$\operatorname{tg}\Theta = \operatorname{ctg}\beta\,\frac{2\,(\mathrm{M}_e^2 \sin^2\beta - 1)}{\mathrm{M}_e^2\,(\gamma + \cos 2\beta) + 2}. \tag{74}$$

Так как угол отклонения потока при переходе через скачок Θ должен быть равен углу поворота невязкого потока в веере волн разрежения Прандтля — Майера, угол скачка β определяется как функция M_e, а $u_{d_l}^*$ также выражается как функция M_e, поскольку

$$\frac{p_{s\,d_l}}{p_e} = \frac{p_4}{p_2},$$

и, наконец, $f\,(\xi_{d_l})$ определяется с помощью уравнения (73). Теперь правая часть уравнения (73), т. е. параметр, объединяющий число Рейнольдса и геометрические характеристики, выражается как функция M_a и M_e. Число Маха почти изэнтропического течения вне диссипативного слоя смешения, связанное с донным давлением, может быть определено только для данных условий в набегающем потоке: M_a и $(c/h)/\sqrt{\mathrm{Re}_c}$. Сравним теперь результаты исследования Карашимы с экспериментами Чепмена [22]. Параметр, объединяющий число Рейнольдса и геометрические характеристики для тела

с сужающейся хвостовой частью, который соответствует решению для донного давления в сжимаемом ламинарном двумерном потоке, равен

$$\left(\frac{c}{h}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_c}}\right)_{\beta'=\beta'} = 0{,}1482\,\frac{\mathrm{M}_e}{\mathrm{M}_a}\left(\frac{5+\mathrm{M}_a^2}{5+\mathrm{M}_e^2}\right)^3 \frac{\varkappa}{\sin\Theta}\,\frac{f(\xi_s)-f(\xi_{d_l})}{f(\xi_0)-f(\xi_s)}\,\varphi, \qquad (75)$$

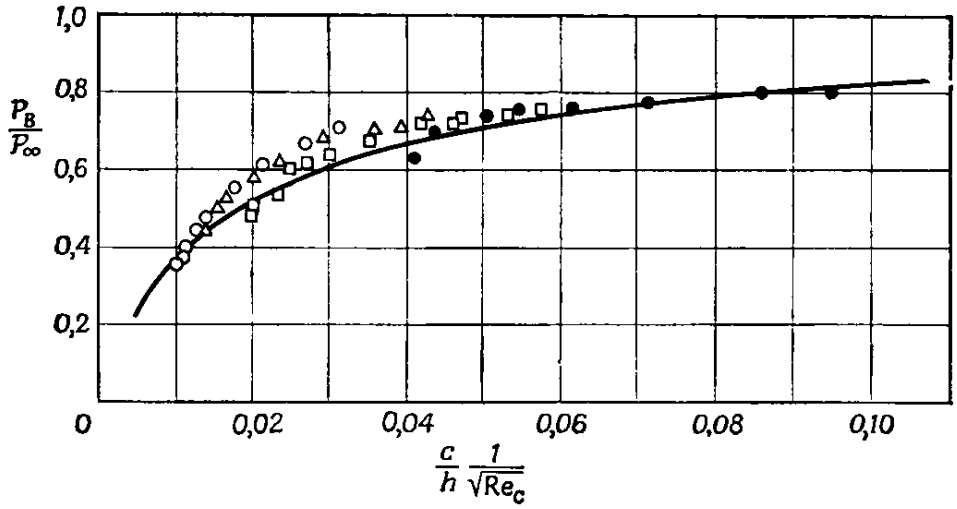
где

$$\varphi = \frac{\mathrm{M}_e}{\mathrm{M}_b}\left(\frac{5+\mathrm{M}_b^2}{5+\mathrm{M}_a^2}\right)^3$$

и β' — угол сужения хвостовой части, а M_b — число Маха в потоке, набегающем на суживающуюся часть тела, причем

$$\beta' = \nu(\mathrm{M}_b) - \nu(\mathrm{M}_a) = \nu_b - \nu_a.$$

При заданных M_a и M_e φ отражает влияние угла сужения хвостовой части на параметр, объединяющий число Рейнольдса и гео-



Фиг. 43. Сравнение теории с экспериментом. $\mathrm{M}_\infty = 2{,}0$, $t/c = 0{,}075$ (ламинарный пограничный слой) [43].

Обозначение	t/c	δ	$\beta°$
●	0,075	0,25	3,75
□	0,075	0,50	3,22
△	0,075	0,75	2,68
○	0,075	1,00	−2,15

——— теория, $\varkappa = 0{,}03$; t — толщина профиля, δ — положение максимальной толщины, β — угол сужения хвостовой части.

метрические характеристики, а для нулевого угла сужения $\varphi = 1$ и $\mathrm{M}_a = \mathrm{M}_b$. Чтобы решить уравнение (75), должна быть известна величина $\varkappa$. Принимая $\varkappa = 0{,}03$, как это сделали Шубауэр и Клебанов [47], а также Крокко и Лиз [10], сравним величины, полученные из уравнения (75), с экспериментальными данными Чепмена и др. (фиг. 43) для нулевого угла сужения и $\mathrm{M}_\infty = 2{,}0$.

В этом случае при $M_\infty = 2{,}0$ угол сужения модели мал, и мы получаем очень хорошее соответствие между расчетными результатами Карашимы и экспериментальными данными Чепмена.

Оценка методов расчета донного давления при ламинарном течении

Современные исследования донного давления далеки от завершения и нуждаются в дальнейшем развитии. Модель Чепмена [13, 48—50] упрощена для решения путем введения допущений, что начальная толщина пограничного слоя равна нулю, область замыкания, где циркулирующий поток поворачивает назад, мала и что полное давление на линии тока, приходящей в критическую точку, равно статическому давлению за замыкающим скачком. В результате решение уравнений течения становится автомодельным и поле потока может быть выражено через одну переменную, включающую обе физические координаты. Это решение применимо только к той части донного течения, в которой циркулирующая масса поступает из внешнего потока за счет вязких сил.

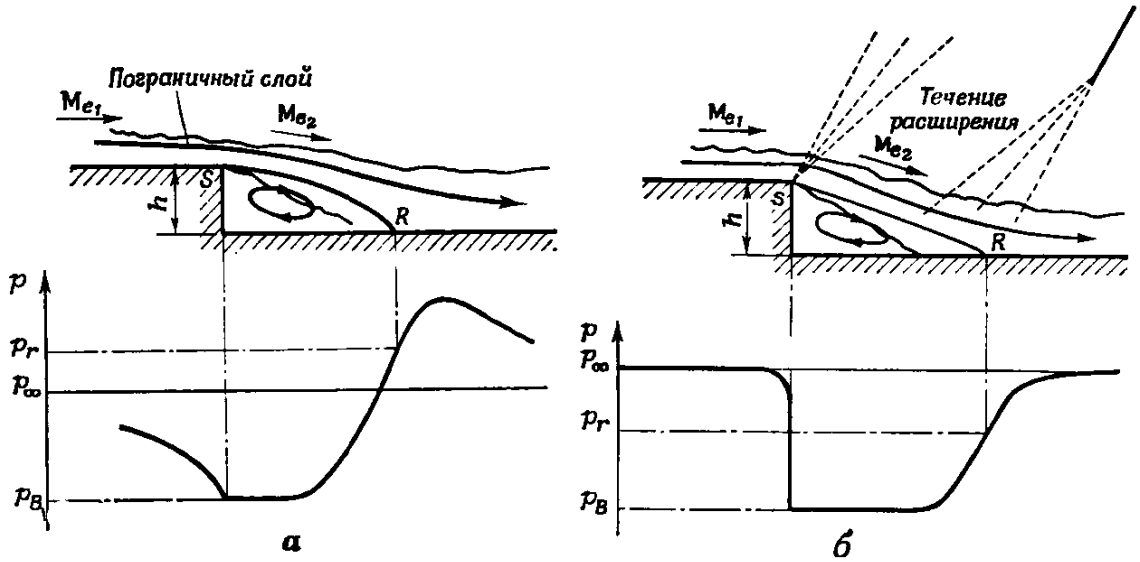
Однако формы профиля в начальном оторвавшемся вязком слое очень важны для определения величины донного давления при ламинарном течении [51, 52], следовательно, для усовершенствования метода Чепмена требуется рассмотреть начальный пограничный слой. Несовершенство таких методов, как методы Крокко — Лиза [10] и Корста [30], заключается главным образом в допущении, что возрастание давления, необходимое для замыкания области отрыва, можно приравнять к разности между донным давлением и конечным восстановленным давлением на значительном удалении вниз по потоку. Его следует приравнивать либо к давлению в окружающем невозмущенном потоке, либо к несколько меньшему давлению, чтобы учесть потери при прохождении внешнего потока через замыкающий скачок. Это означает, что точка замыкания области отрыва лежит в области максимального давления, однако, согласно экспериментальным исследованиям сверхзвукового донного течения [10, 25, 34] и взаимодействия ударной волны с пограничным слоем [26, 27, 29], точка нулевого вязкого напряжения, т. е. точка замыкания области отрыва, расположена ближе, чем точка максимального давления. При дозвуковых скоростях замыкание области отрыва происходит в точке, где местное статическое давление превосходит давление во внешнем потоке. Исследование донного давления требует введения дополнительного параметра, а именно отношения приращения давления при замыкании области отрыва к разности между статическим давлением во внешнем потоке и донным давлением. Если обратиться, в частности, к теории Корста [30] (хотя его метод расчета подтверждается наблюдениями и в принципе по-

нятно, как распространить этот метод на основные задачи донного давления), рассматриваемая теория не дает зависимости донного давления от числа Рейнольдса по следующим причинам: если толщина пограничного слоя стремится к нулю, донное давление падает до некоторой минимальной величины — предельного донного давления, являющегося функцией только числа Маха. При заданном числе Маха донное давление ниже предельного может быть достигнуто только при отсосе из донной области, при наличии поперечного течения или за счет пространственных эффектов в следе, создающих условия для отсоса. Поэтому измеренные значения донного давления, оказавшиеся ниже расчетных предельных величин, не связанные с перечисленными факторами, представляются сомнительными. Кроме того, большинство условий испытаний таковы, что отношение толщины пограничного слоя к размеру донного среза не всегда достаточно мало, поэтому условия, приближающиеся к предельному донному течению, достигаются редко. Поскольку теория Корста в ее настоящем виде при заданной толщине пограничного слоя перед задней кромкой дает более высокие значения донного давления, чем экспериментальные, она не применима для расчетов с учетом этой толщины. Следовательно, методы Корста, Кирка [42] и др. не позволяют рассчитать истинное значение предельного донного давления. Тот факт, что их теории хорошо соответствуют измеренным значениям донного давления при малом, но конечном отношении толщины пограничного слоя к размеру донного среза, свидетельствует о завышении предельного давления, а не о влиянии пограничного слоя [53].

4.4. ИССЛЕДОВАНИЯ НЭША ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ

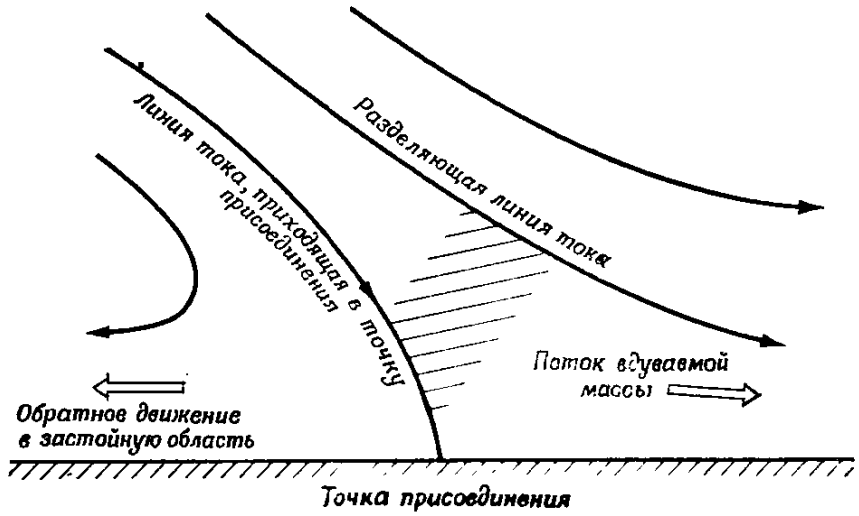
Для исследований донного давления при сверхзвуковых и дозвуковых скоростях Нэш [53] выбрал уступ, расположенный по потоку (фиг. 44). Поток, набегающий на уступ, предполагается стационарным и однородным, кроме области, примыкающей к стенке, где развивается пограничный слой. Поток отрывается у угловой точки S и присоединяется в точке R вниз по течению, замыкая отрывную зону малых скоростей, где давление по существу постоянно и равно донному давлению за уступом. Внешний невязкий поток отделяется от вязкой области свободным слоем смешения, начало которого лежит в пограничном слое перед точкой отрыва. Кроме того, принято, что течение в слое смешения аппроксимируется течением смешения при постоянном давлении турбулентного потока с покоящейся жидкостью. Оторвавшийся слой смешения присоединяется в области больших положительных градиентов давления. Резкое возрастание давления разворачивает часть жидкости слоя смешения и она течет в обратном направле-

нии в застойную зону, в то время как жидкость, имеющая более высокую скорость, вытекает из донной области и продолжает движение вниз по потоку (фиг. 45). Течение вдоль любой линии тока



Ф и г. 44. Схема течения [53].

а — обтекание уступа дозвуковым потоком; *б* — обтекание уступа сверхзвуковым потоком.



Ф и г. 45. Течение перед присоединением [53].

в процессе взаимодействия приближенно описывается соотношениями для одномерного изэнтропического течения.

Изоэнергетическое вязкое течение вдоль некоторой линии тока задается условием на границе пограничного слоя

$$u^2 + 2c_pT = u_e^2 + 2c_pT_e.$$

При

$$u^* = u/u_e$$

это соотношение принимает вид

$$1-u^{*2}=\frac{2c_p}{u_e^2}(T-T_e) \tag{76}$$

и

$$1-u_1^{*2}=\frac{2c_p}{u_{e_1}^2}(T_1-T_{e_1}) \text{ или}$$

$$1-u_2^{*2}=\frac{2c_p}{u_{e_2}^2}(T_2-T_{e_2}), \tag{77}$$

где индексы 1 и 2 относятся к условиям далеко вверху по потоку и в свободном слое смешения соответственно. Между уравнениями (77) имеется связь, соответствующая изэнтропическому расширению вдоль каждой линии тока от давления p_1 до донного давления p_B, которые считаются постоянными по толщине пограничного слоя и слоя смешения.
Тогда

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{T_{e_2}}{T_{e_1}}=\left(\frac{p_B}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}, \tag{78}$$

и из уравнений (77) и (78) следует

$$\frac{1-u_2^{*2}}{1-u_1^{*2}}=\frac{u_{e_1}^2}{u_{e_2}^2}\frac{T_{e_2}}{T_{e_1}}=\frac{M_{e_1}^2}{M_{e_2}^2}, \tag{79}$$

т. е. скорость жидкости вдоль каждой линии тока в конце взаимодействия зависит только от ее начальной скорости и отношения чисел Маха вне вязкого слоя.

Теперь введем функцию тока ψ

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\rho v \text{ и } \frac{\partial\psi}{\partial y}=\rho u, \tag{80}$$

$$\rho_{e_1}u_{e_1}\theta=\int\limits_{\psi_w}^{\infty}(1-u_1^*)\,d\psi \quad \text{и} \quad \rho_{e_2}u_{e_2}\theta_s=\int\limits_{\psi_w}^{\infty}(1-u_2^*)\,d\psi, \tag{81}$$

где θ и θ_s — толщина потери импульса в пограничном слое, набегающем на угловую точку и при его отрыве соответственно, ψ_w — линия тока, соответствующая стенке.

Если примем

$$1-u_1^*=z \text{ и } M_{e_2}^2=\frac{1}{r}M_{e_1}^2,$$

где z — мало, то из уравнения (79) получим

$$u_2^*=\{1-rz(2-z)\}^{1/2}=1-\frac{rz}{2}(2-z)-\frac{r^2z^2}{2\cdot 4}(2-z)^2\ldots$$

(при $rz(2-z)<1$).

Таким образом,

$$1-u_2^*=r(1-u_1^*)-\frac{r}{2}(1-r)(1-u_1^*)^2+\ldots \tag{82}$$

Подставим эти результаты в уравнение (81)

$$\rho_{e_2}u_{e_2}\theta_s=r\int\limits_{\psi_w}^{\infty}(1-u_1^*)\,d\psi-\frac{r}{2}(1-r)\int\limits_{\psi_w}^{\infty}(1-u_1^*)^2\,d\psi+\ldots$$

$$=\int\limits_{\psi_w}^{\infty}(1-u_1^*)\,d\psi-\frac{r}{2}(1-r)\times$$

$$\times\left\{2\int\limits_{\psi_w}^{\infty}(1-u_1^*)\,d\psi-\int\limits_{\psi_w}^{\infty}(1-u_1^{*2})\,d\psi+\ldots\right\}. \tag{83}$$

Определяя

$$\int\limits_{\psi_w}^{\infty}(1-u_1^{*2})\,d\psi=\rho_{e_1}u_{e_1}\delta^{**},$$

где δ^{**} — толщина потери кинетической энергии, найдем, что уравнение (83) принимает вид

$$\rho_{e_2}u_{e_2}\theta_s=r\rho_{e_1}u_{e_1}\left\{\theta\,\frac{1-r}{2}(2\theta-\delta^{**})+\ldots\right\}. \tag{84}$$

Так как $(2\theta-\delta^{**})$ и члены более высокого порядка малы для турбулентного пограничного слоя, то

$$\frac{\rho_{e_2}u_{e_2}\theta_s}{\rho_{e_1}u_{e_1}\theta}=r=\frac{M_{e_1}^2}{M_{e_2}^2}. \tag{84a}$$

Таким образом, для заданного M_{e_1} изменение параметра толщины потери импульса

$$\frac{\rho_{e_2}u_{e_2}\theta_s}{\rho_{e_1}u_{e_1}\theta} \tag{85}$$

может быть определено через относительное донное давление, так как M_{e_2} задано изэнтропической зависимостью

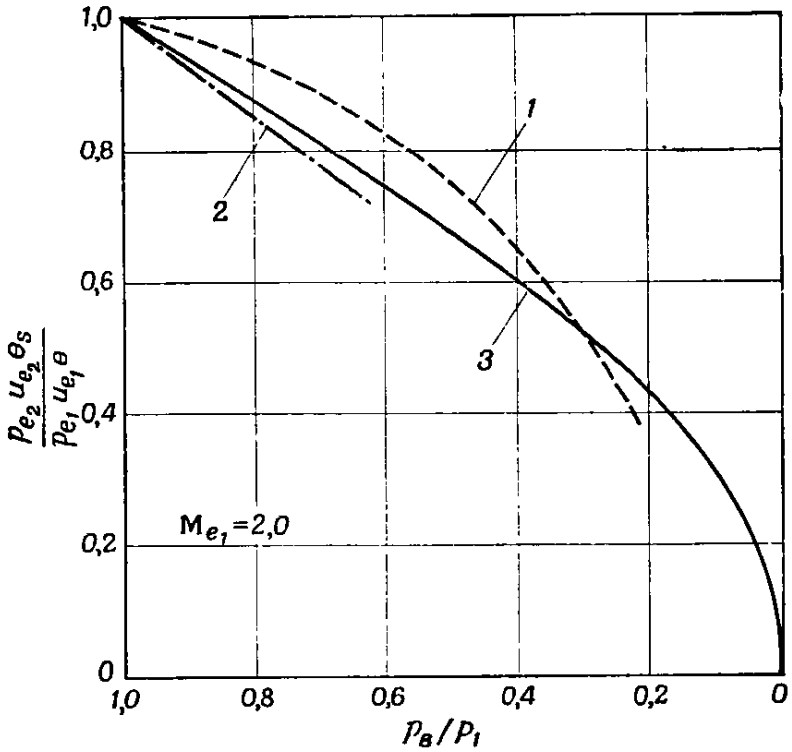
$$\frac{p_B}{p_1}=\left\{\frac{1+\frac{1}{2}(\gamma-1)M_{e_1}^2}{1+\frac{1}{2}(\gamma-1)M_{e_2}^2}\right\}^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{86}$$

Относительное донное давление p_B/p_1 при числе Маха 2,0, рассчитанное по уравнениям (85) и (86), хорошо согласуется с результатами Кирка [42], а также Карьера и Сирье [41] (фиг. 46).

Характеристики донного течения зависят также от параметра присоединения N, определяемого в виде

$$N = \frac{p_r - p_B}{p_1 - p_B}, \tag{87}$$

где индекс r относится к точке присоединения. N можно определить экспериментально в функции M_{e_1} (фиг. 47).



Фиг. 46. Донное давление за уступом, расположенным по потоку [53].

Начальный профиль скорости $u_1^* = (y/\delta)^{1/7}$. *1* — Карьер и Сирье (ONERA Memo Tech., 20, 1961); *2* — Кирк [43]; *3* — расчет по уравнению (84а).

В области несжимаемого течения параметр N равен 1,6 и медленно уменьшается до значения $\sim 0{,}35$ в области сверхзвукового течения.

Вдоль линии тока ψ_R, приходящей в критическую точку области замыкания, приращение давления от p_B до p_r связано с уменьшением скорости от u_R до нуля и с увеличением плотности от ρ_R до ρ_r, где индекс R относится к линии тока, приходящей в критическую точку области замыкания.

Если будем считать сжатие квазиэнтропическим, то

$$\frac{\rho_r}{\rho_R} = \left(\frac{p_r}{p_B}\right)^{1/\gamma}. \tag{88}$$

Тогда из уравнений (87) и (88) следует

$$\frac{\rho_B}{\rho_R} = \left(\frac{p_B}{p_r}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}. \tag{89}$$

Обозначая отношение плотностей через λ, запишем

$$\lambda_R = \frac{\rho_c}{\rho_R} \text{ и } \lambda_B = \frac{\rho_c}{\rho_B},$$

где индекс c соответствует условиям на средней линии асимптотического свободного слоя смешения. Следовательно,

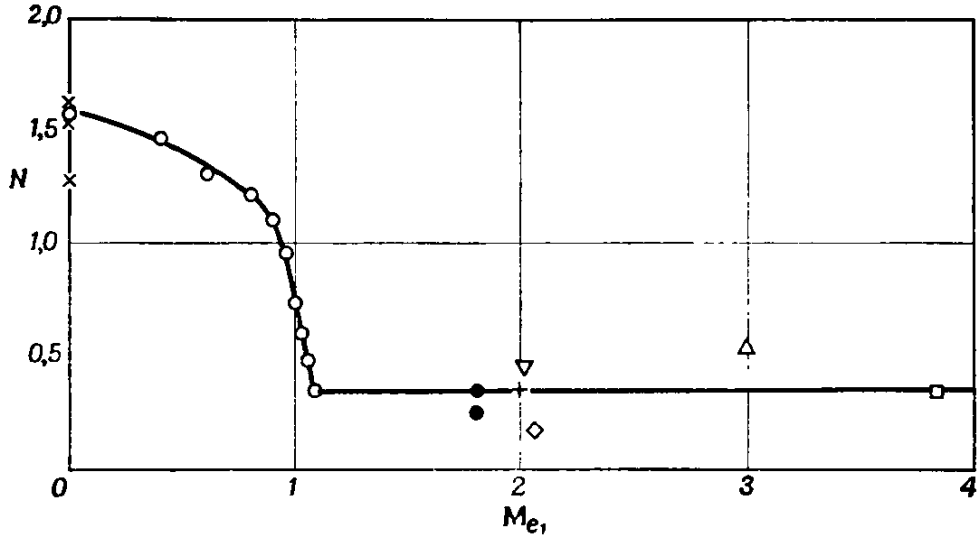
$$\lambda_R = \lambda_B \left(\frac{p_B}{p_r}\right)^{(\lambda-1)/\gamma} \tag{90}$$

и

$$\lambda_B = \frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_{e_2}^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_e^2 (1 - u_c^{*2})}. \tag{91}$$

Таким образом, λ_B — функция только M_{e_2}.

Так как асимптотический турбулентный свободный слой смешения нарастает линейно с расстоянием от своего начала и от на-



Фиг. 47. Изменение N в зависимости от числа Маха [53].

Источник: ▽ [56]; ○ [9]; ◇ [28]; ● [57]; △ Богдонов, Принстонский университет, Rept 222; □ Вэс, Богдонов, Принстонский университет, Rept, 294; + Хаккинен, Массачусетский технологический институт (MIT), Rept, 57-1; × Бурке, Ньюмен, *Aero. Quart.*, AUG, 1960.

чала эквивалентного слоя смешения, в рассматриваемой задаче местная скорость u^* может быть выражена через ψ и координату x, являющуюся декартовой координатой, параллельной направлению набегающего потока и отсчитываемой от точки отрыва.

$$\psi_M - \psi = \rho_{e_2} u_{e_2} (x + x') f(u^*),$$

где индекс M относится к средней линии тока, а x' — расстояние между истинным началом эквивалентного слоя смешения и точкой

отрыва. На нижней границе поля течения, где $u^* = 0$, функция тока задается в виде $\psi_B(x)$ и связана с $f(0)$ зависимостью

$$\psi_M = \psi_B = \rho_{e_2} u_{e_2} (x + x') f(0).$$

Функция f задается в виде

$$f(u^*) = \frac{1}{\sigma} \int_{\zeta}^{\zeta_M} \rho^* u^* d\zeta, \tag{92}$$

где $\rho^* = \rho/\rho_e$, σ — параметр, связанный со скоростью расширения слоя смешения, определяемый уравнением

$$u^* = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf} \frac{\sigma y}{x}\right),$$

$\zeta = \sigma y/\bar{x}$, где $\bar{x}$ — расстояние от начала асимптотического слоя смешения, а индекс M относится к средней линии тока. Тогда

$$f = \frac{\sqrt{\pi}}{(\gamma-1)\,\sigma M_{e_2}^2} \int_{\rho^*}^{\rho_c^*} \frac{d\rho^*}{\rho^*} = \frac{\sqrt{\pi}}{(\gamma-1)\,\sigma M_{e_2}^2} \ln \lambda \tag{93}$$

и

$$\lambda = \frac{\rho_c^*}{\rho^*} = \frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_{e_2}^2 (1 - u^{*2})}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_{e_2}^2 (1 - u_c^{*2})}.$$

Эти уравнения были выведены Нэшем при рассмотрении свободного слоя смешения.

Из уравнений (90) и (93) следует

$$f(u_R^*) = \frac{\sqrt{\pi}}{(\gamma-1)\,\sigma M_{e_2}^2} \ln \left\{\lambda_B \left(\frac{p_B}{p_r}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right\} \tag{94}$$

и

$$\frac{f(u_R^*)}{f(0)} = 1 - \frac{\ln (p_r/p_B)^{(\gamma-1)/\gamma}}{\ln \lambda_B}. \tag{95}$$

Положение в слое смешения линии тока, приходящей в точку присоединения, определяется из условия неразрывности в застойной области. В общем случае, когда в застойную область производится вдув из внешнего источника,

$$\psi_w - \psi_R = q. \tag{96}$$

Так как

$$\frac{\psi_w - \psi}{\rho_{e_2} u_{e_2}} = x f(u^*) - \theta_s \left\{1 - \frac{f(u^*)}{f(0)}\right\}, \tag{97}$$

из уравнений (97) и (96) с учетом величин $f(u_R^*)$ и $f(u_R^*)/f(0)$, определяемых уравнениями (94) и (95), донное течение с длиной свободного слоя смешения l при дозвуковой скорости описывается уравнением

$$q=\rho_{e_2}u_{e_2}\left[lf(u_R^*)-\theta\left\{1-\frac{f(u_R^*)}{f(0)}\right\}\right]=$$
$$=\rho_{e_2}u_{e_2}\left[\frac{\sqrt{\pi}l}{(\gamma-1)\sigma M_{e_2}^2}\left\{\ln\lambda_B-\ln\left(\frac{p_r}{p_B}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right\}-\right.$$
$$\left.-\theta\frac{\ln(p_r/p_B)^{(\gamma-1)/\gamma}}{\ln\lambda_B}\right]. \qquad (98)$$

При сверхзвуковых скоростях вводится поправка на изменение толщины потери импульса при прохождении веера волн разрежения в угловой точке. Если обозначить высоту уступа h, а угол Прандтля — Майера через ν, то для сверхзвукового течения

$$q=\rho_{e_2}u_{e_2}\frac{hf(u_R^*)}{\sin(\nu_{e_2}-\nu_{e_1})}-\rho_{e_1}u_{e_1}\theta\frac{M_{e_1}^2}{M_{e_2}^2}\left\{1-\frac{f(u_R^*)}{f(0)}\right\}, \qquad (99)$$

$$q=\rho_{e_2}u_{e_2}\frac{\sqrt{\pi}h\{\ln\lambda_B-\ln(p_r/p_B)^{(\gamma-1)/\gamma}\}}{(\gamma-1)\sigma M_{e_2}^2\sin(\nu_{e_2}-\nu_{e_1})}-$$
$$-\rho_{e_1}u_{e_1}\theta\frac{M_{e_1}^2}{M_{e_2}^2}\frac{\ln(p_r/p_B)^{(\gamma-1)/\gamma}}{\ln\lambda_B}. \qquad (100)$$

Порядок расчета следующий.

1. Для заданного M_{e_1} выбирают значения M_{e_2}, соответствующие интервалу p_B/p_1 [уравнение (86)]. Так как

$$\sigma=12(1+0{,}23\,M_{e_2}) \quad [40],$$
$$u_c^{*2}=0{,}348+0{,}018\,M_{e_2} \quad [53] \qquad (100а)$$

и λ_B [уравнение (91)] является функцией M_{e_2}, рассчитывают эти величины, а также $(\rho_{e_2}u_{e_2}/\rho_{e_1}u_{e_1})$ и $(\nu_{e_2}-\nu_{e_1})$.

2. Задают параметр N [уравнение (87)] и для каждого значения p_B, рассматриваемого в п. 1, определяют p_r и рассчитывают $f(u_R^*)$ и $f(u_R^*)/f(0)$ [уравнения (94) и (95)].

3. Если известна плотность потока вдува q, по уравнениям (97) или (99), определяют толщину потери импульса, необходимую для достижения заданной величины донного давления.

4. По определенной толщине потери импульса можно рассчитать изменения донного течения с изменением потока вдуваемой массы [уравнения (98) или (99)].

Используя обобщенные уравнения, исследуем два частных случая: отсутствие вдува и предельное донное течение.

Течение без вдува ($q = 0$)

Из уравнений (98) и (100) следует, что толщина потери импульса, необходимая для достижения заданного относительного донного давления p_B/p_1, определяется следующим образом:

Для дозвукового течения

$$\frac{\theta}{l} = c_1 \frac{A(A-B)}{B}, \tag{101}$$

где l — длина свободного слоя смешения и

$$A = \lg \lambda_B, \quad B = \lg \left(\frac{p_r}{p_B}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

и

$$c_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{(\gamma-1)\,\sigma \mathrm{M}_{e_2}^2}.$$

Для сверхзвукового течения

$$\frac{\theta}{h} = c_2 \frac{A(A-B)}{B}, \tag{102}$$

где

$$c_2 = \frac{\rho_{e_2} u_{e_2} \mathrm{M}_{e_2}^2}{\rho_{e_1} u_{e_1} \mathrm{M}_{e_1}^2} \frac{c_1}{\sin(\nu_{e_2} - \nu_{e_1})} = \left(\frac{\mathrm{M}_{e_2} T_{e_2}}{\mathrm{M}_{e_1} T_{e_1}}\right)^3 \frac{c_1}{\sin(\nu_{e_2} - \nu_{e_1})}.$$

Для промежуточного интервала чисел Маха (примерно от 0,85 до 1,0)

$$\frac{\theta}{l} = c_3 \frac{A(A-B)}{B}, \tag{103}$$

где

$$c_3 = \left(\frac{\mathrm{M}_{e_2} T_{e_2}}{\mathrm{M}_{e_1} T_{e_1}}\right)^3 c_1, \text{ если } \gamma = 1{,}4.$$

Два параметра l и N, входящие в величину B в уравнениях (101) и (103) для дозвукового течения, в расчете Нэша [53] не устанавливаются.

Донное течение в предельном случае $\theta = 0$

В этом случае $A = B$ или

$$\frac{p_r}{p_B} = \lambda_B^{\gamma/(\gamma-1)}, \tag{104}$$

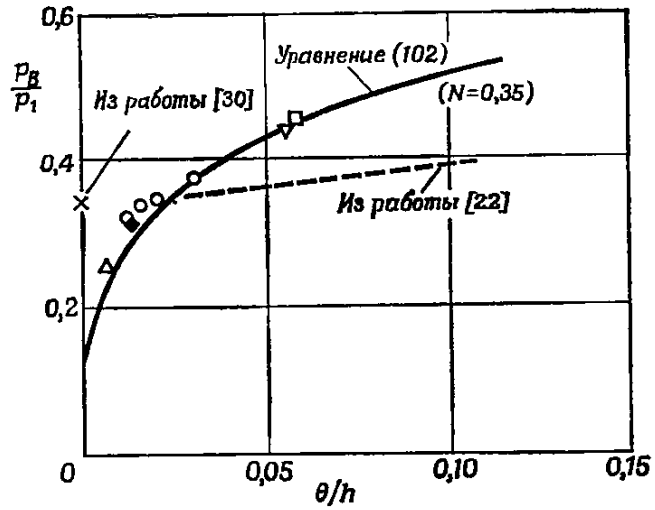
а также в функции N [формула (87)]

$$\left(\frac{p_B}{p_1}\right)_{\lim} = 1 \Big/ \left[1 + \frac{1}{N}\left\{\lambda_B^{\gamma/(\gamma-1)} - 1\right\}\right], \tag{105}$$

причем λ_B определяется по уравнению (91) для значения M_{e_2}, полученного при допущении, что поток, имеющий скорость, соот-

ветствующую M_{e_1} расширяется изэнтропически от p_1 до p_B [уравнение (86)].

Донное давление за уступом, расположенным по потоку, рассчитанное по уравнению (102) при $N = 0{,}35$ и по уравнению (100а) при числе Маха 2,0, представлено на фиг. 48 вместе с данными из работ [22, 26, 28, 30, 54—56].



Фиг. 48. Донное давление за уступом в зависимости от толщины потери импульса, $M_{e_1} = 2{,}0$ [53].

○ M = 2,025 [56]; ◆ M = 2 [26]; △ интерполяция между M = 1,95 и M = 2,22 [55]; □ M = 2,07 [28]; ▽ M = 1,8 [57]. ◆ и △ соответствуют экспериментам с крыловыми профилями.

Результаты Нэша хорошо согласуются с данными других исследователей, но они занижены по сравнению с данными Корста и завышены по сравнению с данными Чепмена.

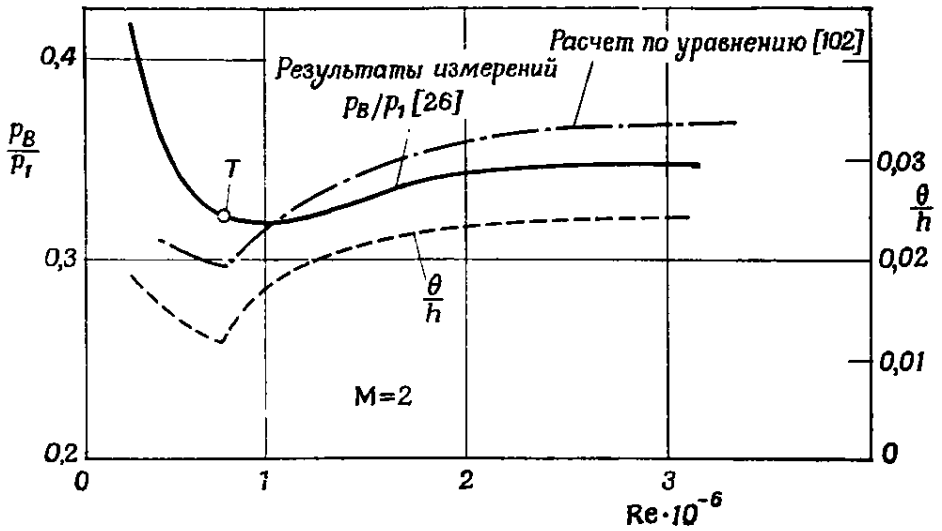
Расчетные значения донного давления и θ/h для крылового профиля, приведенные на фиг. 49 в функции числа Рейнольдса при числе Маха 2, достаточно хорошо согласуются с данными Гэдда и др. [26] в области турбулентного течения. Переход происходит при $Re = 0{,}8 \cdot 10^6$.

Это свидетельствует о существовании механизма, благодаря которому донное давление за уступом может не совпадать с донным давлением за изолированным профилем при идентичных условиях.

В области дозвуковых и трансзвуковых скоростей расчетные значения коэффициентов донного давления за уступом сравниваются с экспериментальными данными. Значения параметра N для расчета выбирались по фиг. 47, а предельное значение донного давления рассчитывалось по уравнению (105) (штрихпунктирная кривая на фиг. 50).

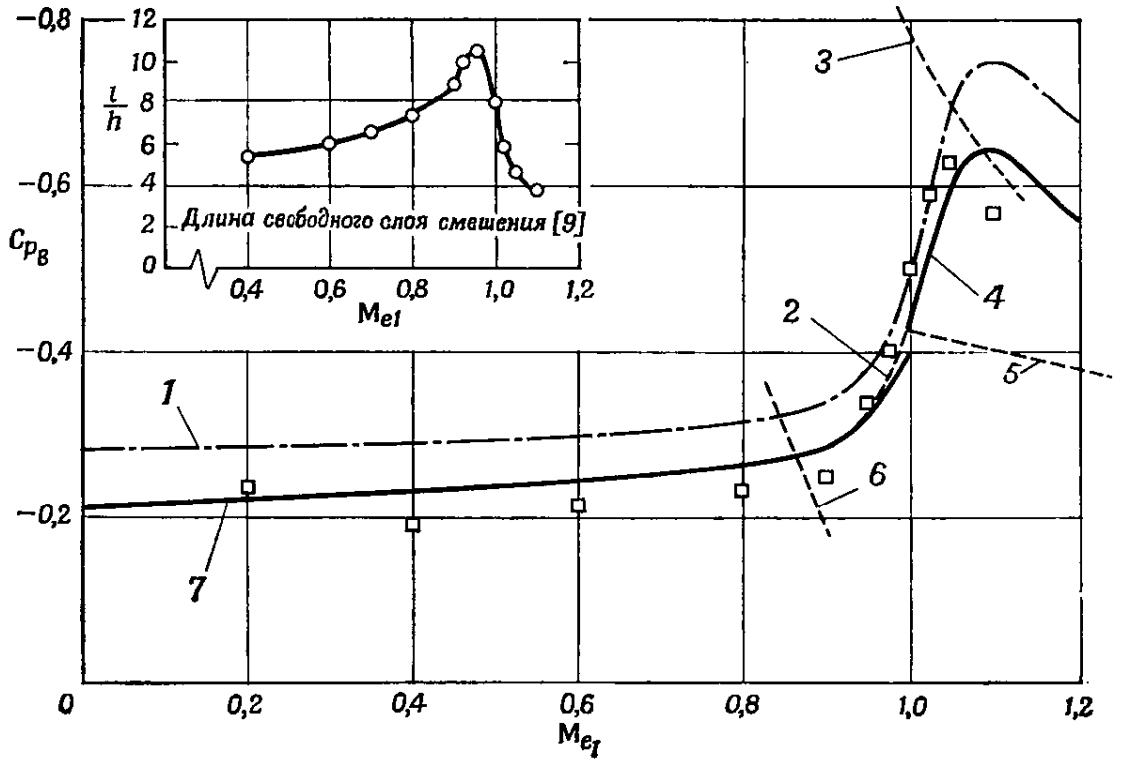
Заметим, что крутое падение расчетного донного давления вблизи скорости звука связано с таким же характером уменьшения величины N. В верхнем левом углу фиг. 50 приведена длина свободного слоя смешения, или, точнее, ее проекция на поверхность за уступом в рассматриваемом интервале чисел Маха.

Из фиг. 50 ясно видно, что донное давление увеличивается в присутствии пограничного слоя по сравнению с предельным случаем $\theta = 0$. Влияние начального пограничного слоя на процесс присоединения и, следовательно, на донное давление обусловлено отклонением от асимптотической формы слоя смешения, связанным с определенным профилем скорости в точке отрыва.



Ф и г. 49. Донное давление за крыловым профилем в зависимости от числа Рейнольдса, рассчитанного по хорде [53].

T — точка перехода.



Ф и г. 50. Донное давление за уступом при дозвуковых и трансзвуковых скоростях. Сравнение теории и эксперимента [53].

1 — $\theta = 0$, расчет по уравнению (105); *2* — расчет по уравнению (103); *3* — профиль с затупленной задней кромкой [9]; *4* — расчет по уравнению (102); *5* — расчет Корста; *6* — местное число Маха 1; *7* — $\theta/h = 0{,}026$, расчет по уравнению (101); □ экспериментальные данные [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Kirchhoff G. R., Zur Theorie freier Flüssigkeits-Strahlen, *Krelles J.*, **70** (1869).
2. Karman T., Nachr D., Wiss G., *Göttingen*, *Math. Phys.*, Klasse 509 (1911), 547 (1912); Karman T., Rubach H., Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes, *Phys. F.*, **49** (1912).
3. Roshko A., On the Drag and Shedding Frequency of Two-dimensional Bluff Bodies, NACA TN 3169, July 1954.
4. Heisenberg W., Die absoluten Dimensionen der Karmanschen Wirbelbewegung, *Phys. Z.*, **22**, 363—366 (1922).
5. Roshko A., On the Wake and Drag of Bluff Bodies, *J. Aeronaut.* Sci., **22**, № 2, 124—132 (Feb. 1955).
6. Hoerner S. F., Base Drag and Thick Trailing Edges, *J. Aeronaut. Sci.*, **17**, № 10, 622—628 (Oct. 1950).
7. Hoerner S. F., Fluid-Dynamic Drag, 1958.
8. Nash J. F., A Review of Research on Two-dimensional Base Flow, National Physical Laboratory Aero. Rept. 1006, 1962.
9. Nash J. F., Quincey V. G., Callinan J., Experiments on Two-dimensional Base Flow at Subsonic and Transonic Speeds, National Physical Laboratory, NPL Aero. Rept 1070, Jan. 1963.
10. Crocco L., Lees L., A Mixing Theory in the Interaction between Dissipated Flows and Nearly Isentropic Streams, *J. Aeronaut. Sci.*, **19**, № 10, 649 (Oct. 1952).
11. Hill F. K., Alpher R. A., Base Pressure at Supersonic Velocities, *J. Aeronaut. Sci.*, **16**, № 3, 153—160 (March 1949).
12. Kurzweg H. H., Interrelationship between Boundary Layer and Base Pressure, *J. Aeronaut. Sci.*, **18**, № 11, 743—748 (Nov. 1951).
13. Bogdonoff S. M., A Preliminary Study of a Reynolds Number Effects on Base Pressure at $M = 2.95$, *J. Aeronaut, Sci.* **19**, № 3, 201—206 (March 1952).
14. Chapman D. R., An Analysis of Base Pressure at Supersonic Velocities and Comparison with Experiment, NACA TR 1051 (Supersedes NACA TN 2137), (July 1950).
15. Kavanau L. L., Some Base Pressure Results at Intermediate Reynolds Numbers with $M = 2{,}84$, *J. Aeronaut. Sci.*, **21**, № 4, 257—260 (April 1954).
16. Kavanau L. L., Base Pressure Studies in Rarefied Supersonic Flows, *J. Aeronaut. Sci.*, **23**, № 3, 193—207 to 230 (March 1956).
17. Tsien H. S., Super Aerodynamics, Mechanics of Rarefied Gases, *J. Aeronaut. Sci.*, **13**, № 12, 653—665 (Dec. 1946).
18. Современное состояние аэродинамики больших скоростей, под ред. Хоуарта, ИЛ, М., 1956, т. II, гл. XIII, стр. 271—274.
19. Lorenz H., Der Geschosswiderstand, *Phys. Z.*, **18**, 209 (1917); **29**, 437 (1928).
20. Gabeaud M., Sur la résistance de l'air aux vitesses ballistiques, *Compt. Rend. Acad. Sci.*, **192**, 1630 (1931).
21. von Karman, Moore N. B., The Resistance of Slender Bodies Moving at Supersonic Velocities, *Trans. ASME*, **54**, 303 (1932)
22. Chapman I. R., Wimbrow W. R., Kester R. H., Experimental Investigation of Base Pressure on Blunt Trailing-edge Wings at Supersonic Velocities, NACA TN 2611, 1952.
23. Busemann A., Walchner O., Airfoil Characteristics at Supersonic Speeds, RTP Trans. № 1786, British Ministry of Air Production, *Forschung aus dem Gebiet des Ingenierswesens*, **4**, 87—92 (March, April 1933).
24. Valensi J., Pruden F. W., Some Observations on Sharp-nosed Profiles at Supersonic Speed, ARS R & M, № 2482, 1947.

25. Charwat A. F., Yakura J. K., An Investigation of Two-dimensional Supersonic Base Pressures, *J. Aeronaut. Sci.*, 25, № 2, 122—128 (Feb. 1958).
26. Gadd G. E., Holder D. W., Regan J. D., Base Pressure in Supersonic Flow, ARC Text Rept CP, № 271, 1955.
27. Gooderum P. B., Wood G. P., Brevoort J., Investigation with an Interferometer of the Turbulent Mixing of a Free Supersonic Flow, NACA Rept, 963, 1950.
28. Badrinarayanan M. A., An Experimental Investigation of Base Flows at Supersonic Speeds, *J. Roy. Aeronaut. Soc.*, 65, 475—482 (July 1961).
29. Van Driest E. R., Turbulent Boundary Layer in Compressible Fluids, *J. Aeronaut. Sci.*, 18, № 3, 145—160, 216 (March 1951).
30. Korst H. H., A Theory of Base Pressures in Transonic and Supersonic Flow, *J. Appl. Mech.*, 23, № 4, 593—600 (Dec. 1956).
31. Korst H. H., Auflösung eines ebenen Freistrahlrandes bei Berücksichtigung der ursprünglichen Grenzschichts-strömung, *Österreiches Ing. Archiv*, 7, № 2 (1954).
32. Korst H. H., Page R. H., Childs M. E., Compressible Two-dimensional Jet Mixing at Constant Pressure, University of Illinois, ME-TN-392-1, OSR-TN-54-82, Contract № AF 18(600)-392, April 1954.
33. Korst H. H., Page R. H., Childs M. E., Compressible Two-dimensional Jet Mixing at Constant Pressure—Tables of Auxiliary Functions for Fully Developed Mixing Profiles, University of Illinois, ME-TN-392-3, OSR-TN-55-99, Contract № AF 18(600)-392, April 1955.
34. Eggink H., The Improvement in Pressure Recovery in Supersonic Wind Tunnels, ARC Tech. Rept., R & M, № 2703.
35. Goin K. L., Effects of the Plan Form, Airfoil Section, and Angle of Attack on the Pressure along the Base of Blunt Trailing-edge Wings at Mach Numbers of 1,41, 1,62 and 1,96, NACA RM L52D21, 1952.
36. Liepmann H. W., Laufer J., Investigations on Free Turbulent Mixing, NACA TN 1257, 1947.
37. Chow W. L., On the Base Pressure Resulting from the Interaction of a Supersonic External Stream with a Sonic or Subsonic Jet, *J. Aerospace Sci.*, 26, № 3, 176—180 (March 1959).
38. Fuller L., Reid J., Experiments on Two-dimensional Base Flow at M = 2.4, Brit. RAE Rept Aero. 2569, 1956.
39. Wimbrow W. R., Effect of Base Bleed on the Base Pressure of Blunt Trailing-edge Airfoils at Supersonic Speeds, NACA RM A54A07, 1954.
40. Korst H. H., Tripp W., The Pressure on a Blunt Trailing Edge Separating Two-supersonic Two-dimensional Air Streams of Different Mach Numbers and Stagnation Pressures, but Identical Stagnation Temperatures, Paper presented at the Midwest Conferences on Solid and Fluid Mechanics, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, April 1957.
41. Carrière P., Sirieix M., Facteurs d'influence du récolement d'un écoulement supersonique, Paper presented to 10th International Congress of Applied Mechanics, Stresa, Sept. 1960, ONERA Memo Tech. 20, 1961.
42. Kirk F. N., An Approximate Theory of Base Pressure in Two-dimensional Flow at Supersonic Speeds, RAE TN Aero 2377, March 1954, Issued Dec. 1959.
43. Karashima K., Base Pressure on Two-dimensional Blunt Trailing-edge Wings at Supersonic Velocities, Aeronautical Research Institute, University of Tokyo, Rept № 368, Vol 27, № 8, Oct. 1961.
44. Görtler H., Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungssatzes, *Z. angew. Math. Mech.*, 22 (1942).
45. Reichardt H., Gesetzmässigkeiten der freien Turbulenz, VDI-Forschungsheft 414, 1951.

46. Gooderum P. B., Wood G. P., Brevoort M. J., Investigation with an Interferometer of the Turbulent Mixing of a Supersonic Jet, NACA Rept № 963, 1950.
47. Schubauer G. B., Klebanoff P. S., Investigation of Separation of the Turbulent Boundary Layer, NACA TN 2133, 1950.
48. Chapman D. R., Laminar Mixing of a Compressible Fluid, NACA TN 1800, 1950.
49. Chapman D. R., A Theoretical Analysis of Heat Transfer in Regions of Separated Flows, NACA TN 3792, 1956.
50. Chapman D. R., Kuehn D. M., Larson H. K., Investigation of Separated Flows in Supersonic and Subsonic Streams with Emphasis on the Effect of Transition, NACA TN 3869, 1957.
51. Денисон, Баум, Сжимаемый свободный струйный пограничный слой с ненулевой начальной толщиной, *Ракетная техника и космонавтика*, № 2 (1963).
52. Baum E., King H. H., Denison M. R., Recent Studies of the Laminar Base Flow Region, AIAA 1st Aerospace Science Meeting, N. Y., Preprint 64-5, Jan. 1964.
53. Nash J. F., An Analysis of Two-dimensional Turbulent Base Flow, Including the Effect of the Approaching Boundary Layer, ARC R & M, № 3344, July 1962.
54. Van Hise V., Investigation of Variation in Base Pressure over the Reynolds Number Range in which Wake Transition Occurs for Two-dimensional Bodies at Mach Numbers from 1.95 to 2.92, NASA TN D-167, Nov. 1959.
55. Sirieix M., Pression de culot et processus de mélange turbulent en écoulement supersonique plan, *Recherche aéronaut*, № 78, 13 (Sept.-Oct. 1960).
56. Thomann H., Measurements of Heat Transfer and Recovery Temperature in Regions of Separated Flow at a Mach Number of 1,8, FFA Rept 82, Stockholm, 1959.

БИБЛИОГРАФИЯ

Baum E., Effect of Boundary-layer Distortion at Separation on the Laminar Base Flow, Electro-Optical Systems Inc., Pasadena, Calif., EOS Research Note № 16, Oct. 1963.

Баум Е., Начальное развитие отрывного ламинарного струйного течения, *Ракетная техника и космонавтика*, № 1 (1964).

Brown J., Turbulent Base Flow behind a Slender Supersonic Re-entry Vehicle, General Electric Re-entry Systems Dept., 63SD849, May 1964.

Butsko J. E., Prediction of the Subsonic Base Drag of Hypersonic Re-entry Vehicles, AIAA 3rd Annual Meeting, Boston, Mass., Paper № 66-991, Nov.-Dec. 1966.

Butsko J. E., Carter W. V., Herman W., Development of Subsonic Base Pressure Prediction Methods, Air Force Flight Dynamics Lab., AFFDL-TR-65-157, Vol. I, Sept. 1965.

Butsko J. E., Carter W. V., Herman W., Development of Subsonic Base Pressure Prediction Methods, Air Force Flight Dynamics Lab., AFFDL-TR-65-157, Vol. II, Sept. 1965.

Carlson W. O., A Solution for Heat Transfer in Laminar Separated and Wake Flow Regions, Missile and Space Vehicle Dept., General Electric, № R59SD356, March 1959.

Cassanto J. M., Ratio on Base Pressure, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Copyright 1965, Vol. 3, № 12.

Chapman D. R., Reduction of Profile Drag at Supersonic Velocities by the Use of Airfoil Sections having a Blunt Trailing Edge, NACA TN 3503, Sept. 1955.

Fail R., Lawford J. A., Eyre R.C.W., Low Speed Experiments on the Wake Characteristics of Flat Plates Normal to an Airstream, RAE TN Aero. 2516, ARC 19.958, FM 2652-0.1393, June 1957.

Francis W., Davey W. T., Base Heating Experiments on Slender Cones in Hypersonic Flow, IAS National Summer Meeting, Calif., Paper № 62-179, June 1962.

Hastings R. C., Turbulent Flow Past Two-dimensional Bases in Supersonic Streams, Royal Aircraft Est., Tech. Note № Aero. 2931, Dec. 1963.

Hawkins R., Trevett E. G., Changes in the Flow at the Base of a Bluff Body Due to a Disturbance in Its Wake, AGARD Rept 539, May 1966.

Herzog R. T., Nitrogen Injection Into the Base Region of a Hypersonic Wake, Graduate Aeronautical Labs., California Institute of Technology, 1964.

Hickman R. S., Hidalgo H., Feldman S., Some Experiments on the Base Flow Region behind Slender Bodies at Hypersonic March Numbers, Heliodyne Corp., Research Rept 3, Oct. 1962.

King H. H., Some Base Flow Closure Angle Results for Cones in Free Flight, Electro-Optical Systems, Inc., Research Note 21, Jan. 1964.

King H. H., A Tabulation of Base Flow Properties for Cones and Wedges, Electro-Optical Systems, Inc., Research Note 17, Jan. 1964.

King H. H., Baum H., Effect of Base Bleed on the Laminar Base Flow, Electro-Optical Systems, Inc., Research Note 10, May 1963.

King H. H., Denison M. R., Turbulent Mixing in the Base Flow Region, Electro-Optical Systems, Inc., EOS Research Note № 24, May 1965.

Larson R. E., Scott C. J., Elgin D. R., Seiver R. E., Turbulent Base Flow Investigations at Mach Number 3, Univ. of Minnesota, Inst. of Technology, Rosemount Aeron. Labs., Research Rept, № 183, July 1962.

McDonald H., Turbulent Shear Layer Reattachment with Special Emphasis on the Base Pressure Problem, English Electric Aviation Ltd., Warton, Aerodynamics Tech. Note Aero. 175, Feb. 1963.

Moretti G., Abbett M., Numerical Studies of Base Flow, Tech. Rept. № 584, GASL, March 1966.

Moulden T. H., MacDonald A. G. J., A Note Comparing Two Methods of Base Drag Reduction (готовится к печати).

Мышкова Л. И., О влиянии взаимодействия диссипативного и изэнтропического потоков на течение в донной области тел, движущихся с гиперзвуковой скоростью, *Вестник ЛГУ*, сер. Мат., мех., астроном., вып. 4, стр. 112—119 (1966).

Nash J. F., A Discussion of Two-dimensional Turbulent Base Flows, National Physical Lab., Aero. Rept 1162, ARC, July 1965.

Newman B. C., Turbulent Jets and Wakes in a Pressure Gradient, McGill Univ., Montreal, Canada, 1967.

Roberts J. B., On the Prediction of Base Pressure in Two-dimensional Supersonic Turbulent Flow, Ministry of Aviation, Nat. Gas Turbine Est., NGTE Rept № R 265, Nov. 1964.

Rom J., Theory for Supersonic Two-dimensional Laminar Base Type Flows using the Crocco-Lees Mixing Concepts, Technion-Israel Inst. of Technology, Tech. Note № 1, TAE Rept, 20.

Rom J., Victor M., Correlation of the Base Pressure behind a Two-dimensional Backward-facing Step in a Laminar Supersonic Flow, Tech. Note № 2, TAE Rept № 23, Dec. 1962.

Roshko A., On the Development of Turbulent Wakes from Vortex Sheets, NACA TN 2913, March 1953.

Saltzman E. J., Preliminary Base Pressures Obtained from the X-15 Airplane at Mach Numbers from 1.1 to 3.2, NASA TN, D-1056, Aug. 1961.
Sedney R., Review of Base Drag, Ballistic Research Labs., US Army Materiel Command, Rept № 1337, Oct. 1966.
Wan K. S., On the Base-flow Characteristics of Blunt and Slender Bodies, Space Sciences Lab., General Electric, R 6SD96, Nov. 1962.
Weiss R. F., Weinbaum S., Hypersonic Boundary Layer Separation and the Base Flow Problem, BSD-TR-65-305, Research Rept 221, July 1965; также Уэйсс, Вайнбаум, Отрыв гиперзвукового пограничного слоя и проблема течения в донной области, *Ракетная техника и космонавтика*, № 8 (1966).

Глава XI

ТЕПЛОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Обозначения

a^* — критическая скорость звука;
a_1 — коэффициент;
b — ширина плоского течения;
b_1 — коэффициент;
C — постоянная, в частности $C = \frac{\mu}{\mu_e}\frac{T_e}{T}$;
c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении;
e — удельная внутренняя энергия;
$f = u/u_e$;
H — полная энтальпия; отношение полной температуры внутри пограничного слоя к ее величине на границе пограничного слоя;
h — коэффициент теплоотдачи, удельная или статическая энтальпия;
h' — высота уступа или глубина выемки;
K — постоянная;
k — коэффициент теплопроводности;
L — длина хорды; длина модели; характерная длина;
l — безразмерное расстояние; длина участка подвода тепла в пограничный слой; длина слоя смешения;
Q — полный тепловой поток;
q — тепловой поток;
R — газовая постоянная;
r — радиус; коэффициент восстановления $r = \int\limits_0^\infty (H - f)\, dl$;
St — число Стэнтона;
T_{aw} — температура теплоизолированной стенки;
$T_* = T/T_e$;
t — время; переменная толщина $y = \int\limits_0^t (T/T_e)\, dt$;
$u_* = u/u_e$;
$X = x/L$;
x' — расстояние вниз по потоку от уступа;
$x_* = x/l$;

$Y = y/L$; $Y = 1/\sqrt{\nu_e}\int\limits_0^{\bar{y}} (\rho/\rho_e)\, d\bar{y}$;

Y_0 — значание Y на поверхности тела;

z — переменная;

$\alpha = (Y - Y_0)/(\triangle - Y_0)$; угол атаки;

Δ — преобразованная координата внешней границы слоя смешения;

$\zeta = \psi_*/\sqrt{x_*}$ — безразмерная переменная потока массы;

$\eta = {}^1/_2 \int\limits_0^{\zeta} (d\zeta/u_*)$;

$\theta = [(T_r - T_w)/T_e]\,[1/{}^1/_2\,(\gamma - 1)\, M_e^2]$;

λ — параметр; коэффициент теплопроводности;

$\xi = x/L$, $u_e/u_\infty = 1 - \xi$;

τ — напряжение трения; $\tau = t/\delta_t$;

φ — угол, измеряемый от критической точки цилиндра;

$\psi_* = \psi\sqrt{\nu_e u_e l_c}$;

Ω — интенсивность вихря.

Индексы

a — присоединенный поток;

aw — теплоизолированная стенка;

d — основной поток;

e — внешняя граница пограничного слоя; эффективное значение;

f — плоская пластина; средняя температура;

вн — внутримолекулярное движение;

r — восстановление;

s — заторможенный;

$\bar{}$ — осреднение; плоское течение;

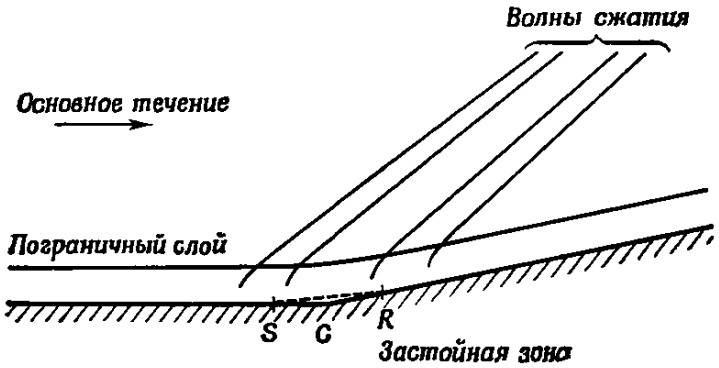
$'$ — дифференцирование по ξ.

Содержание настоящей главы было вкратце изложено в гл. I, здесь же будет подробнее рассмотрено влияние теплопередачи на положение точки отрыва и на некоторые типы отрывных течений, описанных в гл. VII, в том числе течения в каверне, перед клином и за иглой. Влияние теплопередачи на след рассматриваться не будет, так как оно было исследовано в гл. VIII, но в настоящую главу включен вопрос о теплопередаче к поверхности тела, находящегося в следе. Теплопередача в отрывных областях при дозвуковых скоростях важна для расчета теплообменных устройств, но с ростом скорости летательных аппаратов становится

очень важной оценка влияния аэродинамического нагрева на эффективность интерцептеров и шарнирные моменты органов управления типа закрылков при отрыве, а также на характеристики диффузоров. Вследствие отрыва потока некоторые области, такие, как область присоединения, представляют собою «горячие пятна». До настоящего времени теоретические исследования влияния теплопередачи на отрыв потока относились главным образом к ламинарному течению.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕ В ОБЛАСТЯХ ОТРЫВНОГО ТЕЧЕНИЯ

До сих пор нет полного представления о теплопередаче в начале отрыва и характеристиках отрывных течений, однако опубликованные работы на эту тему дают некоторую информацию об этом явлении.



Фиг. 1. Течение перед клином, установленным на плоской пластине [1].

В гл. I уже упоминалась работа Гэдда [1], посвященная влиянию теплопередачи на отрыв потока воздуха, приводящему к изменениям градиента давления и протяженности области отрыва. Напомним, что при охлаждении стенки градиент давления увеличивается, а протяженность области отрыва уменьшается. При температуре стенки T_w, меньшей температуры T_{w_z}, которая соответствует отсутствию теплопередачи, отрыв не обязательно происходит при давлении, большем, чем при отсутствии теплопередачи, вследствие того что вязкость газа уменьшается при охлаждении и это благоприятствует отрыву. Так как это соображение не может служить объяснением, попытаемся сделать это, рассматривая изменение градиента давления в точке отрыва. Воспользуемся схемой течения, представленной на фиг. 1, и введем безразмерное расстояние

$$l = \frac{1}{\theta} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} dy.$$

Тогда профиль скорости в области взаимодействия $f = u/u_e$ при любом T_w/T_{w_z} и $T_w = \text{const}$ можно считать функцией одного параметра l, не зависящей от числа Маха и Рейнольдса. Отношение H полной температуры внутри пограничного слоя к ее величине на внешней границе можно считать функцией l и одного дополнительного параметра.

На стенке

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1}$$

и

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\mu_e u_e}{\theta^2} \frac{T_e}{T_w} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial l^2}\right)_w,$$

если коэффициент μ пропорционален T.

Теперь на основании приближения первого порядка для течения в простой волне получаем

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{(M_\infty^2 - 1)^{1/2}} \frac{d^2\delta^*}{dx^2} \tag{2}$$

и

$$\frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 + \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right) r, \tag{3}$$

где

$$r = \int_0^\infty (H - f)\, dl.$$

Из уравнений (2) и (3) следует, что во всей области взаимодействия при $M_\infty \approx M_e$ и $\theta = \text{const}$

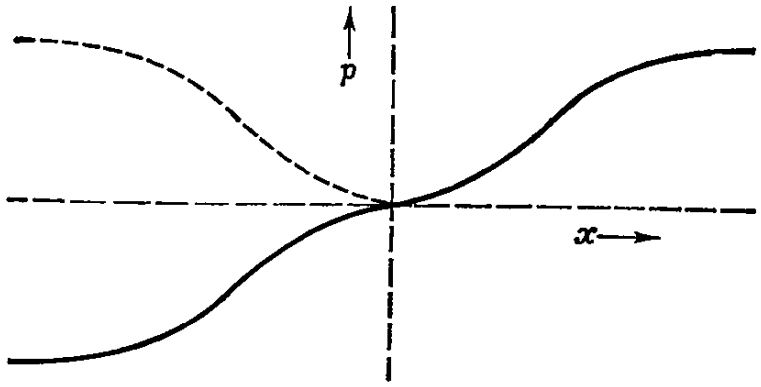
$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho_\infty u_\infty^2 \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_\infty^2\right] \theta}{(M_\infty^2 - 1)^{1/2}} \frac{d^2 r}{dx^2}.$$

Другое допущение, что $(\partial^2 f/\partial l^2)_w$ является функцией r, следует из предположения об однопараметрической зависимости, и с помощью уравнения (1) получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

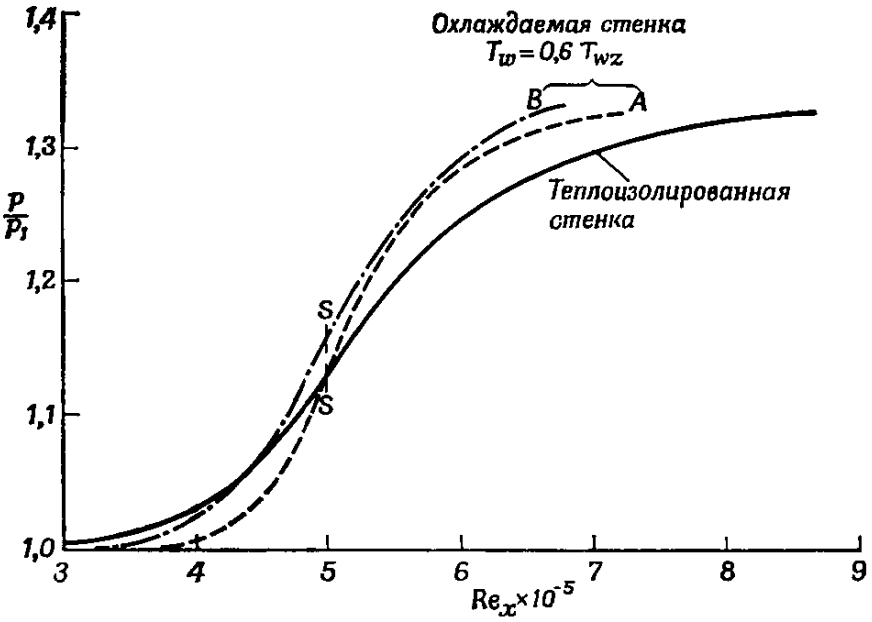
$$\frac{d^2 r}{dx^2} = KF(r),$$

решением которого является

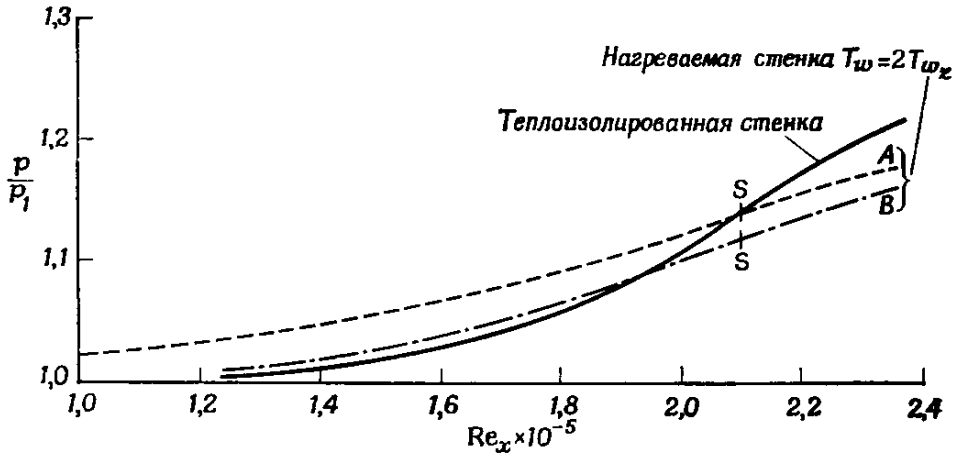
$$\frac{dr}{dx} = \pm \left[2K \int_{r_c}^{r} F(r)\, dr\right]^{1/2}, \tag{4}$$



Ф и г. 2. Теоретическое распределение давления, отображенное относительно двух осей симметрии [1].

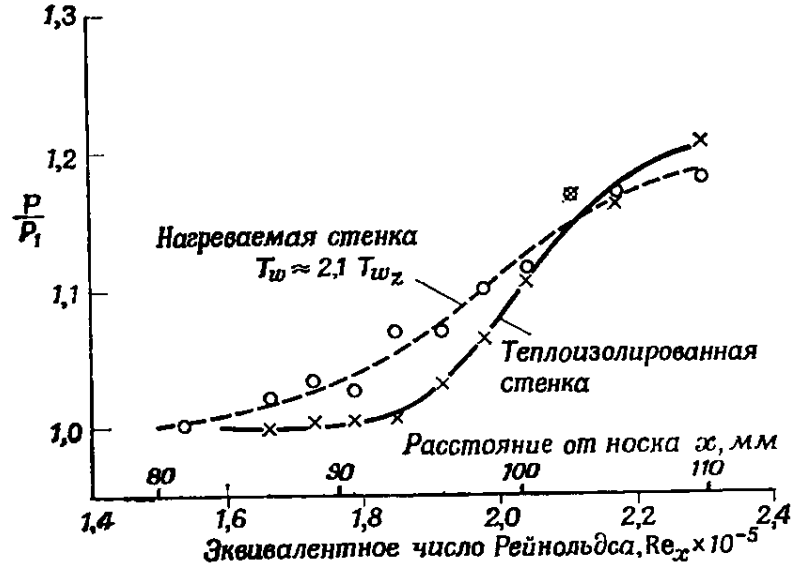


Ф и г. 3. Расчет влияния охлаждения, $M_\infty = 3$ [1].
p_1 — давление перед областью взаимодействия.

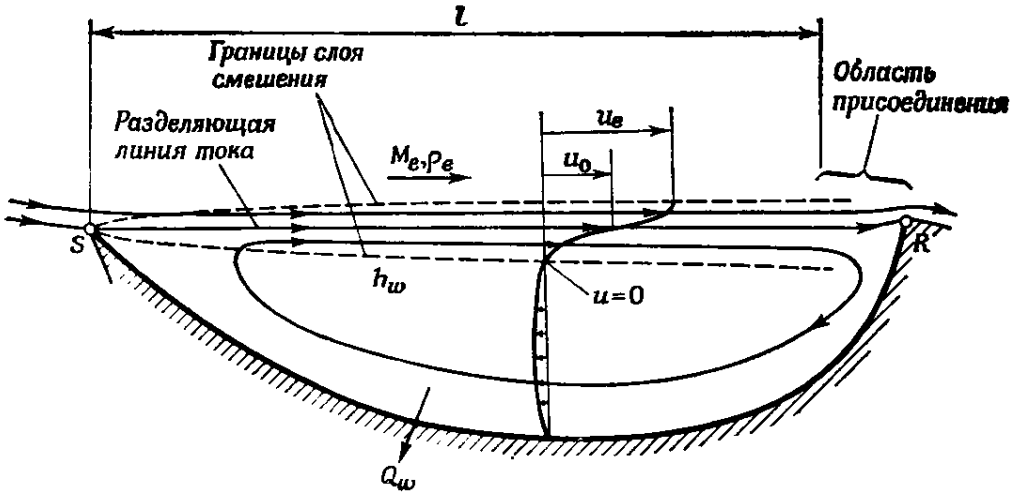


Ф и г. 4. Расчет влияния нагревания, $M_\infty = 2{,}73$ [1].

где $K = \text{const}$, а r_c — значение r при постоянном давлении, например перед областью взаимодействия и за ней. Положительный знак в уравнении (4) соответствует течению перед углом, отрицательный — течению за углом (фиг. 1). На фиг. 2 приве-



Фиг. 5. Измеренное распределение давления с нагреванием и без него [1].



Фиг. 6. Схема течения в области отрыва (растянута в вертикальном направлении) [6].

дено расчетное распределение давления, симметричное относительно угла (отображено относительно двух осей симметрии).

Гэдд выделяет метод А, в котором используется автомодельный профиль скорости для теплоизолированной стенки, и метод В, в котором применяются профили скорости и полной температуры, полученные из автомодельных решений при той же величине T_w/T_{w_z}, но при наличии теплопередачи (T_{w_z} — температура теплоизолированной стенки). В случае $H = 1$ оба метода идентичны и соответствуют теплоизолированной стенке. На фиг. 3 показано влияние охлаждения стенки при отрыве, когда $T_w =$

$= 0{,}6\ T_{w_z}$, $M_\infty = 3$, $Re_x = 5 \cdot 10^5$. Согласно методу А, охлаждение приводит только к увеличению градиента давления, а само давление при отрыве не меняется. Согласно методу В, значительно возрастают не только градиенты, но и приращение давления перед отрывом становится больше. Оба метода предсказывают, что охлаждение противодействует отрыву. На фиг. 4 показано влияние нагревания стенки при отрыве, когда $T_w = 2T_{w_z}$, $M_\infty = 2{,}73$, $Re_x = 2{,}1 \cdot 10^5$. Как правило, влияние нагревания стенки противоположно влиянию охлаждения.

Результаты измерений и расчетов Гэдда [1] для кругового цилиндра с острым носком хорошо согласуются (фиг. 5).

Изменение градиента давления под влиянием теплопередачи для ламинарного течения сжимаемой среды было подтверждено экспериментально Гэддом и Этриджем [2] при $M_\infty = 3$ и приблизительно постоянной температуре стенки, равной 150° С; качественно измеренное давление хорошо соответствовало результатам расчетов Брея и др. [3].

Экспериментальные данные Гэдда и др. [4], относящиеся к отрывным течениям перед уступом, обращенным навстречу потоку, и за уступом, расположенным по потоку, при $M_\infty = 2{,}44$ были представлены в гл. I. Гэдд и др., а также Бернард и Систрунк [5] измерили малую величину h вблизи уступа, расположенного по потоку. Чепмен попытался дать физическое объяснение теплопередачи в отрывных течениях, пользуясь схемой, приведенной на фиг. 6.

Предполагается, что в вязком слое, являющемся, по-видимому, слоем смешения, давление постоянно, за исключением окрестности области присоединения, и что на большей части своей длины этот слой удален от стенки, поэтому воздух между ним и стенкой можно считать фактически неподвижным, а температуру в области отрыва равной температуре стенки.

Линия тока постоянной скорости отделяет воздух основного течения от увлекаемого из застойной области. Рассмотрим поток полной энергии в области отрыва. Разделяющая линия тока касается стенки в точке присоединения, где внутренний поток газа поворачивает назад и возвращается в область отрыва, сохраняя свою полную энергию. При замедлении возвратного течения вдоль стенки она нагревается, прежде чем это течение попадает в область смешения. Разность между потоком энергии, возвращаемым в область отрыва и увлекаемым слоем смешения, равна среднему тепловому потоку к стенке в области отрыва. Таким образом, в случае растянутых отрывных течений с толстыми областями отрыва средний тепловой поток к поверхности на участке между отрывом и присоединением больше по сравнению с соответствующим тепловым потоком к плоской пластине с присоединенным пограничным слоем. Этот тепловой поток в 6,3 раза

больше, чем в пограничном слое несжимаемой среды с теми же условиями на внешней границе, что и на границе слоя смешения. Однако за присоединением следует ожидать большой плотности теплового потока, обусловленной «тонким» пограничным слоем, начинающимся от точки присоединения [7].

2. ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ НА ОТРЫВ ПРИ ДОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Известны результаты исследований теплопередачи при дозвуковых скоростях для изолированных плохо обтекаемых тел, таких, как пластины или круговые цилиндры с осями, перпендикулярными направлению потока, сферы, а также пучки цилиндров или труб с осями, перпендикулярными направлению потока. Кроме того, были выполнены исследования теплопередачи со ступенчатым изменением теплового потока при дозвуковых скоростях. При малых скоростях потока теплопередача в областях отрыва обусловлена главным образом конвекцией, но так как в большинстве случаев возможен только приближенный расчет, за исключением простых оценок, подавляющее число исследований относится к экспериментальным.

Основное соотношение для теплопередачи в отрывных течениях при дозвуковых скоростях можно представить в виде [8]

$$\mathrm{Nu} = C\,\mathrm{Re}^{2/3}\mathrm{Pr}^{1/3}.$$

Постоянная C зависит от геометрии и критического числа Рейнольдса, при котором поток впервые отрывается от кормовой части тела. C можно представить в виде

$$C = (\mathrm{Re}^2_{\text{крит}}\ \mathrm{Pr})^{-1/3},$$

но $\mathrm{Re}_{\text{крит}}$ трудно определить даже для тел простейшей формы.

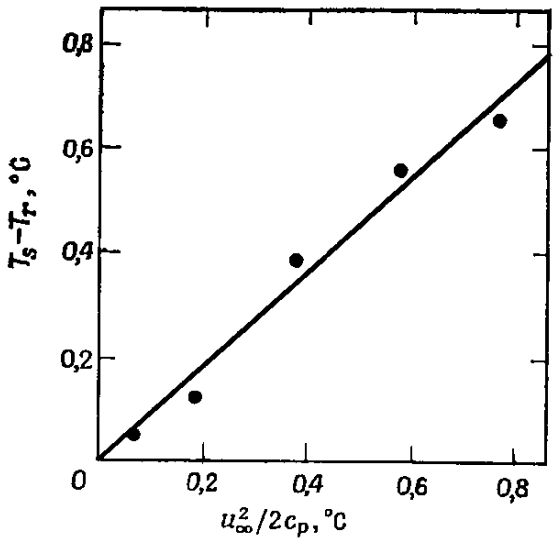
2.1. ТЕПЛООТДАЧА В ОБЛАСТИ ЗА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНОЙ

Соджин и др. [9] провели измерения теплоотдачи на передней и задней поверхностях электрически нагреваемой (до 93° С) пластины, перпендикулярной направлению потока в аэродинамической трубе при нормальных атмосферных условиях. Хорда пластины была равна 171 мм, а отношение площади пластины к площади рабочего сечения трубы составляло 0,211. Число Рейнольдса заключено в пределах от 100 000 до 450 000.

Искомые величины определялись при средней температуре слоя, определяемой соотношением

$$\frac{hL}{k} \sim \mathrm{Re}^{2/3},$$

где L — хорда пластины. Сильное влияние в области критической точки оказывали пульсации, и при установке турбулизирующей сетки измеренный тепловой поток возрастал на 50%. Теплопередача к задней поверхности фактически не зависит от теплопередачи к передней поверхности. Коэффициент восстановления, вычисленный по результатам измерений на задней стороне пластины, представлен на фиг. 7. Определяется этот коэффициент следующим образом:



Фиг. 7. Коэффициент восстановления по результатам измерений на задней стороне плоской пластины [9].

$$r = 1 - \frac{T_s - T_r}{u_\infty^2/2c_p},$$

где T_s и T_r — полная температура и температура теплоизолированной стенки, u_∞ — скорость набегающего невозмущенного потока.

Из графика следует, что $r = 0{,}1$ вдоль всей задней стороны пластины, что соответствует результатам для больших чисел Маха [10]. Согласно результатам, полученным в присутствии разделяющей пластины, установленной в донной области в плоскости симметрии, и сетки, коэффициент восстановления не изменяется, однако разделительная пластина приводит к снижению общего уровня теплового потока приблизительно на 35%, причем максимум теплового потока достигается в центре.

Тепловой поток к задней стороне пластины в интервале значений

$$\mathrm{Re}_f = \frac{u_\infty L \rho_f}{\mu_f} = 10^5 - 4{,}4 \cdot 10^5$$

можно вычислить по хорошо согласующейся с экспериментальными данными формуле (фиг. 8)

$$\mathrm{Nu}_f = C^* \mathrm{Re}_f^{2/3}.$$

Индекс f относится к средней температуре слоя; C^* — безразмерная величина, зависящая от установки разделительной пластины или сетки (табл. 1).

Во всех трех сериях экспериментов нагреваемая поверхность была обращена вниз по течению. В серии B сетка не применялась, скорость потока воздуха составляла от 11,6 до 40 м/с. В серии Sa сетка с размером ячеек 19 мм была расположена на расстоя-

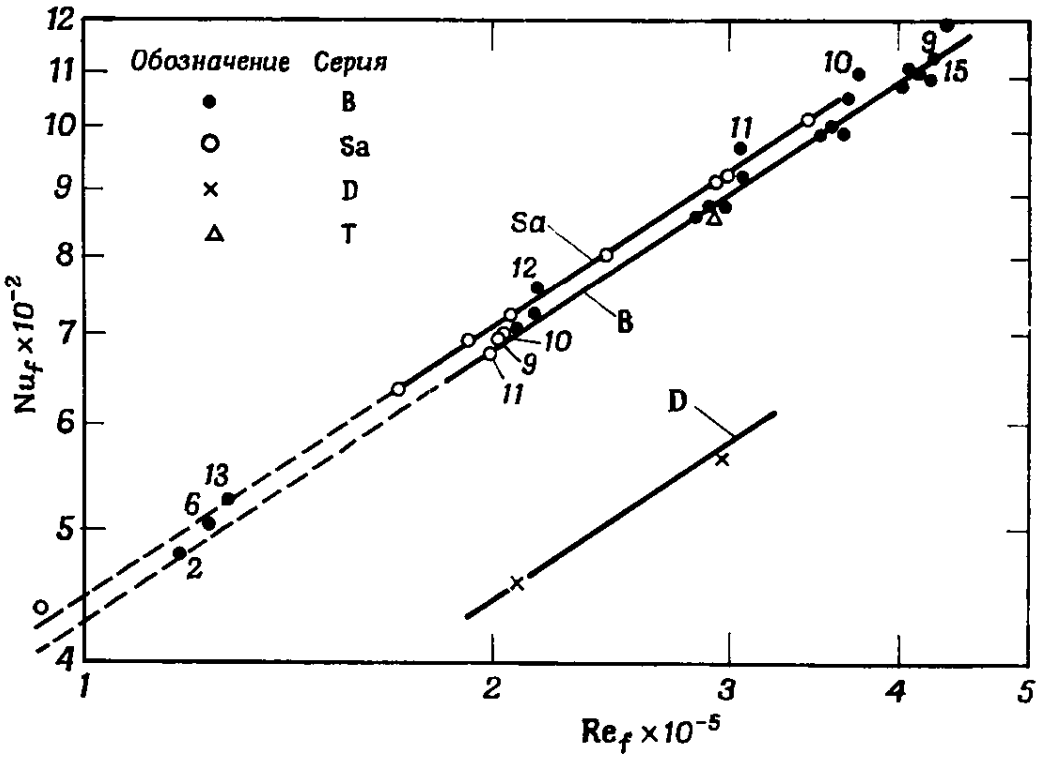
Таблица 1

ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА C^* ОТ УСЛОВИЙ ИСПЫТАНИЙ

Серия	C^*
B	0,199
Sa	0,207
D	0,129

нии 240 мм перед пластиной, скорость потока воздуха составляла от 9,5 до 34,2 м/с. В серии D за пластиной была симметрично установлена разделительная пластина толщиной 9,5 мм и длиной 229 мм, скорость потока воздуха составляла от 21 до 30 м/с.

Различные сетки перед пластиной почти не влияли на теплопередачу к задней ее стороне, что свидетельствует о незначительном влиянии интенсивности турбулентности основного течения или полном его отсутствии. Тепловой поток к пластине приблизительно на 18% выше, чем в задней критической точке цилиндра, следовательно, чем больше «затуплено» тело, тем выше тепловой поток к его дну.



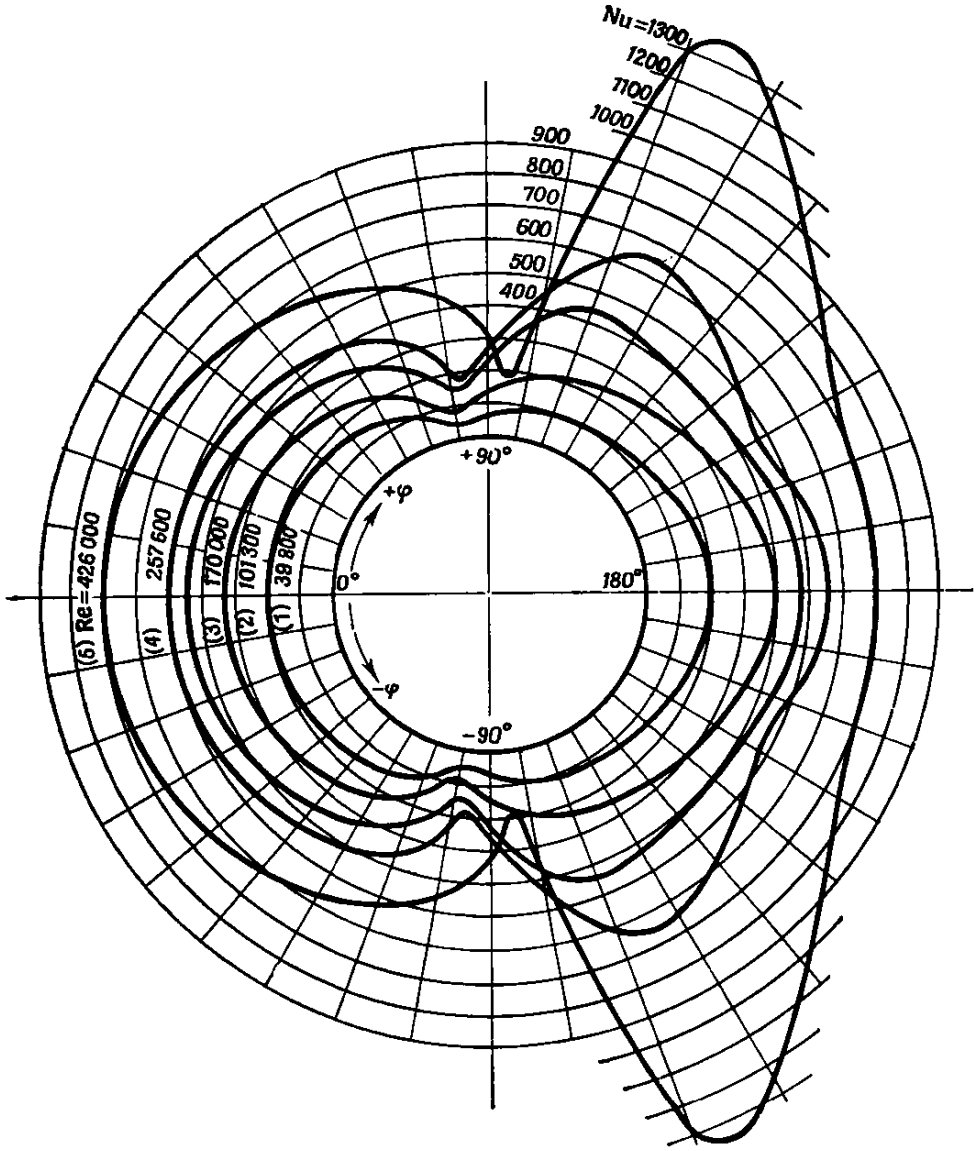
Фиг. 8. Зависимость Nu_f от Re для задней стороны пластины [9].
Цифрами обозначены порядковые номера экспериментов.

2.2. ТЕПЛООТДАЧА ОТ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, ОБТЕКАЕМОГО В ПОПЕРЕЧНОМ НАПРАВЛЕНИИ ПОТОКОМ ВОЗДУХА, И ОТ СФЕРЫ

Сведения о теплопередаче при малых числах Рейнольдса полезны для разработки приборов с нагреваемыми проволочками, такими, как термоэлементы и термоанемометры. Средний тепловой поток от кругового цилиндра и сферы был измерен различными исследователями [11—13]. Результаты измерений местных значений тепловых потоков приведены в работах [14—19].

2.2.1. Теплоотдача от поверхности кругового цилиндра при больших числах Рейнольдса

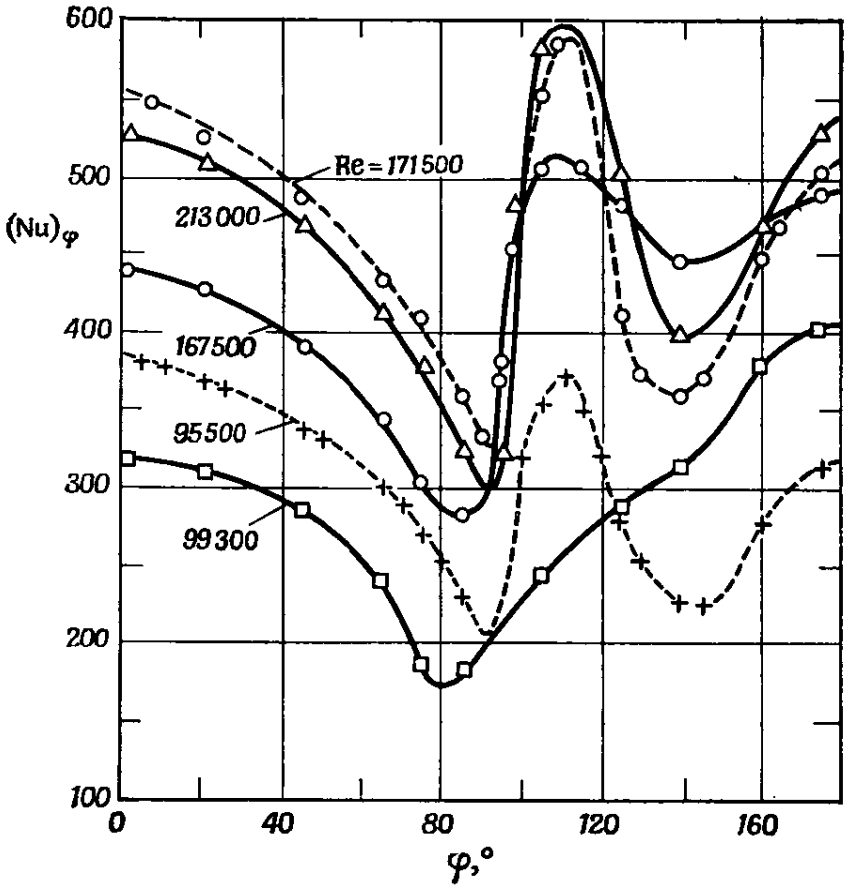
Шмидт и Веннер [20] определили коэффициент теплоотдачи в интервале чисел Рейнольдса от 5000 до 426 000 для отдельных латунных цилиндров диаметрами 50, 100 и 250 мм, нагреваемых до постоянной температуры 100° С (фиг. 9).



Фиг. 9. Типичная полярная диаграмма распределения теплоотдачи потока [20].
Кривые (*1*) и (*2*) соответствуют докритической области сопротивления, кривые (*3*) и (*4*) — критической области сопротивления, кривая (*5*) — закритической области (в данном случае концу критической области). Кривые получены для одной стороны и симметрично перенесены на другую сторону.

До $Re_d \sim 100\ 000$ максимальные значения теплового потока были зафиксированы в передней (0°) и задней (180°) критических точках, а минимум теплового потока имел место в окрестности точки $\varphi = 80°$. При $170\ 000 < Re_d < 426\ 000$ и $Re_d = 426\ 000$ существовали два других максимума в окрестности $\varphi = 115°$, причем тепловой поток в точ-

ках максимума почти вдвое превышал тепловой поток в передней критической точке, а задняя половина цилиндра отдавала около 60% всего тепла. Гидт [21, 22] определил местные значения числа Нуссельта Nu, коэффициента давления C_p и коэффициента трения c_f для неизотермического цилиндра и исследовал влияние уровня турбулентности набегающего потока воздуха



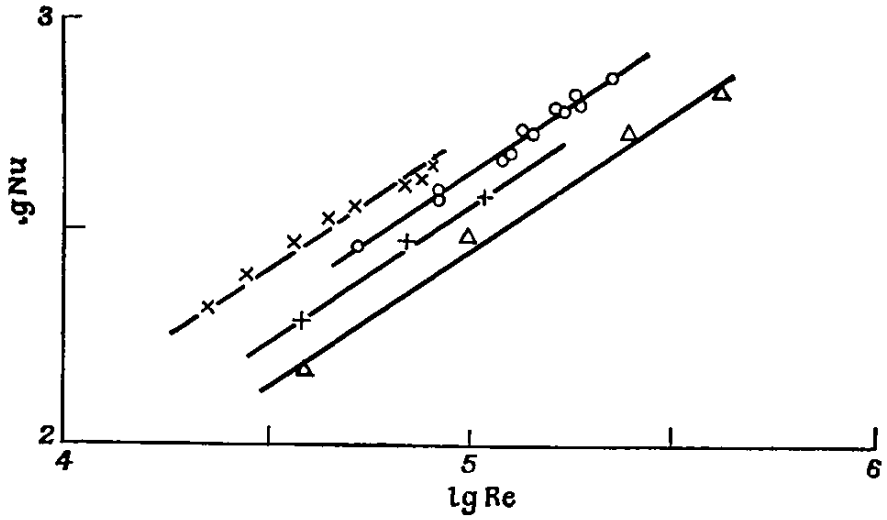
Фиг. 10. Местный тепловой поток от поверхности цилиндра при различных числах Рейнольдса [22].

——— поток за демпфирующей решеткой; — — — поток за проволочной сеткой, Re = 213 000 (нормальный поток в трубе). φ — угол, отсчитываемый от передней критической точки.

на местную теплопередачу и поверхностное трение в интервале чисел Рейнольдса $70\,800 < \mathrm{Re}_d < 219\,000$. Так как точность экспериментальных данных [21] вызывает сомнения [22] в связи с трудностями калибровки трубок полного давления, расположенных на поверхности, рассмотрим только результаты испытаний [22], отражающие влияние уровня турбулентности набегающего потока.

Переход ламинарного течения в турбулентное, по-видимому, происходит при $\mathrm{Re}_d = 167\,500$. На фиг. 10 видно, что все кривые теплового потока, за исключением одной для ламинарного течения при $\mathrm{Re}_d = 99\,300$, имеют два максимума и два минимума. Можно заметить также (фиг. 10), что положения минимумов теплового потока $\varphi \approx 85°$ и $\varphi \approx 145°$ совпадают с точкой отрыва ламинар-

ного потока и с началом роста давления в турбулентном потоке. Максимум теплового потока имеет место при $\varphi \approx 110°$ и совпадает с точкой отрыва турбулентного потока при отсутствии теплопередачи. Из фиг. 10 также видно, что при сравнимых величинах скорости набегающего потока местный коэффициент теплоотдачи



Фиг. 11. Местный тепловой поток в задней критической точке цилиндра, обтекаемого потоком воздуха [8].

Обозначение	$Nu/Re^{2/3}$	Загромождение сечения трубы	Источник
×	0,254	0,188	[16]
○	0,204	0,139	[18]
+	0,163	0,111	[17]
△	0,136	0,000	[20]

в критической точке при установке проволочной сетки приблизительно на 25% больше, чем за решеткой.

Значения числа Нуссельта в задней критической точке, полученные в работах [16, 18—20], представлены на фиг. 11.

Интенсивность турбулентности в этих испытаниях была самой низкой и, как ожидалось [8], число Нуссельта пропорционально числу Рейнольдса в степени $^2/_3$ (фиг. 11). Однако для результатов, полученных различными исследователями, величины постоянных множителей совершенно различны и не соответствуют идеальным значениям вследствие влияния стенок, сжимаемости, турбулентности набегающего потока, переменной температуры поверхности и т. д.

При постоянном числе Рейнольдса число Нуссельта растет с увеличением загромождения сечения трубы, а сжимаемость влияет на запаздывание перехода или увеличение устойчивости ламинарного пограничного слоя.

Эксперименты и немногочисленные теоретические исследования показывают, что рост интенсивности турбулентности набегающего потока при больших числах Рейнольдса вызывает значительное увеличение числа Нуссельта, в то время как при малых числах Рейнольдса этот эффект пренебрежимо мал [23].

2.2.2. Теплоотдача от поверхности кругового цилиндра при малых числах Рейнольдса

Эккерт и Зонген [24] наблюдали изотермы с помощью интерферометра Маха — Цендера при малых числах Рейнольдса (от 20 до 500) в области ламинарного течения. Они измерили также местные числа Нуссельта на поверхности круглых сплошных медных цилиндров диаметрами 12,7, 25,4 и 38,1 мм и длиной 229 мм, нагреваемых перед экспериментом. На поверхности нагретого тела при малых числах Рейнольдса формируется тепловой пограничный слой значительной толщины. Изотермы, наблюдаемые около цилиндра и за ним, показаны на фиг. 12. Видно, что с ростом числа Рейнольдса толщина теплового слоя уменьшается и точка отрыва смещается вниз по потоку.

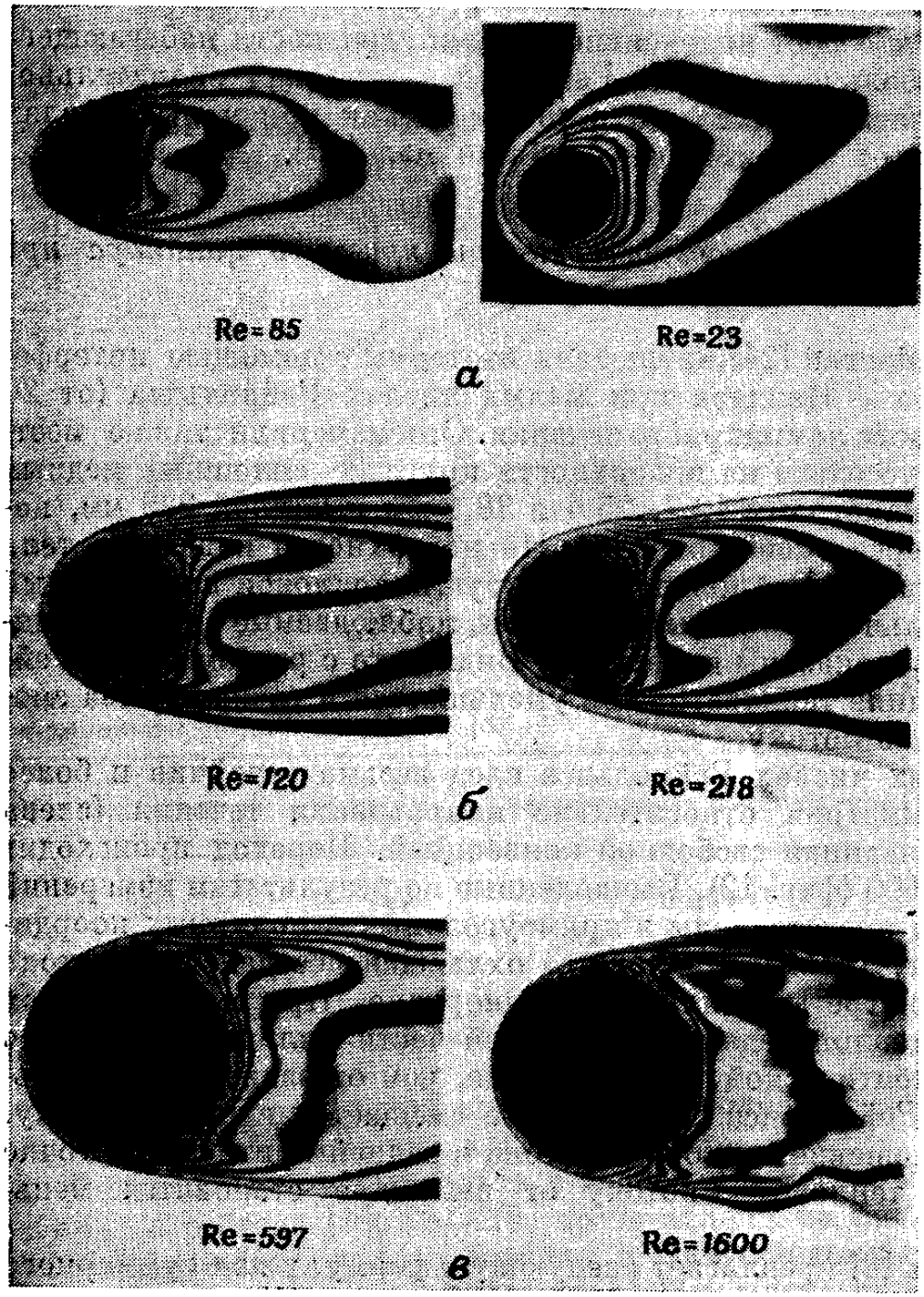
При малых числах Рейнольдса след весьма устойчив и более заметна асимметрия относительно направления течения (слева направо), вызванная свободной конвекцией. Переход происходит при $\mathrm{Re}_d = 1600$ (фиг. 12). Вычисленные по результатам измерений величины Nu представлены в прямоугольных и полярных координатах на фиг. 13—15. Видно, что охлаждающее действие потока воздуха на нагретый цилиндр неоднородно. При малых числах Рейнольдса теплопередача от передней части цилиндра (особенно в передней критической точке) больше, чем от задней. При больших числах Рейнольдса точка отрыва смещается вниз по потоку. При этом отношение теплового потока в задней критической точке к среднему тепловому потоку от цилиндра становится меньше 15%.

Ричардсон [8] предлагает следующую формулу для суммарного теплового потока от кругового цилиндра при ламинарном течении:

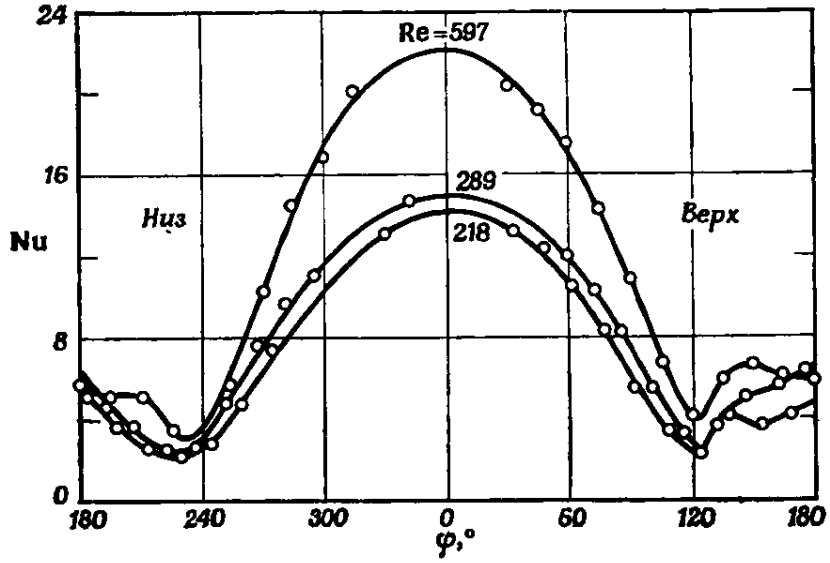
$$\mathrm{Nu} = \frac{80}{180} C_1 \mathrm{Re}^{1/2} + \frac{100}{180} C_2 \mathrm{Re}^{2/3},$$

где $C_1 = 0{,}83$ и $C_2 = 0{,}103$. На фиг. 16 расчеты по этой формуле сравниваются с расчетами Мак-Адамса [25].

Обе кривые хорошо согласуются в интервале чисел Рейнольдса от 10^2 до 10^5. При числах Рейнольдса от 10^5 до 10^6 на части цилиндра развивается турбулентный пограничный слой. Для турбулентного режима информация отсутствует.

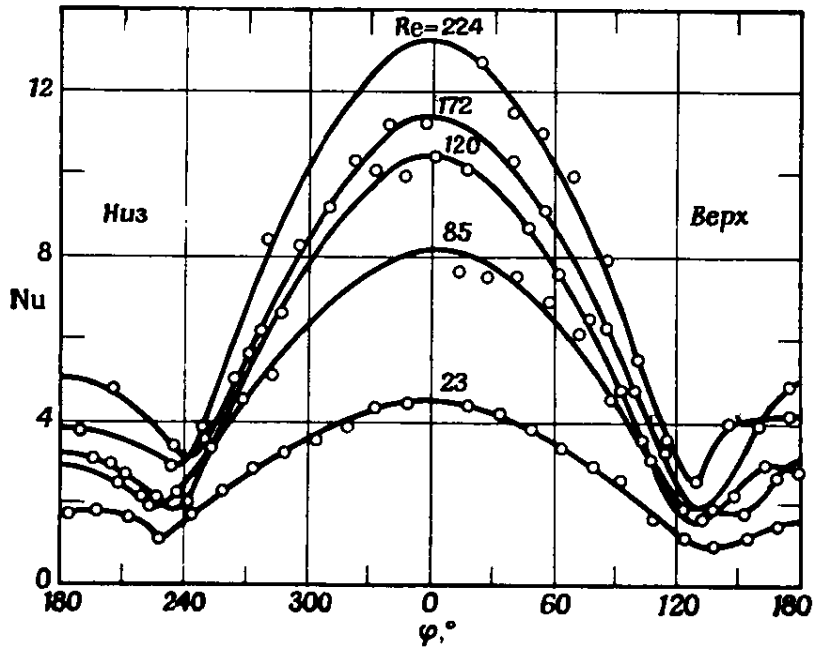


Ф и г. 12. Интерферограммы изотерм около цилиндров [24].
а — диаметр 12,7 мм; *б* — диаметр 25,4 мм; *в* — диаметр 38,1 мм.



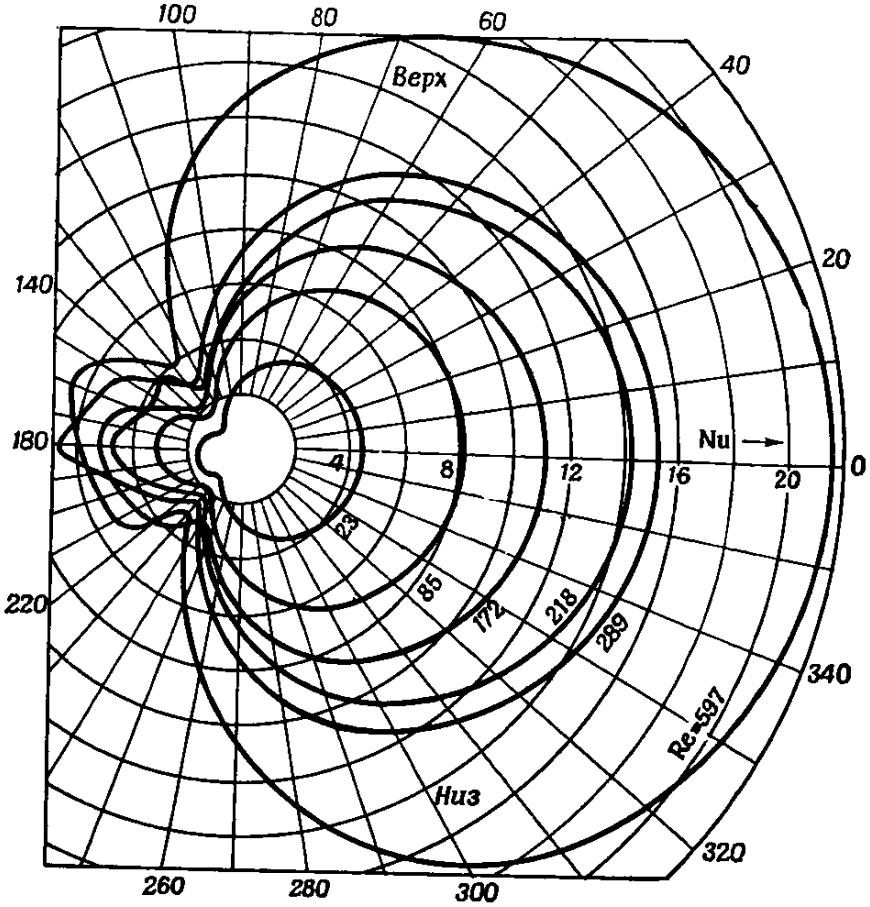
Фиг. 13. Распределение местного числа Нуссельта по поверхности кругового цилиндра [24].

Угол φ отсчитывается от передней критической точки.



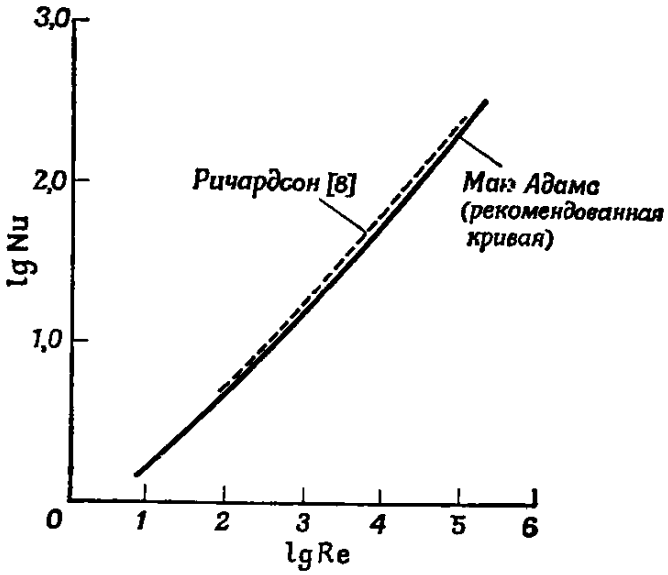
Фиг. 14. Распределение местного числа Нуссельта по поверхности кругового цилиндра [24].

Угол φ отсчитывается от передней критической точки.

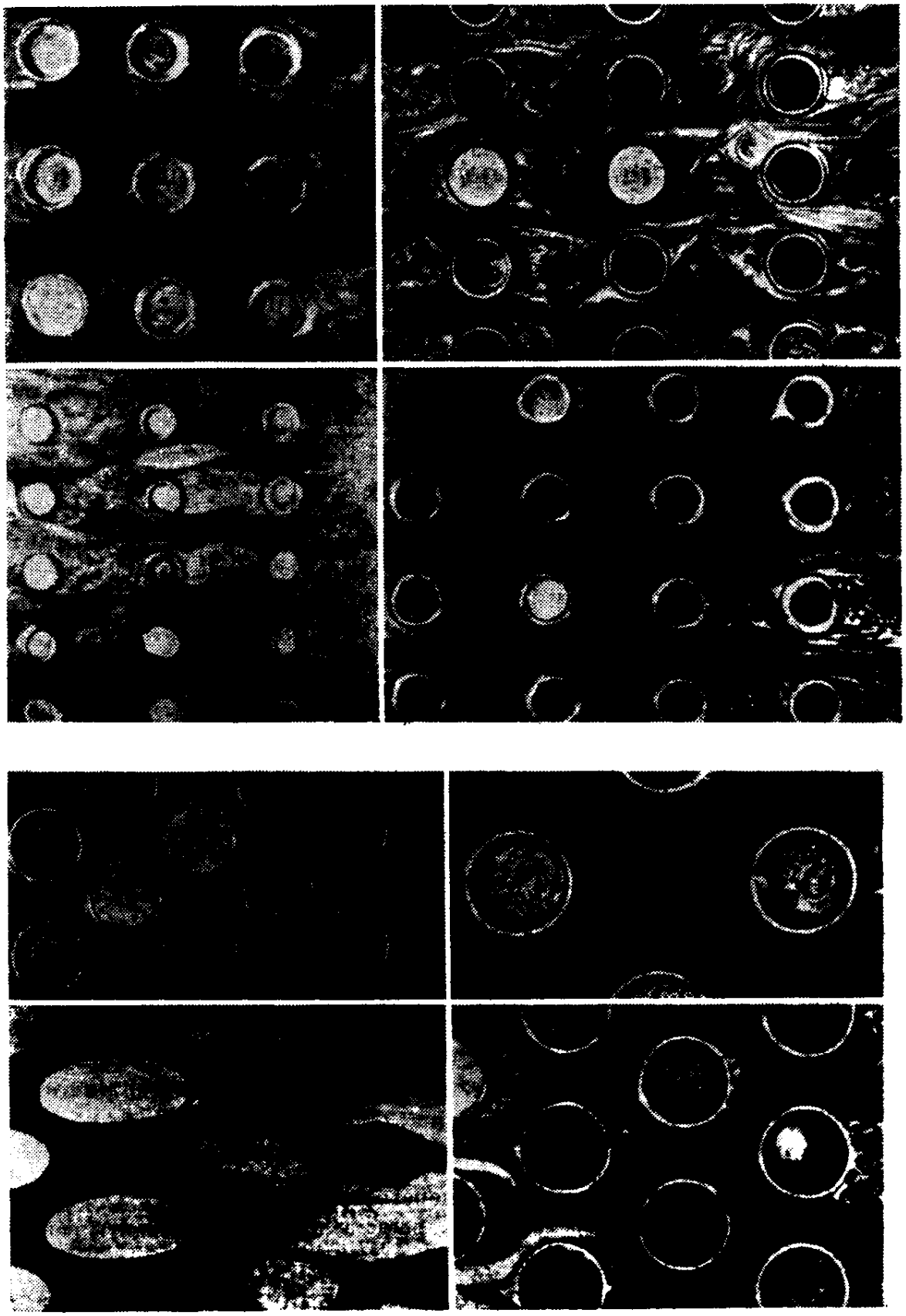


Ф и г. 15. Распределение местного числа Нуссельта по поверхности кругового цилиндра [24].

Угол φ отсчитывается от передней критической точки.



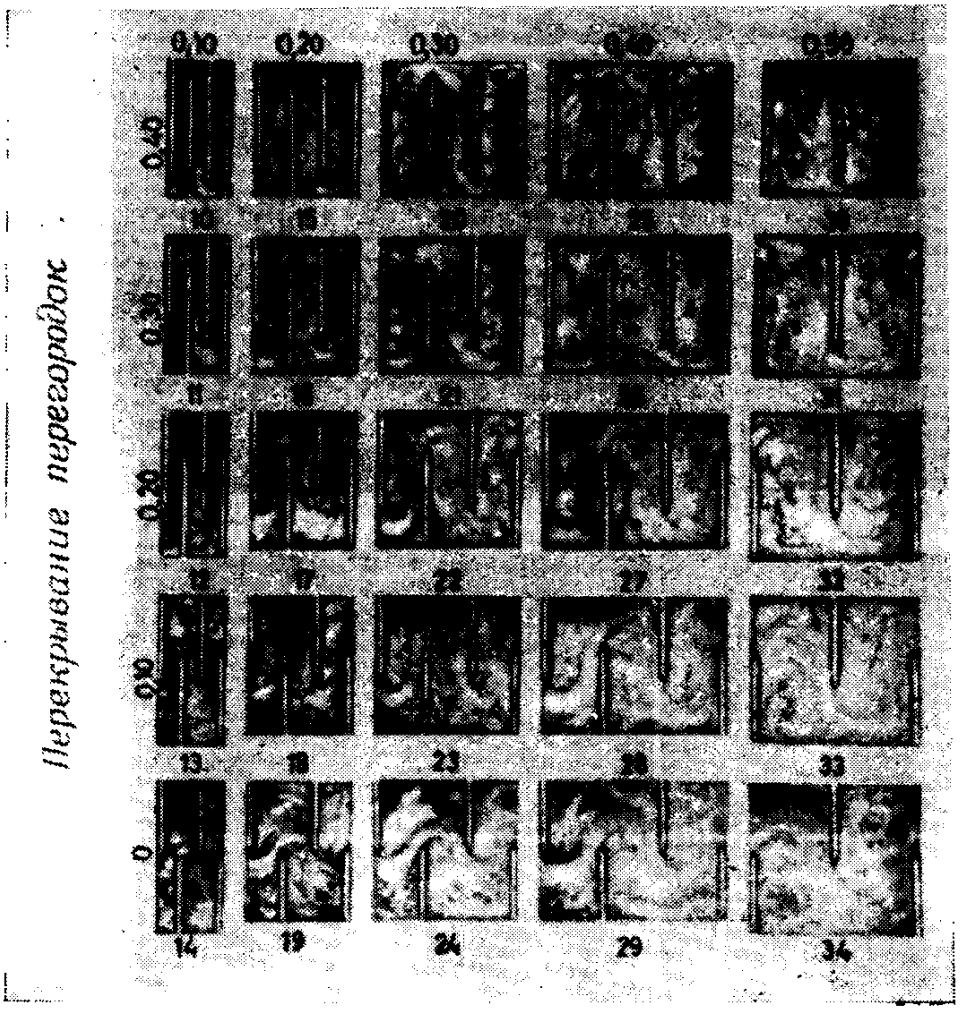
Ф и г. 16. Суммарный тепловой поток от цилиндра, обтекаемого потоком воздуха [8].



Фиг. 17. Течение в трубных пучках [26].

2.2.3. Теплоотдача от трубных пучков

Трубные пучки широко используются на практике. Размер и форма теплообменников и труб, расположение труб в пучке и т. д. являются основными параметрами, влияющими на характер течения и его отрыв. На фиг. 17 показаны типичные расположения труб в пучке (коридорное



Фиг. 18. Течение между двумерными перегородками [26].
(Из доклада 47-А-103 Гюнтера, Сенстрома и Коппа, представленного на ежегодную конференцию ASME, Атлантик Сити, шт. Нью-Джерси, 1947.)

и шахматное, причем оси труб перпендикулярны направлению основного потока). Такое расположение обычно для газовых и воздушных нагревателей, например автомобильных радиаторов и батарей водяного отопления помещений. В общем случае обтекание пучков труб подобно обтеканию одиночного изолированного цилиндра в бесконечной среде, но, естественно, присутствие соседних цилиндров влияет на толщину и распределение скорости

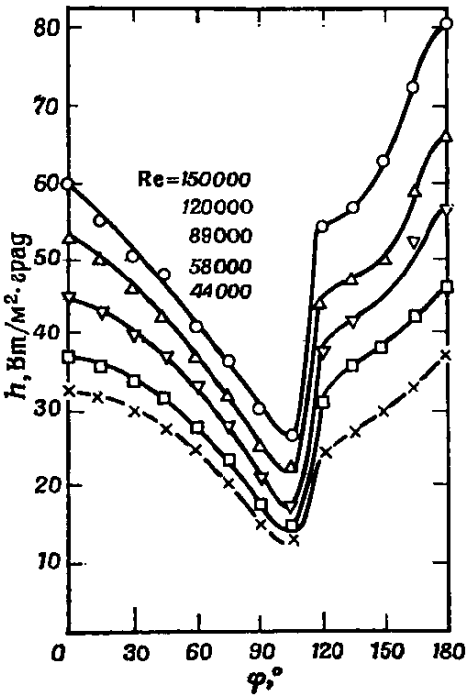
в пограничном слое и в области отрыва, где течение является турбулентным [26]. В интервале чисел Рейнольдса от 135 до 2700 при диаметрах цилиндров от $^1/_2$ до 10 см и скорости воды 3 см/с между продольными рядами труб не замечено образования дополнительных завихрений или турбулентности [27]. Вихри возрастают до максимального размера, определяемого межтрубным пространством, и затем постепенно затухают. При тесном шахматном расположении труб турбулентный след за каждой трубой значительно сужается. Теплопередача наиболее эффективна на тех участках поверхности кругового цилиндра, которые соприкасаются с областями отрывного течения. Теплопередача в трубных пучках [8, 29] была исследована Бергелином и др. [30].

В других типах теплообменников предусмотрены различные перегородки типа диафрагм, дисков, кольцевых шайб, сегментообразных перегородок, эффективно предотвращающие образование застойных зон, которые являются основным препятствием для эффективной теплопередачи в трубных теплообменниках.

При поперечном обтекании трубного пучка жидкость движется в двух противоположных направлениях, поэтому перекрестное течение более развито, чем в других типах теплообменников. На краю каждой перегородки поток отрывается и образуется турбулентная область отрыва, размер которой зависит от расстояния между перегородками, но основной поток жидкости занимает значительную часть пространства между препятствиями (фиг. 18).

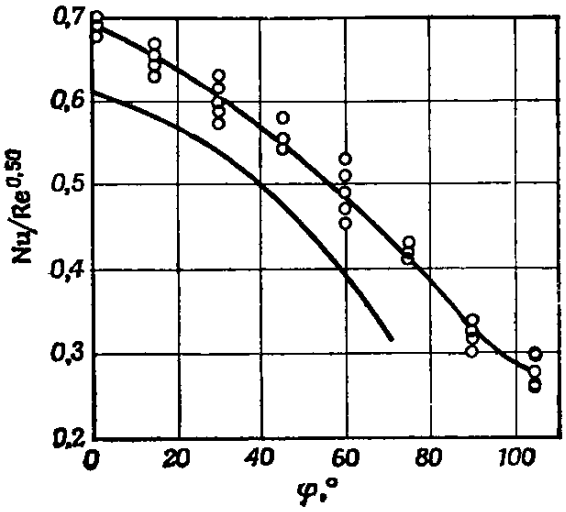
2.2.4. Теплоотдача от сферы

Местный тепловой поток от поверхности сферы при дозвуковых скоростях в интервале чисел Рейнольдса $44\,000 < \mathrm{Re}_d < 151\,000$ был измерен Кэри [31] с помощью полой сферической модели из железа «Армко» диаметром 127 мм и толщиной стенки 1 мм. Для поддержания приблизительно постоянной температуры на поверхности сферы внутрь нее подавался нагретый пар, а воздух с температурой окружающей среды использовался как охладитель. Полученные величины коэффициента теплоотдачи h приведены на фиг. 19. Коэффициент h уменьшается до минимума в точке $\varphi \approx \approx 105°$, отсчитываемой от передней критической точки, и быстро возрастает на участке до точки $\varphi \approx 120°$, очевидно, вследствие отрыва вверх по потоку, вызывающего сильно турбулентное течение. Критическое число Рейнольдса ненагретой сферы имеет порядок $1{,}5 \cdot 10^5$–$4 \cdot 10^5$ и уменьшается с увеличением интенсивности турбулентности [32]. Отрывы ламинарного и турбулентного слоев имеют место при $\varphi = 81$—$82°$ [32, 34] и $\varphi \approx 110°$ [32] соответственно, а охлаждение потоком воздуха нагретого цилиндра при больших числах Рейнольдса приводит к смещению точки отрыва вниз по потоку [24]. Поэтому отрыв ламинарного



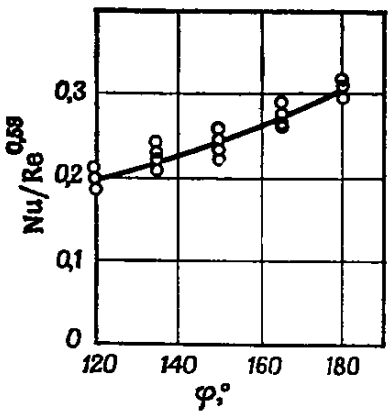
Ф и г. 19. Коэффициент теплоотдачи от сферы [31].

h — коэффициент теплоотдачи; φ — угол, отсчитываемый от передней критической точки.



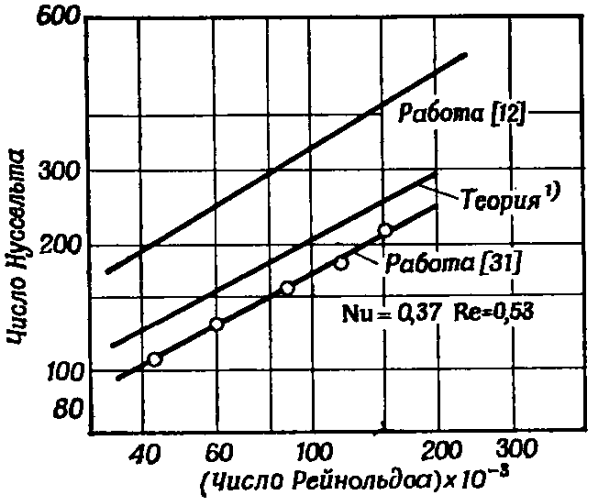
Ф и г. 20. Корреляция экспериментальных данных, $0 \leqslant \varphi \leqslant 105°$ [31].

○ экспериментальные данные; ——— теория [20]. φ — угол, отсчитываемый от передней критической точки.



Ф и г. 21. Корреляция экспериментальных данных, $120° \leqslant \varphi \leqslant 180°$ [31].

φ — угол, отсчитываемый от передней критической точки.



Ф и г. 22. Корреляция экспериментальных данных для сферы [31].

[1]) Джонстон и др., *AIChE*, 37 (1941)].

слоя, по-видимому, происходит ниже по потоку ($\varphi \approx 100°$), чем в случае ненагретой сферы ($\varphi \approx 82°$).

Результаты измерений для области присоединенного и отрывного течения выражаются зависимостями вида

$$\mathrm{Nu} \sim (\mathrm{Re})^{0,5}, \qquad 0° < \varphi \leqslant 80°,$$

$$\mathrm{Nu} \sim (\mathrm{Re})^{0,59}, \qquad \varphi \geqslant 120°$$

и представлены на фиг. 20 и 21.

Сравнение проинтегрированного по сфере теплового потока [31] со средним значением числа Нуссельта $\overline{\mathrm{Nu}}$ по Мак Адамсу [25] (фиг. 22) показывает, что данные Мак Адамса приблизительно на 50% выше, чем данные Кэри. Расхождение приписывается высокой интенсивности турбулентности в экспериментах Мак Адамса.

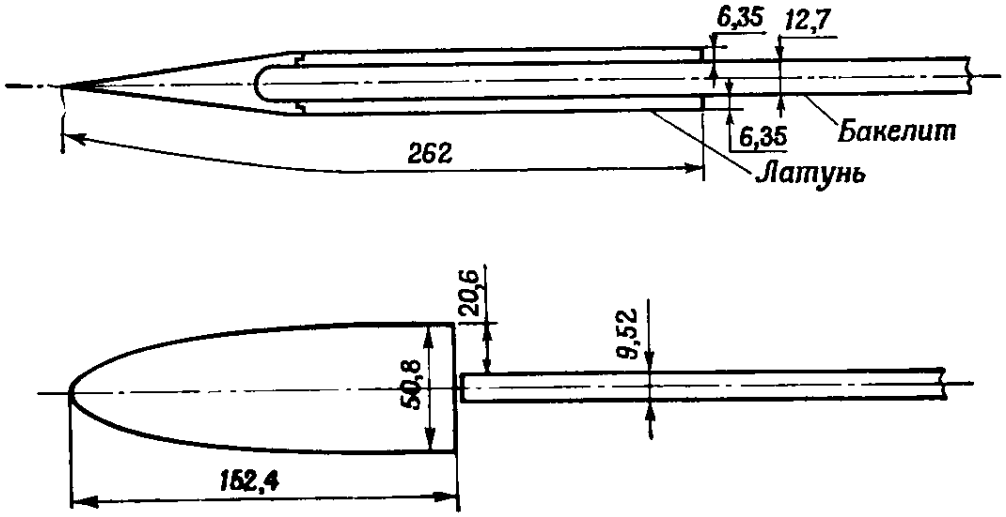
Величины средних чисел Нуссельта могут быть вычислены по формулам

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}33\ (\mathrm{Re})^{0,6} \qquad \text{(Мак Адамс)},$$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}37\ (\mathrm{Re})^{0,53} \qquad \text{(Кэри)}.$$

2.3. ТЕПЛООТДАЧА В ОБЛАСТЯХ ОТРЫВА ЗА УСТУПАМИ

Местные коэффициенты теплоотдачи и восстановления в области отрыва и присоединения за уступом, расположенным по

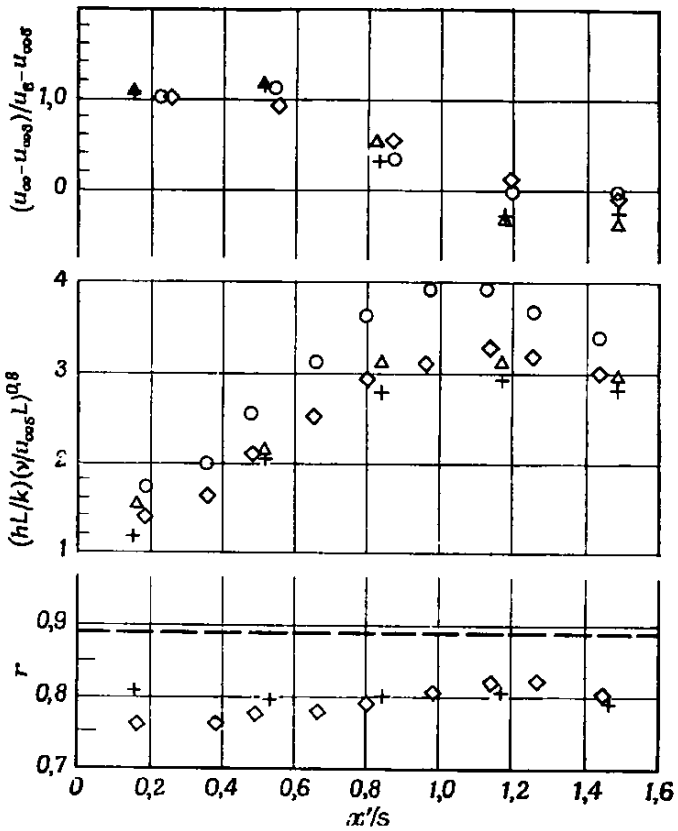


Фиг. 23. Схемы моделей с малым и большим уступами [37].
Примечание. Все размеры даны в миллиметрах.

потоку, были экспериментально определены авторами работ [35—37].

Двумерные модели толщиной 6,35 и 20,6 мм, обтекаемые турбулентным потоком воздуха со скоростью 45—155 м/с, схематически показаны на фиг. 23 [37]. Разность температур торможения (32° С)

и поверхности была равна 11° С. Протяженность области отрыва составляла шесть высот уступа для малого уступа и пять высот для большого уступа. Коэффициент теплоотдачи был максимальным в точке присоединения, как и в случае сверхзвукового течения, а коэффициент восстановления в отрывном течении был менее 0,89 (типичная величина для турбулентного режима). Во внутренней



Фиг. 24. Теплопередача в области отрыва.

x' — расстояние от уступа вниз по потоку; s — масштаб длины вдоль абсциссы, равный расстоянию от уступа до точки присоединения (пять высот для большого уступа и шесть высот для малого уступа). Характерная скорость в коэффициенте теплоотдачи u_a — скорость потока воздуха непосредственно перед уступом; L — единица длины; k — коэффициент теплопроводности. Скорость набегающего потока нормализована относительно скорости u_a и скорости далеко внизу по потоку [37].

ЗНАЧЕНИЯ СКОРОСТИ u_a, М/С

Уступ, мм	△	+	○	◇
20,6			45,7	137
6,35	50	138,7		

части области отрыва существует циркуляционное, по-видимому, установившееся течение. Около поверхности скорость направлена против основного течения и достигает величины порядка одной пятой скорости основного течения. Давление в большей части области отрыва почти постоянно [38, 39]. Результаты измерений теплопередачи приведены на фиг. 24.

3. ПОЛОЖЕНИЕ ТОЧКИ ОТРЫВА ПОТОКА СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

В этом разделе представлены результаты расчета и экспериментального определения положения точки отрыва потока газа. Отрыв потока на игле рассматривается в разд. 4.

3.1. ПОЛОЖЕНИЕ ТОЧКИ ОТРЫВА

Положение и смещение точки отрыва в условиях теплообмена было определено для пластины, сферы и других тел.

3.1.1. Метод Мордухова и Грэйпа расчета положения точки отрыва ламинарного пограничного слоя газа от стенки с заданной постоянной температурой.

Мордухов и Грэйп [41] распространили методы Либби [42], а также Мордухова и Кларке [43] расчета положения точки отрыва ламинарного пограничного слоя газа на случай теплообмена при заданной постоянной температуре.

Число Прандтля принято равным единице, а коэффициент вязкости — пропорциональным температуре. Основные уравнения следующие:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0,$$

уравнение количества движения

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\rho_e u_e\frac{du_e}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

уравнение энергии

$$\rho u c_p\frac{\partial T}{\partial x}+\rho v c_p\frac{\partial T}{\partial y}=-\rho_e u_e\frac{du_e}{dx}u+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Если $\mathrm{Pr}=\mathrm{const}$, уравнение энергии принимает вид

$$\mathrm{Pr}\left(\rho u\frac{\partial H}{\partial x}+\rho v\frac{\partial H}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left[\frac{\partial H}{\partial y}-(1-\mathrm{Pr})\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]\right\}, \qquad (5)$$

где H — полная энтальпия

$$H=\frac{u^2}{2}+c_pT. \qquad (6)$$

Вводя переменную t,

$$y=\int_0^t\left(\frac{T}{T_e}\right)dt, \qquad (7)$$

и интегрируя уравнение количества движения и уравнение (5) по t в пределах толщины пограничного слоя от $t = 0$ до $t = \delta_t$ (δ_t — толщина пограничного слоя в плоскости $x - t$), причем

$$\delta_t = \int_0^\delta \left(\frac{T_e}{T}\right) dy, \tag{8}$$

с использованием граничных условий $u = v = 0$ при $t = 0$, получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$(F_1/2)\,\lambda' + \lambda\left[F_1' + F_1(\ln\rho_e)' + (\ln u_e)' \times \right.$$
$$\left. \times \left\{F_1 + \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\,\mathrm{M}_e^2\right) F_2\right\}\right] =$$
$$= C\,(\rho_\infty/\rho_e)(u_\infty/u_e)\,(T_e/T_\infty)\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}(u/u_e)\right\}_w, \tag{9}$$

$$(F_3/2)\,\lambda' + \lambda\,[F_3' + F_3\{(\ln\rho_e)' + (\ln u_e)'\}] =$$
$$= C\,(\rho_\infty/\rho_e)\,(u_\infty/u_e)\,(T_e/T_\infty)\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}(H/H_e)\right\}_w, \tag{10}$$

где

$$\lambda = \mathrm{Re}_\infty\,(\delta_t/L)^2,$$
$$F_1 = \int_0^1 (u/u_e)\,\{(1 - u/u_e)\}\,d\tau,$$
$$F_2 = \int_0^1 \{(H/H_e) - (u/u_e)^2\}\,d\tau,$$
$$F_3 = \int_0^1 (u/u_e)\,\{1 - (H/H_e)\}\,d\tau, \tag{11}$$
$$C = \frac{\mu/\mu_\infty}{T/T_\infty} \quad \text{или} \quad C = \left(\frac{T_w}{T_\infty}\right)^{1/2}\frac{T_\infty + S}{T_w + S}.$$

S — постоянная Сазерленда, индекс w означает стенку. Штрих означает дифференцирование по $\xi = x/L$, где L — характерная длина, а $\tau = t/\delta_t$.

Критерий отрыва имеет вид

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_w = 0 \tag{12}$$

и справедлив как при наличии, так и при отсутствии теплообмена. Рассмотрены следующие полиномы седьмой степени для профилей скорости и полной энтальпии, удовлетворяющие граничным усло-

виям (включая точку отрыва) и пригодные для случая теплообмена:

$$\frac{u}{u_e} = \left(\frac{7}{4}\tau - \frac{21}{4}\tau^5 + 7\tau^6 - \frac{5}{2}\tau^7\right) + $$
$$+ a_2\left(-\frac{1}{2}\tau + \tau^2 - \frac{5}{2}\tau^5 + 3\tau^6 - \tau^7\right) + $$
$$+ a_3\left(-\frac{1}{5}\tau + \tau^3 - 3\tau^5 + \frac{16}{5}\tau^6 - \tau^7\right) \tag{13}$$

и

$$\frac{H}{H_e} = G_1 + (1 - G_1)(35\tau^4 - 84\tau^5 + 70\tau^6 - 20\tau^7) + $$
$$+ b_1(\tau - 20\tau^4 + 45\tau^5 - 36\tau^6 + 10\tau^7), \tag{14}$$

где

$$a_2 = -\left(\frac{1}{2}C\right)(T_e/T_\infty)^{(2-\gamma)/(\gamma-1)}(u_e'/u_\infty) \times$$
$$\times G_1\left\{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\mathrm{M}_e^2\right\}\lambda, \tag{15}$$
$$a_3 = (a_2/b_1)/3G_1. \tag{16}$$

$G_1 = H_w/He$ при $\mathrm{Pr} = 1$ — также отношение действительной температуры стенки к равновесной температуре стенки при нулевом тепловом потоке, b_1 — коэффициент при τ в полиноме для полной энтальпии

$$b_1 \sim 2(1 - G_1), \tag{17}$$

что является хорошим приближением, за исключением случая сильного охлаждения (G_1 близко к нулю). Применяя уравнение (17), можно существенно упростить расчет без заметных потерь точности. Из уравнений (13) и (16) при $(\partial u/\partial t)_w = 0$ получаем

$$a_{2_S} = \frac{3{,}5G_1}{G_1 + (2/15)b_1}. \tag{18}$$

Индекс S означает точку отрыва. Из уравнений (15) и (18) определяем величину λ_{sep} при отрыве

$$\lambda_{\mathrm{sep}} = -7C\frac{(T_e/T_\infty)^{-(2-\gamma)/(\gamma-1)}}{(u_e'/u_\infty)\left\{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\mathrm{M}_e^2\right\}}\frac{1}{G_1 + \left(\frac{2}{15}\right)b_1}. \tag{19}$$

Подставляя (17) в (19), получаем

$$\lambda_{\mathrm{sep}} = -105C\frac{(T_e/T_\infty)^{-(2-\gamma)/(\gamma-1)}}{(u_e'/u_\infty)\left\{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\mathrm{M}_e^2\right\}}\frac{1}{11G_1 + 4}. \tag{19a}$$

Подставляя (13) в совокупности с (16) в интегро-дифференциальное уравнение количества движения (9) и допуская, что a_2 и b_1 в F_1

и F_2 можно принять постоянными, получаем следующее уравнение:

$$(\overline{F}_1/2)\,\lambda' + \lambda\,[\overline{F}_1\,(\rho_e'/\rho_e) + (u_e'/u_e)\,\{\varphi_1 + {}$$
$$+ {}^1/_2\,(\gamma - 1)\,M_e^2\,(\varphi_1 - \overline{F}_1)\}] = 2C\,(\rho_\infty/\rho_e)\,(T_e/T_w)\,(u_\infty/u_e). \quad (20)$$

Величины $\overline{F}_1$ и φ_1 в точке отрыва равны соответственно

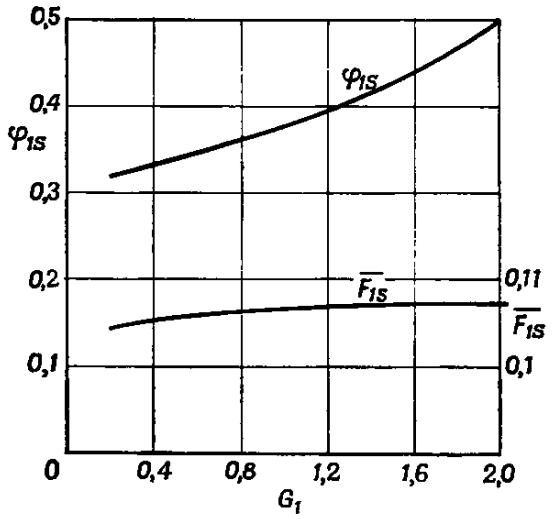
$$\overline{F}_{1S} = 0{,}1159 + 0{,}002525a_{2S} - 0{,}001454a_{2S} - 0{,}0000572 \times$$
$$\times (b_1a_{2S}/G_1)^2 - 0{,}000574\,(b_1a_{2S}^2/G_1) + 0{,}000887\,(b_1a_{2S}/G_1),$$
$$\varphi_{1S} = 0{,}25G_1 + 0{,}0437 + 0{,}0738b_1 + 0{,}0348a_{2S} - \quad (20а)$$
$$- 0{,}00291a_{2S}^2 + 0{,}00773\,(b_1a_{2S}/G_1) - 0{,}001147\,(b_1a_{2S}^2/G_1) -$$
$$- 0{,}0001145\,(b_1a_{2S}/G_1)^2.$$

Решением уравнения (20) является

$$\lambda_S(\xi) = \frac{7}{2\overline{F}_{1S}} \times$$
$$\times C\,\frac{\int\limits_0^\xi (u_e/u_\infty)^{(2/\overline{F}_{1S})\varphi_{1S}-1}\,(T_e/T_\infty)^{\{(2\gamma-1)/(\gamma-1)\}-(\varphi_{1S}/\overline{F}_{1S})}\,d\xi}{(u_e/u_\infty)^{(2/\overline{F}_{1S})\varphi_{1S}}\,(T_e/T_\infty)^{\{(\gamma+1)/(\gamma-1)\}-(\varphi_{1S}/\overline{F}_{1S})}}, \quad (21)$$

причем b_1 и a_{2S} — простые функции G_1, как это следует из уравнений (15) и (16), а $\overline{F}_{1S}$ и φ_{1S} — функции G_1 (фиг. 25).

При заданных положительном градиенте давления, числе Маха M_∞ и постоянном отношении температур G_1 положение точки отрыва определяется приравниванием правых частей уравнений (19а) и (21). Для отыскания точки пересечения этих двух кривых строится график зависимости λ от φ вблизи предполагаемой точки отрыва по уравнениям (19а) и (21). Так как положение точки отрыва не зависит от C, можно принять $C = 1$.

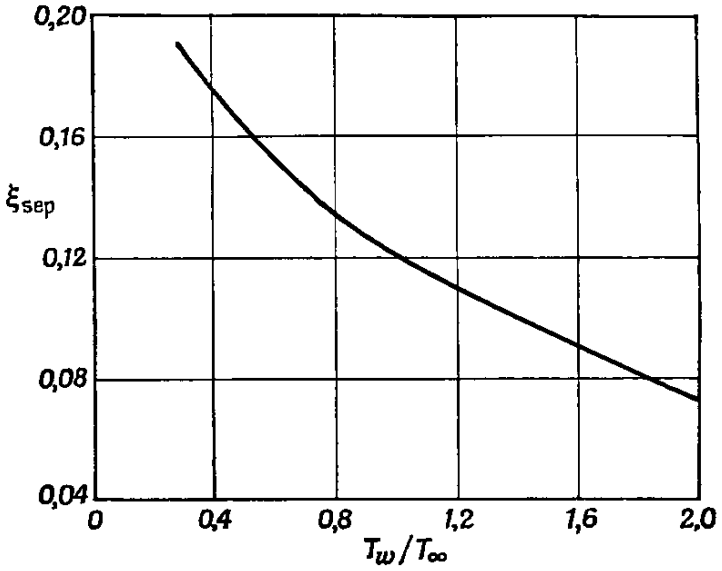


Фиг. 25. $\overline{F}_{1S}$ и φ_{1S} в зависимости от G_1 [41].

Влияние теплообмена на положение точки отрыва

Так как положение точки отрыва не зависит от C, то влияние температуры стенки на отрыв может проявиться только через обмен импульсами или градиент давления и G_1. При фиксированных распределении скорости внешнего течения $u_e/u_\infty\,(\xi)$ и M_∞

величина λ_{sep} растет с ростом G_1, как это видно из приведенных ранее уравнений, в частности из уравнения (19а). Можно сказать, что при охлаждении стенки точка отрыва смещается вниз по потоку, и отрыв затягивается вследствие уменьшения влияния градиента давления.



Фиг. 26. Положение точки отрыва в зависимости от температуры стенки (несжимаемая среда), $u_e/u_\infty = 1 - \xi$, $M_\infty = 0$ [41].

Для иллюстрации рассмотрим простой пример положительного градиента давления, соответствующего

$$\frac{u_e}{u_\infty} = 1 - \xi. \tag{22}$$

Рассмотрим случай $M_\infty = 0$, $T_e/T_w = 1$, но G_1 ожет изменяться. Если приравняем правые части уравнений (19а) и (21), то получим

$$\xi_{sep} = 1 - \left(1 + \frac{60\varphi_{1S}}{11G_1 + 4}\right)^{-\overline{F}_{1S}/2\varphi_{1S}}, \tag{22а}$$

являющуюся функцией G_1, так как φ_{1S} и $\overline{F}_{1S}$ — функции G_1 [уравнения (20а), (17), (18) или фиг. 25].

Координата точки отрыва, определяемая уравнением (22а), представлена на фиг. 26 для интервала значений $0{,}3 < T_w/T_\infty < 2{,}0$.

Из фиг. 26 видно, что при охлаждении стенки происходит затягивание отрыва потока несжимаемой среды.

Теперь проведем расчет для сжимаемой среды до чисел $M_\infty \leqslant 5{,}31$ при фиксированном значении $T_w/T_\infty = 2$ и $0{,}3 \leqslant G_1 \leqslant 2$. При $M_\infty = 0$ и $G_1 = 2$ стенка нагрета, при $M_\infty = 5{,}31$ и $G_1 = 0{,}3$

стенка охлаждена. Подставляя

$$T_e/T_\infty = 1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\,M_\infty^2\,\{1 - (u_e/u_\infty)^2\}$$

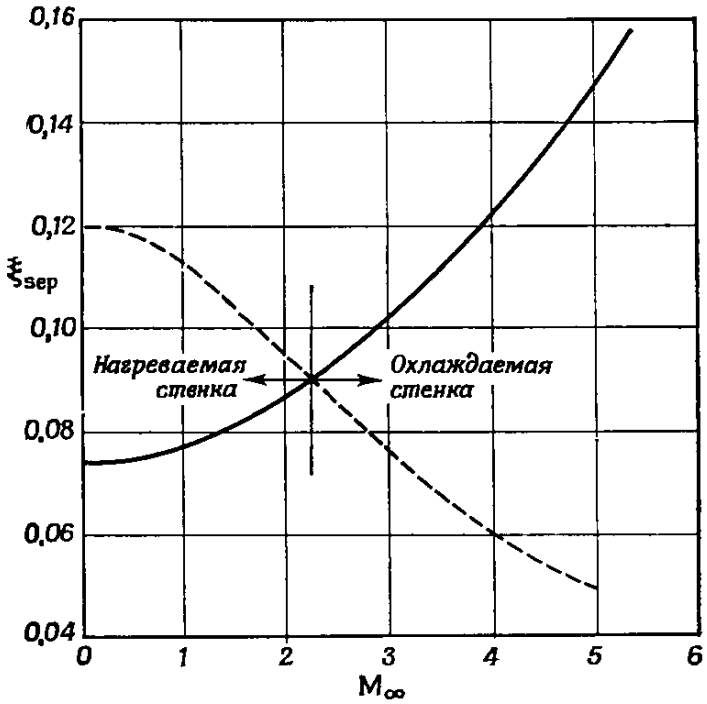
и

$$M_e^2 = (u_e/u_\infty)^2\,M_\infty^2\,(T_e/T_\infty)^{-1},$$

перепишем уравнение (19а) в виде

$$\lambda_{\text{sep}} = -105C\,\frac{(T_e/T_\infty)^{-0,5}}{\{4 + 11\,(T_w/T_\infty) + 0{,}8M_\infty^2\}\,(u_e'/u_\infty)}\,. \qquad (22б)$$

Для упрощения определения точки отрыва при заданной величине T_w/T_∞ величину λ_{sep} можно вычислить в функции ξ для любого M_∞ путем численного интегрирования уравнений (21) и (20а) или кривых



Фиг. 27. Положение точки отрыва в зависимости от числа Маха, $u_e/u_\infty = 1 - \xi$ [41].
——— $T_w/T_\infty = 2$; — — — $G_1 = 1$ (теплоизолированная стенка).

на фиг. 25. Тогда координата точки отрыва определяется величиной ξ, при которой $\lambda_S = \lambda_{\text{sep}}$. Результаты такого расчета для положительного градиента давления, определяемого уравнением (22), представлены на фиг. 27. Для сравнения на этой же фигуре приведена зависимость координаты точки отрыва от числа M_∞ при отсутствии теплообмена. Влияние M_∞ на координату точки отрыва при фиксированном T_w/T_∞ благоприятно в отличие от неблагоприятного влияния M_∞ при отсутствии теплообмена.

3.1.2. Метод Иллингворта

Иллингворт [44] предложил приближенное аналитическое решение для отрыва ламинарного пограничного слоя газа с учетом теплообмена и переменных скорости внешнего течения и температуры стенки, но в примерах, к которым приложим излагаемый здесь метод, рассматривается только случай постоянной температуры стенки. Градиент давления вызывает отрыв, а также уменьшение или увеличение толщины пограничного слоя в основном путем воздействия на газ вблизи стенки. Его действие усиливается, только если температура газа выше и, следовательно, он легче, чем в основном потоке. Этот эффект соответственно ослабляется, если отношение температуры в потоке к температуре стенки больше единицы.

В методе Иллингворта для плоского ламинарного течения применяются те же допущения и основные уравнения, что и в методе Мордухова и Грэйпа [41]. Единственное отличие состоит в том, что в уравнении энергии вместо c_pT используется удельная энтальпия. В соответствии с результатами Иллингворта при повышении температуры стенки расстояние до точки отрыва уменьшается или отрыв наступает раньше, что согласуется с расчетами Мордухова и Грэйпа. Так как Хоуарт [45] и Стюартсон [46] уже вычислили положение точки отрыва для линейного закона изменения скорости основного течения как несжимаемой, так и сжимаемой среды, Иллингворт численно исследовал теплообмен для этого частного случая, а также для случая симметричного обтекания цилиндра с тупой носовой частью.

Круговой цилиндр с постоянной температурой стенки

Симметричный цилиндр находится в потоке, движущемся с малой скоростью

$$u_e(x) = B_1x + B_3x^3 + B_5x^5 + \ldots,$$

стенка цилиндра имеет постоянную температуру $1 - \frac{h_w(x)}{H_e} = A$, где h — удельная статическая энтальпия и H — удельная полная энтальпия.

$H = h + u^2/2$, B_1, B_3 и B_5 — постоянные. Напряжение трения на поверхности цилиндра $L = r$ (радиус цилиндра)

$$\tau_w = 1{,}2326\,(\mu_s\rho_s)^{1/2} B_1^{3/2} r\varphi \left[1 + 2{,}351\frac{B_3r^2}{B_1}\varphi^2 + \right.$$
$$\left. + \left\{3{,}10\frac{B_5r^4}{B_1} + 0{,}58\left(\frac{B_3r^2}{B_1}\right)^2\right\}\varphi^4 r \ldots\right],$$

где φ — угол, измеряемый от передней критической точки.

Если ввести безразмерную координату $\varphi = x/r$ (r — характерная длина), то выражение для напряжения трения на поверхности цилиндра можно представить в виде

$$\tau_w = 2^{-5/4} 3^{1/4} (\mu_s \rho_s)^{1/2} (k_1 - k_{10} A)^{3/4} B_1^{3/2} r \varphi \, (1 + T_1 \varphi^2 + T_2 \varphi^4 + \ldots),$$

где

$$T_1 = \frac{7 r_1}{1 + r_1} \cdot \frac{B_3 r^2}{B_1} + \frac{(7/2) r_1 - (35/12)}{1 + r_1} \cdot \frac{B_1^2 r^2}{h_s}.$$

$$T_2 = \frac{11 r_2}{1 + r_2} \cdot \frac{B_5 r^4}{B_1} + \left\{ \frac{(183/10) r_1^2 + r_2 [(11/2) - 33 r_1 + 15 r_1^2]}{(1 + r_1)^2 (1 + r_2)} \right\} \left(\frac{B_3 r^2}{B_1} \right) +$$

$$+ \left[\frac{-(53/10) + (807/20) r_1 + \frac{3}{2} r_1^2 + r_2 \{(263/6) - (91/4) r_1 + (63/2) r_1^2\}}{(1 + r_1)^2 (1 + r_2)} \right] \times$$

$$\times \frac{B_1^2 r^2}{h_s} \frac{B_3 r^2}{B_1} +$$

$$+ \frac{603/160 - (296/15) r_1 - (65/8) r_1^2 + r_2 \{(7571/288) - (35/3) r_1 + 7 r_1^2\}}{(1 + r_1)^2 (1 + r_2)} \left(\frac{B_1^2 r^2}{h_s} \right)^2;$$

$$r_1 = \frac{1}{3} (k_2 - k_{20} A) / (k_1 - k_{10} A),$$

$$r_2 = \frac{1}{5} (k_3 - k_{30} A) / (k_1 - k_{10} A),$$

$$k_n = \frac{\left(\frac{4}{3} n\right)! \left(-\frac{2}{3}\right)!}{\left(\frac{4}{3} n - \frac{2}{3}\right)! \left(-\frac{1}{3}\right)!},$$

$$k_{n0} = k_n \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{4}{3} n - \frac{2}{3}\right)! \left(-\frac{1}{3}\right)!}{\left(\frac{4}{3} n - \frac{1}{3}\right)! \left(-\frac{2}{3}\right)!} \right\}.$$

Индекс s относится к параметрам торможения.

Для исследования влияния температуры стенки и M_∞ на положение точки отрыва введенные безразмерные параметры распределения скорости внешнего течения $B_3 r^2/B_1$ и $B_5 r^4/B_1$ считаются фиксированными, а параметры $B_1^2 r^2/h_s$ и A — переменными. При малых скоростях и $r = 4{,}87$ см Хименц [47] получил $B_1 = 7{,}151$, $B_3 = -0{,}04497$, $B_5 = -0{,}0003300$, так что

$$B_3 r^2/B_1 = -0{,}1491(5), \quad B_5 r^5/B_1 = -0{,}02596.$$

Из уравнения Бернулли

$$\frac{B_1^2 r^2}{h_s} = \frac{(\gamma-1)\,\mathrm{M}^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left\{1+\frac{B_3 r^2}{B_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{B_5 r^4}{B_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\right\}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right)},$$

где M — число Маха в точке $\varphi = \pi/2$. Положения точки отрыва ламинарного пограничного слоя ($\tau_w = 0$) приведены в табл. 2.

Таблица 2

УГЛОВАЯ КООРДИНАТА φ ТОЧКИ ОТРЫВА

A \ M	0	0,1	0,5
−1	1,402	1,404	1,459
0	1,429	1,431	1,511
1	1,550	1,556	...

Из табл. 2 нетрудно заметить, что не существует заметной разницы в положении точки отрыва для двух случаев: при температурах стенки цилиндра 0° С ($A = 0{,}0521$) и 100° С ($A = -0{,}2951$). Этот результат понятен, так как для цилиндра влияние теплообмена на отрыв мало, в связи с тем что на первых 90% безотрывного пограничного слоя течение ускоряется, следовательно, область замедляющегося течения короткая. Кроме того, напряжение трения может достичь значительно большего значения в области минимума давления, чем для ненагретого цилиндра (табл. 4 [44]). Утолщение пограничного слоя происходит быстрее на нагретой стенке, чем на ненагретом цилиндре, но это не приводит к существенному смещению точки отрыва.

Замедляющийся основной поток

Для расчета точки отрыва Иллингворт [44] рассмотрел простое замедляющееся течение, определяемое уравнением

$$u_e = B_0 - B_1 x.$$

В этом случае положение точки отрыва определяется с точностью 1% выражением $X = B_1 x/B_0 = 0{,}120$ [45].

Для определения положения точки отрыва можно применить следующий стандартный метод [44].

1. Вычисляется наименьший положительный корень X_0 уравнения $\tau_w(X) = 0$ в предположении, что $T_i = 0$ $(i > 5)$. $\tau_w = F X^{-1/2}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} T X^i\right)$, где F — множитель.

2. При $Y = X/X_0$, $T_i^* = X_0^i T_i$ вычисляется наименьший положительный корень Y_0 уравнения $1 + \sum_{i=1}^{\infty} T_i^* Y^i = 0$, где $T_i^* = T_5^*$ $(i > 5)$.

3. Принимается, что искомой точке отрыва соответствует $X_{sep} = {}^1/_4 (X_0)(1 + 3\,Y_0)$. Результаты, полученные таким методом, сведены в табл. 3.

Стюартсон [46] вычислил положение точки отрыва путем сведения течения сжимаемой среды $u_e = B_0 - B_1 x$ к течению несжимаемой среды и приближенного метода Хоуарта [45] для расчета пограничного слоя в последнем случае. Полученные им результаты представлены в табл. 3, точность их вызывает некоторые сомнения. По-видимому, истинные величины X_{sep} должны быть ниже полученных, за исключением случая $M_e(0) = 0$, и должны быть заключены между приведенными в последних двух строках табл. 3, за исключением $M_e(0) = 0$.

Если $H = H_e(1 - g)$,

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n g_n(\eta), \quad 1 - \frac{h_w(t)}{H_e} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{mn},$$

$$t = \int_0^x \{2\mu e(\xi)\,\rho_e(\xi)\,\tau_w(\xi)\}^{1/2}\,d\xi = 4\psi^{3/2}/9t,$$

ψ — функция тока, то

$$g_n(\eta) = \frac{(mn)!}{\left(-\frac{2}{3}\right)!}\,e^{-\eta} U\left(mn + \frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \eta\right),$$

где α — постоянная, а U — обычная вырожденная гипергеометрическая функция.

При отсутствии теплообмена распределение скорости и энтальпии по толщине пограничного слоя определяется функцией $f_n(\eta)$

$$f_n(\eta) = \frac{\left(\frac{4}{3}n\right)!}{\left(-\frac{1}{3}\right)!}\,e^{-\eta} U\left(\frac{4n+1}{3},\ \frac{1}{3},\ \eta\right)$$

как для линейно уменьшающейся скорости внешнего течения, так и для некоторых других законов ее изменения. Числовые значения функций f_1, f_2, f_3, f_4 и f_5 приведены в табл. 4.

Таблица 3

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ ОТРЫВА ПРИ $A = 0$ [44]

$M_e(0)$	0	1	$\sqrt{10}$	10
X_0	0,122	0,112	0,0675	0,0162
T_1^*	−0,7543	−0,6742	−0,3071	+0,1644
T_2^*	−0,07542	−0,1350	−0,3382	−0,5034
T_3^*	−0,06759	−0,07546	−0,1370	−0,2130
T_4^*	−0,05558	−0,06429	−0,1119	−0,2139
T_5^*	−0,05003	−0,05835	−0,1056	−0,2255
X_0Y_0	0,107	0,097	0,0578	0,0135
X_{sep}	0,111	0,101	0,0602	0,0142
X_{sep} (Стюартсон)	0,120	0,110	0,074	0,024

Два примера течений с малой скоростью около нагретой стенки приведены в табл. 5. В соответствии с табл. 5 отрыв происходит при $X = 0{,}067$, если температура стенки равна 303° С; при температуре стенки 15° С тот же метод дает $X = 0{,}111$. С увеличением температуры стенки от комнатной до точки кипения ($A = -0{,}2951$) расстояние до точки отрыва уменьшается приблизительно на 16%. Как видно из фиг. 28, положение точки отрыва зависит главным образом от температуры и почти не зависит от числа Маха (пунктирная линия).

На фиг. 28 приведены также для сравнения результаты Стюартсона [46]. Его точки располагаются выше точек, полученных по методу Иллингворта. Влияние температуры стенки на отрыв при течении с постоянным замедлением (сплошная кривая на фиг. 28) выражается формулой

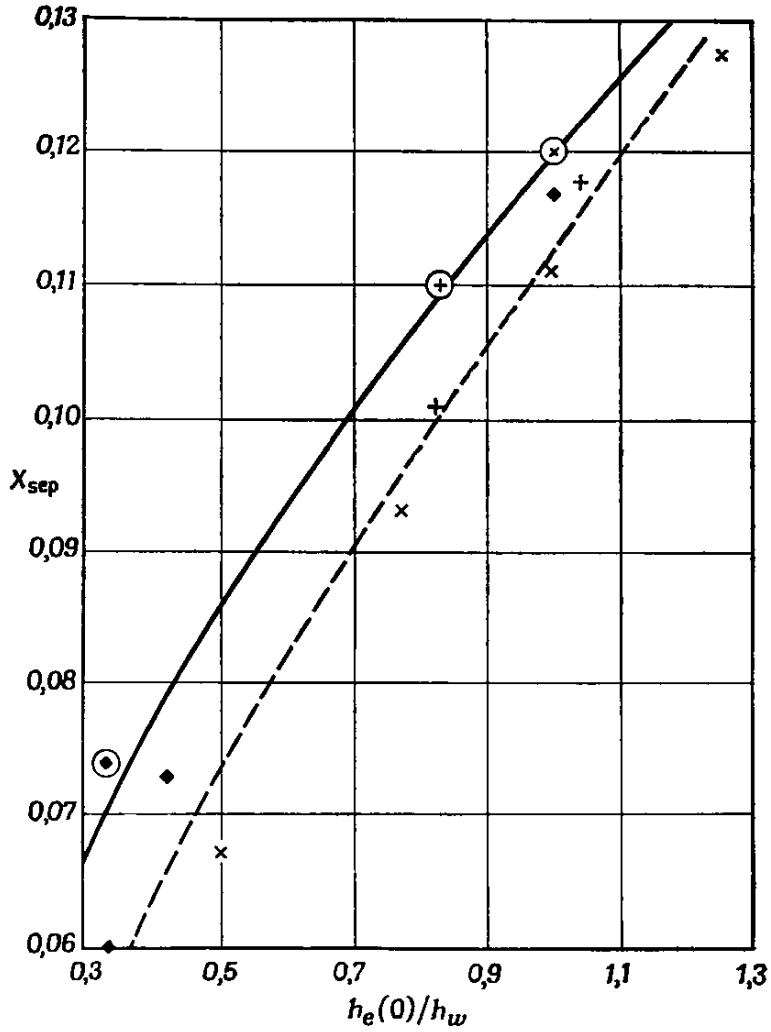
$$X_{sep} = 0{,}120\,\{h_e(0)/h_w\}^{1/2}.$$

Его можно рассматривать как относительное уменьшение (в %) скорости перед отрывом на величину

$$12\left(\frac{\text{начальная температура потока}}{\text{температура стенки}}\right)^{1/2}.$$

Это соотношение можно применить и для течения с $Pr \neq 1$ [44].

Гэдд [48] разработал метод численного интегрирования уравнения ламинарного пограничного слоя газа в предположении, что



Фиг. 28. Зависимость X_{sep} от $h_e(0)/h_w$ [44].
$\frac{h_e(0)}{h_w} = \frac{\text{начальная температура потока;}}{\text{температура стенки.}}$ × $M_e(0) = 0$, + $M_e(0) = 1$, ◆ $M_e(0) = \sqrt{10}$; кружками обведены экспериментальные данные Стюартсона [46].

скорость внешнего течения в начале пограничного слоя не равна нулю, и вычислил положение точки отрыва. По результатам расчетов для стенки, охлажденной до температуры набегающего потока при $M = 4$ и $M = 2$, $Pr = 1$, $\mu/\mu_d = T/T_d$ и постоянном положительном градиенте скорости внешнего течения (индекс d относится к основному течению), условия для отрыва значительно менее благоприятны по сравнению с теплоизолированной стенкой.

3.2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ НА ОТРЫВ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ГАЗА

Описанное выше влияние теплопередачи на отрыв ламинарного пограничного слоя было подтверждено экспериментом Ланкфорда

Таблица 4

ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ f_1, f_2, f_3, f_4 и f_5 [44]

η	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	1	1	1	1	1
0,005	0,9053	0,8650	0,8332	0,8064	0,7828
0,01	0,8577	0,8009	0,7572	0,7211	0,6901
0,02	0,7895	0,7126	0,6559	0,6102	0,5718
0,03	0,7380	0,6489	0,5846	0,5340	0,4923
0,04	0,6957	0,5981	0,5291	0,4758	0,4327
0,05	0,6594	0,5556	0,4838	0,4291	0,3854
0,06	0,6276	0,5193	0,4455	0,3903	0,3467
0,07	0,5991	0,4875	0,4127	0,3574	0,3142
0,08	0,5734	0,4593	0,3839	0,3289	0,2864
0,09	0,5498	0,4340	0,3585	0,3041	0,2624
0,10	0,5282	0,4111	0,3359	0,2821	0,2414
0,15	0,4405	0,3224	0,2508	0,2020	0,1665
0,20	0,3753	0,2609	0,1947	0,1513	0,1209
0,25	0,3243	0,2154	0,1550	0,1168	0,0907
0,30	0,2831	0,1804	0,1256	0,0920	0,0697
0,35	0,2490	0,1528	0,1032	0,0737	0,0545
0,40	0,2204	0,1306	0,0858	0,0597	0,0433
0,45	0,1961	0,1124	0,0719	0,0490	0,0348
0,50	0,1752	0,0974	0,0608	0,0405	0,0282
0,55	0,1571	0,0848	0,0517	0,0337	0,0231
0,60	0,1413	0,0742	0,0442	0,0283	0,0190
0,65	0,1274	0,0651	0,0380	0,0239	0,0158
0,70	0,1152	0,0574	0,0328	0,0202	0,0132
0,75	0,1044	0,0507	0,0284	0,0172	0,0110
0,80	0,0948	0,0450	0,0247	0,0147	0,0093
0,85	0,0862	0,0400	0,0215	0,0126	0,0079
0,90	0,0786	0,0356	0,0188	0,0109	0,0067
0,95	0,0717	0,0317	0,0165	0,0094	0,0057
1,00	0,0655	0,0285	0,0145	0,0082	0,0049
1,1	0,0549	0,0229	0,0113	0,0062	0,0036
1,2	0,0462	0,0186	0,0089	0,0047	0,0027
1,3	0,0390	0,0151	0,0070	0,0036	0,0020
1,4	0,0331	0,0124	0,0056	0,0028	0,0015
1,5	0,0282	0,0102	0,0045	0,0022	0,0012
1,6	0,0240	0,0084	0,0036	0,0017	0,0009
1,7	0,0205	0,0070	0,0029	0,0014	0,0007
1,8	0,0176	0,0058	0,0024	0,0011	0,0005

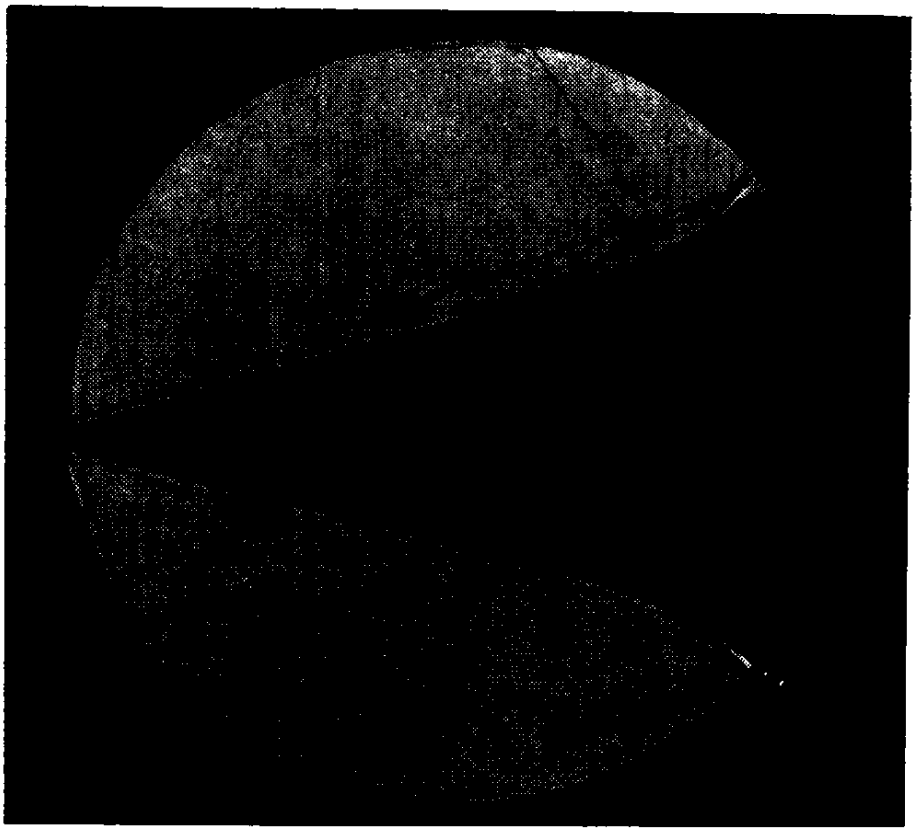
Продолжение табл. 4

η	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
1,9	0,0151	0,0048	0,0019	0,0009	0,0004
2,0	0,0130	0,0040	0,0016	0,0007	0,0003
2,2	0,0097	0,0028	0,0010	0,0004	0,0002
2,4	0,0072	0,0020	0,0007	0,0003	0,0001
2,6	0,0054	0,0014	0,0005	0,0002	
2,8	0,0041	0,0010	0,0003	0,0001	
3,0	0,0031	0,0008	0,0002		
3,2	0,0024	0,0006	0,0002		
3,4	0,0018	0,0004	0,0001		
3,6	0,0014	0,0003			
3,8	0,0011	0,0002			
4,0	0,0008	0,0002			
4,2	0,0006	0,0001			
4,4	0,0005				
4,6	0,0004				
4,8	0,0003				
5,0	0,0002				
5,2	0,0002				
5,4	0,0001				

Таблица 5

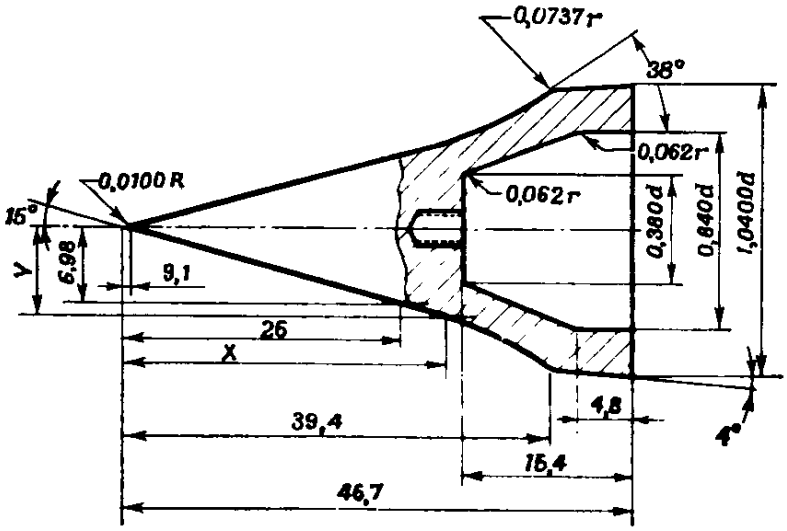
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ОТРЫВА ОТ НАГРЕТОЙ СТЕНКИ, $M_e(0) = 0$ [44]

A	-1	$-0,2951$	A	-1	$-0,2951$
T_1	$-9,545$	$-7,175$	T_1^*	$-0,7073$	$-0,7355$
T_2	$-18,24$	$-8,158$	T_2^*	$-0,10014$	$-0,08571$
T_3	$-187,7$	$-66,20$	T_3^*	$-0,07636$	$-0,07129$
T_4	-2092	$-532,3$	T_4^*	$-0,06808$	$-0,05875$
T_5	$-2,333 \cdot 10^4$	-4246	T_5^*	$-0,05211$	$-0,04804$
X_0	0,0741	0,1025	X_0Y_0	0,0649	0,0900
X_{sep}	0,067	0,093			



Фиг. 29. Пример развитого отрыва ламинарного слоя на осесимметричной поверхности сжатия [49].

$M_\infty = 6{,}78$; $T_0 = 500°$ C, $p_0 = 29$ ата; $T_w = -62°$ C; $T_w/T_0 = 211$ K/772 K $= 0{,}27$.



Фиг. 30. Модель и ее размеры [49].

Половина угла при вершине начального конуса 15°; максимальный угол наклона контура 38°; расчетное число Маха 7; масштаб 2,4 : 1.

Примечание. Все размеры даны в миллиметрах.

$x \pm 0{,}01$ мм	27,05	28,08	29,09	30,09	31,10	32,12	33,15	34,16	35,20	36,20	37,08
$y \pm 0{,}01$ мм	7,25	7,54	7,84	8,15	8,50	8,86	9,27	9,70	10,16	10,72	11,28

[49, 50] для осесимметричной поверхности сжатия при $4{,}5 < M_\infty < 7{,}4$.

Как видно из фиг. 29, отрыв пограничного слоя на конической поверхности вызывает скачок, взаимодействующий с конической головной волной.

Результаты испытаний с использованием модели, представленной на фиг. 30, при $M_\infty = 7$, полной температуре 722—772 К в интервале отношений температуры стенки к полной температуре T_w/T_s от 0,3 до 0,8 показывают, что при $T_w/T_s = 0{,}6—0{,}8$ область отрыва ламинарного пограничного слоя была значительной, а при охлаждении стенки, соответствующем $T_w/T_s \approx 0{,}4—0{,}3$, область отрыва исчезала.

Кроме того, если T_w/T_s увеличивается, отрыв распространяется выше по потоку и влияние его на внешнее течение возрастает, и наоборот.

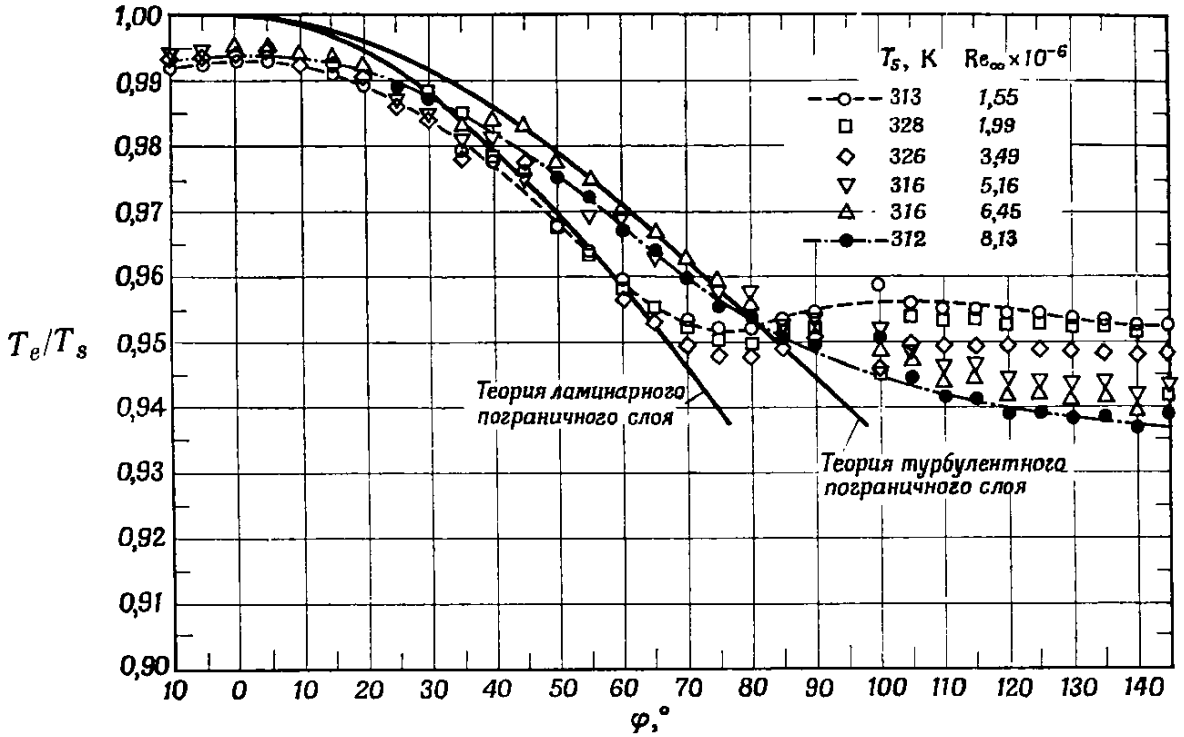
4. ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООБМЕНА НА ОТРЫВНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ И ГИПЕРЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Имеется большое число работ, посвященных влиянию теплообмена на отрывное течение при больших скоростях (сферы, уступы, вырезы, иглы и т. д.). В данном разделе дается обзор экспериментальных исследований, в следующем разделе будет описан расчет влияния теплообмена на отрывное течение.

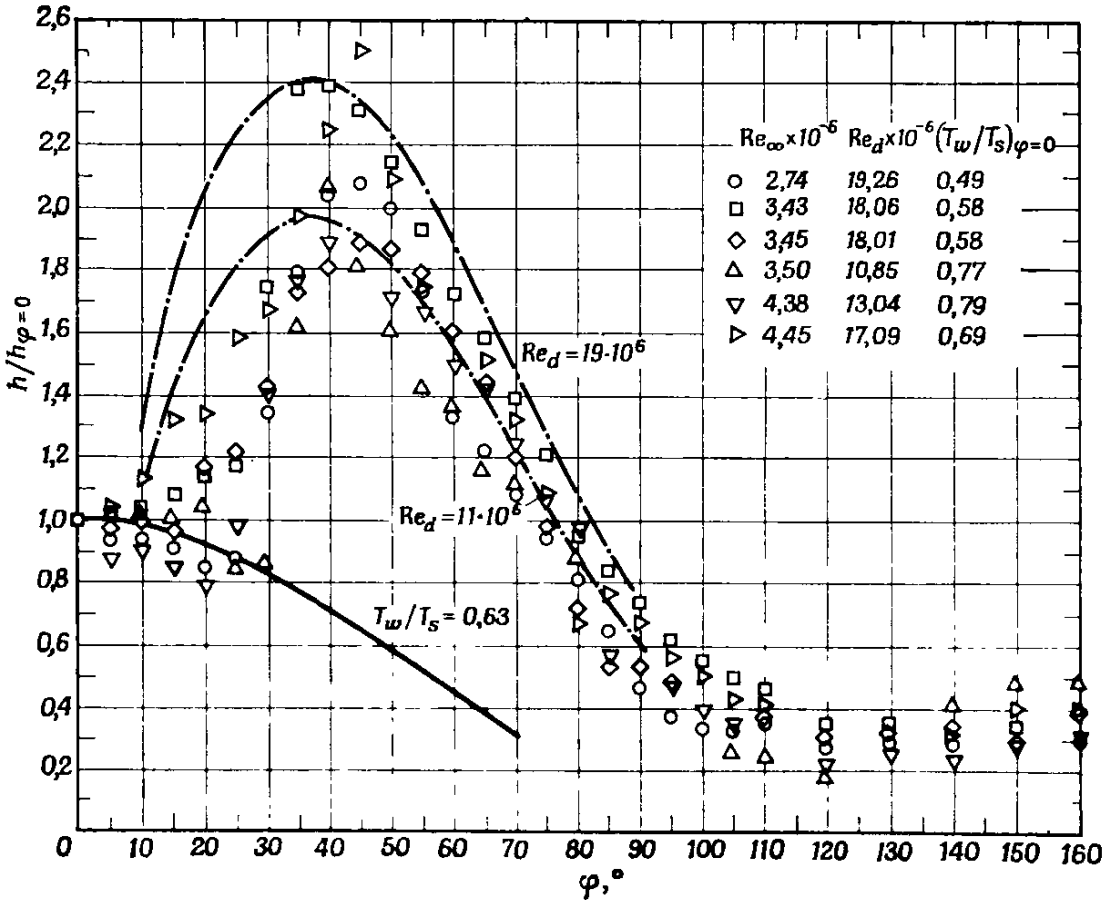
4.1. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА К СФЕРЕ ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Беквит и Галлагер [51] измерили тепловой поток и равновесную температуру в области отрыва на поверхности сферы. Эксперименты были проведены при $M_\infty = 2{,}00—4{,}15$ и $Re_d = 1{,}5 \cdot 10^6 — 8{,}1 \cdot 10^6$ (число Рейнольдса вычислено по параметрам невозмущенного потока и диаметру сферы). Считалось, что точка отрыва совпадает с точкой пересечения косого скачка в начале области отрыва с поверхностью сферы. Интервал измеренных температур на поверхности сферы составлял 30—50° С. Наибольшая температура была в точке $\varphi = 50°$, а наименьшая — в области отрыва.

Как видно из фиг. 31, в области отрыва отношение равновесной температуры T_e к полной температуре T_s было почти постоянным вдоль поверхности модели и немного уменьшалось с ростом числа Рейнольдса. Здесь под «равновесной температурой» подразумевается локально измеренная температура, при которой $\partial T/\partial t = 0$ (t — время), в отличие от «температуры восстановления», соответствующей нулевому местному тепловому потоку.

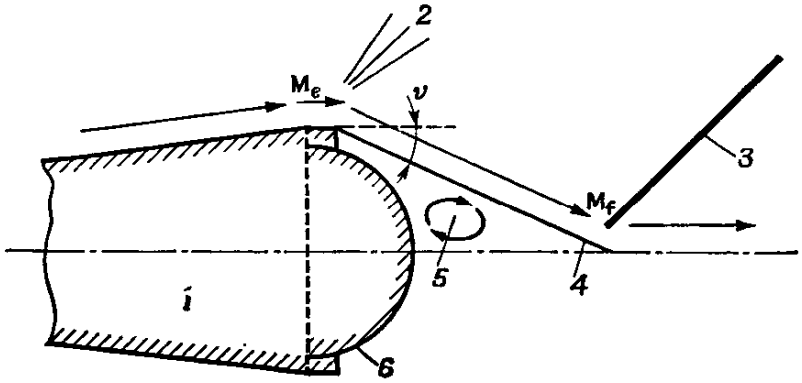


Фиг. 31. Отношение равновесной температуры к полной температуре при $M_\infty = 2{,}0$ и нескольких числах Рейнольдса [51].



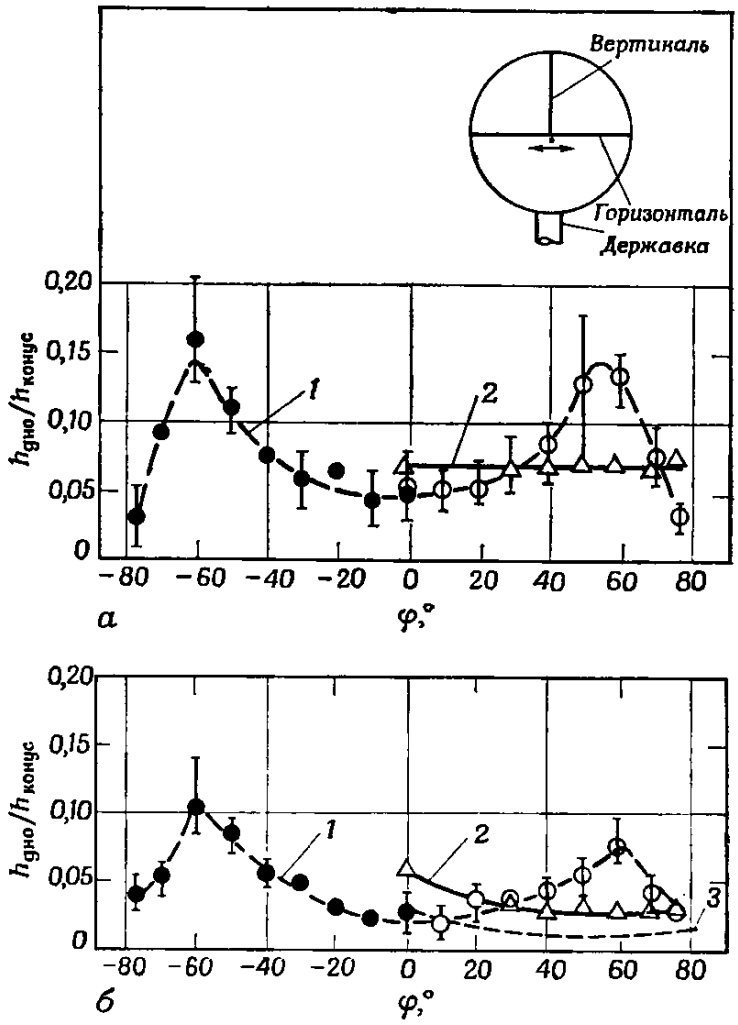
Фиг. 32. Зависимость от φ отношения местного коэффициента теплоотдачи к коэффициенту теплоотдачи в критической точке при $M_\infty = 2{,}0$ и нескольких числах Рейнольдса [51].

——— теория ламинарного пограничного слоя; —·— теория турбулентного пограничного слоя, плоская пластина.



Ф и г. 33. Схема модели [52].

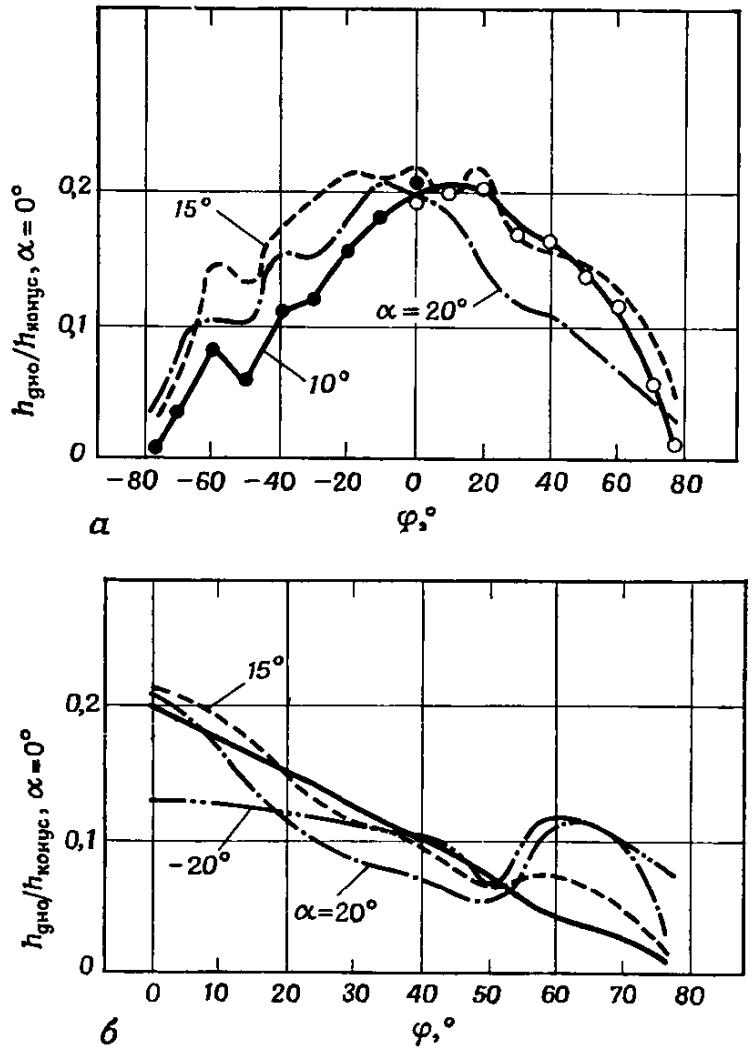
1 — конус; *2* —волны разрежения; *3*—замыкающий скачок уплотнения; *4* — разделяющая линия тока; *5* — застойная зона; *6* — полусферическое дно.



Ф и г. 34. Распределение теплового потока по дну модели 3 при нулевом угле атаки [52].

а — Re/м = $7{,}9\cdot10^6$; *б* — Re/м = $4\cdot10^6$. *1* — по горизонтали; *2* — по вертикали; *3* — по вертикали для турбулентного течения.

При меньших числах Маха число Рейнольдса влияло на положение точки отрыва и давление в области отрыва; с ростом числа Рейнольдса точка отрыва смещалась назад. Коэффициент теплоотдачи h, вычисленный по результатам измерений, представлен



Фиг. 35. Распределение теплового потока по дну модели 3 при угле атаки α, отличном от нуля, и Re/м $= 4 \cdot 10^6$ [52].

φ — угловое расстояние от центра дна; *а* — распределение по горизонтали: —— $\alpha = 10°$; — — — $\alpha = 15°$; —·— $\alpha = 20°$; *б* — распределение по вертикали: —··— $\alpha = -20°$; —— $\alpha = 10°$; — — — $\alpha = 15°$; —•— $\alpha = 20°$; все данные соответствуют турбулентному течению.

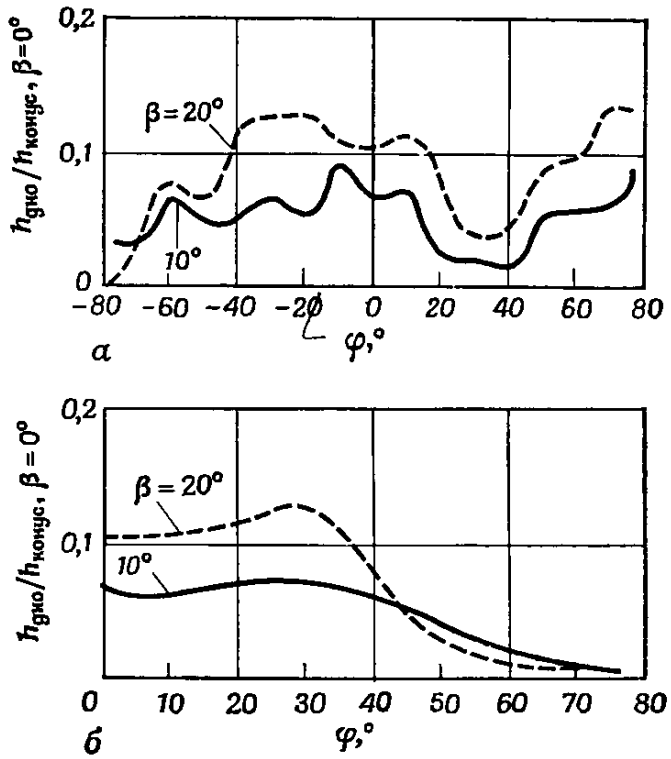
на фиг. 32. При небольших углах φ кривая h круто возрастает вследствие перехода ламинарного течения в турбулентное и достигает максимума при $\varphi \approx 40°$.

При $M_\infty = 4{,}15$ и большем числе Рейнольдса коэффициент h подобен полученному для $M_\infty = 2$, за исключением смещения точки перехода назад.

Френсис и Дэви [52] провели экспериментальное исследование теплопередачи к полусферической донной части тонкого

конуса при $M_\infty \approx 9$, $Re_d/м = 7{,}9 \cdot 10^5 - 4 \cdot 10^6$ и углах атаки и скольжения от 0 до 20°. Схематически модель показана на фиг. 33.

Носовая часть одной модели (3) была острой с полууглом 9°, второй модели (2) — затупленной с отношением радиуса затупления к радиусу дна 0,3. При обтекании этих моделей поток разгоняется от местного числа M_e до окончательного M_f поворотом



Фиг. 36. Распределение теплового потока по дну модели 3 при угле скольжения β, отличном от нуля, и Re/м = $4 \cdot 10^6$ [52].

φ — угловое расстояние от центра дна; *а* — распределение по горизонтали; *б* — распределение по вертикали; все данные соответствуют турбулентному течению.

на угол ν, определяемый числом M_e и коэффициентом донного давления. Заторможенный воздух из пограничного слоя при отрыве попадает в область следа, образуя вихри и течение сложной структуры.

На фиг. 34, *а* представлены результаты измерений распределения теплового потока по дну модели 3 для ламинарного течения при малом числе Рейнольдса. В отличие от приблизительно постоянного теплового потока по вертикали горизонтальное распределение имеет пик теплового потока, подобный наблюдаемому в случае турбулентного течения (фиг. 34, *б*). Средняя величина теплового потока на основе данных, представленных на фиг. 34, составляет около 7% теплового потока для присоединенного течения при малом числе Рейнольдса и около половины этой величины для боль-

шого числа Рейнольдса в случае тонкого пограничного слоя и отношения толщины пограничного слоя в точке отрыва к радиусу дна, меньшего единицы. На фиг. 35 и 36 показано влияние углов атаки и скольжения на теплопередачу. Хотя распределение теплового потока нерегулярно при малом числе Рейнольдса, пик распределения по горизонтали, наблюдаемый при нулевом угле атаки, исчезает; однако в центре полусферического дна появляется отчетливое «горячее пятно» (фиг. 35). Величина теплового потока к донной части в исследованном интервале углов атаки изменяется мало, однако она несколько больше, чем при нулевом угле атаки, и около угловой точки возможен большой тепловой поток. Изменение теплового потока к модели 2 с затупленным носком аналогично наблюдаемому для остроносой модели 3, но величина среднего теплового потока приблизительно вдвое больше, чем для остроносой модели. С увеличением углов атаки или скольжения влияние затупления, по-видимому, исчезает.

4.2. ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ НА ОТРЫВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ УСТУПАМИ, ВЫРЕЗАМИ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ВЫСТУПАМИ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ И ГИПЕРЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Результаты исследований теплопередачи в отрывных течениях, вызванных уступами, вырезами, расширениями и цилиндрическими выступами на поверхности при сверхзвуковых скоростях, приложимы к поверхностям щитков сверхзвуковых крыльев, пилонам, а также обтекателям различных форм, часто выступающим над поверхностями самолета. В этих случаях толщина вязкого слоя того же порядка, что и высота уступа, выреза или цилиндра.

В табл. 6 приведена сводка различных экспериментальных исследований, связанных с этими проблемами. Исследования отрыва, вызываемого уступами при $M_\infty = 2{,}44$ [4], уже упоминались в гл. I, поэтому в настоящей главе они рассматриваться не будут.

4.2.1. Влияние теплопередачи на отрывное течение, вызываемое уступами и коническими расширениями

Томан [53] и Кавен [54] провели измерения теплового потока, температуры восстановления, напряжения трения и давления в турбулентном отрывном течении, вызванном разными формами поверхности тела при $M_\infty = 1{,}8$. Для сравнения Томан [53]

Таблица 6

СВОДКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ОТРЫВНЫ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Схема модели	Материал, размеры модели	Пограничный слой	M_∞	Полученные величины
M_∞	Плоская стенка аородинамической трубы. Высота уступа 8—25,4 мм	Турбулентный	2,44	Коэффициент тепл отдачи, коэффицие восстановления, ст тическое давлени напряжение трени число Маха
M_∞	Дерево, датчик смонтирован на плексигласе. Длина выреза 60 мм, глубина 5, 10, 20 мм. Высота уступа, обращенного навстречу потоку, 12,21 мм: высота уступа, расположенного по потоку, 20 мм; высота выступа 20 мм	Турбулентный	1,8	Коэффициент тепл отдачи, коэффицие восстановления, ст тическое давлени напряжение трени характеристики п граничного слоя
M_∞	Бальза и медь, покрытая тонкой бумагой. Высота 12 мм	Турбулентный	1,8	Тепловой пото коэффициент тепл отдачи, коэффицие восстановления, те пература лобовой п верхности уступ статическое давлен
M_∞	Дерево, обшитое нержавеющей сталью, верхняя сторона из материала с плохой теплопроводностью. Высота 25,4 мм, угол клина 15°	Ламинарный и турбулентный	4	Тепловой пото коэффициент тепл отдачи, температур статическое давл ние, профиль скор сти, толщина погр ничного слоя
Осесимметричная; Плоская; M_∞	Двумерные модели из меди (сплошные)	Ламинарный и турбулентный	0,3—4,0	Тепловой пото коэффициент тепл отдачи, число Ре нольдса перехода
M_∞; Модель охлаждалась водой и нагревалась паром	Теплоизолированная модель из нержавеющей стали. Теплоизоляция: воздушный зазор 0,5 мм и слюда толщиной 0,127 мм. Глубина вырезов 6,35—12,7 мм, длина 51—380 мм	Турбулентный	2,9	Коэффициент тепл отдачи, коэффицие восстановления, те ловой поток
M_∞; Обращенный навстречу потоку уступ на цилиндрическом чертуое модели	Цилиндр из инконеля 0,8 мм, кольцевой выступ высотой 12 мм	Турбулентный	8,6 (макс.)	Число Рейнольдса число Маха, стати ческое давление, то щина пограничного слоя, число Стэнтона коэффициент тепло отдачи, Nu/Re_w

ТЕЧЕНИЯХ, ВЫЗЫВАЕМЫХ РАСШИРЕНИЯМИ, ВЫРЕЗАМИ И УСТУПАМИ ПРИ

Интервал температур	Число Рейнольдса	Примечание	Источник
$T_w = 65°$ C $T_s = 40°$ C $T_r \approx 18°$ C	Для уступа, обращенного навстречу потоку, $Re_\theta = 3580-7500$; для уступа, расположенного по потоку, $Re_\theta = 6100-12\,390$	Измерения на стенке аэродинамической трубы	Гэдд, Коуп, Этридж [4]
$T_w = 10-30°$ C	$Re = 10^7$	Наблюдения с помощью теневого прибора и интерферометра, испытания в аэродинамической трубе	Томан [53]
$T_w = 9{,}3-32{,}4°$ C	$Re = 10^7$	Статическое давление измерялось вблизи лобовой поверхности уступа и на самой поверхности, все остальные измерения—только на лобовой поверхности уступа. Испытания в аэродинамической трубе	Кавен [54]
$T_w = 224-293$ K	$Re \approx O(10^7)$	Измерения теплового потока, особенно в области присоединения. Испытания в аэродинамической трубе	Нейсмит [57]
$T_w = 300-367$ K	$Re = 10^5-4 \cdot 10^6$	Испытания в аэродинамической трубе	Ларсон [61]
$T_s = 10-316°$ C $T_w - T_\infty = 37 \div (-73)°$ C	$Re = 1{,}5 \cdot 10^6$ для эквивалентной плоской пластины	Визуализация потока, искровая теневая съемка. Испытания в аэродинамической трубе	Харват, Дьюи, Рус, Хитц [55]
Термопары для интервала температур 220—890 K	$Re/м = 5{,}9 \cdot 10^6$ (макс.)	Испытания в свободном полете в течение 25 с на высоте 14 км	Макконнел [59]

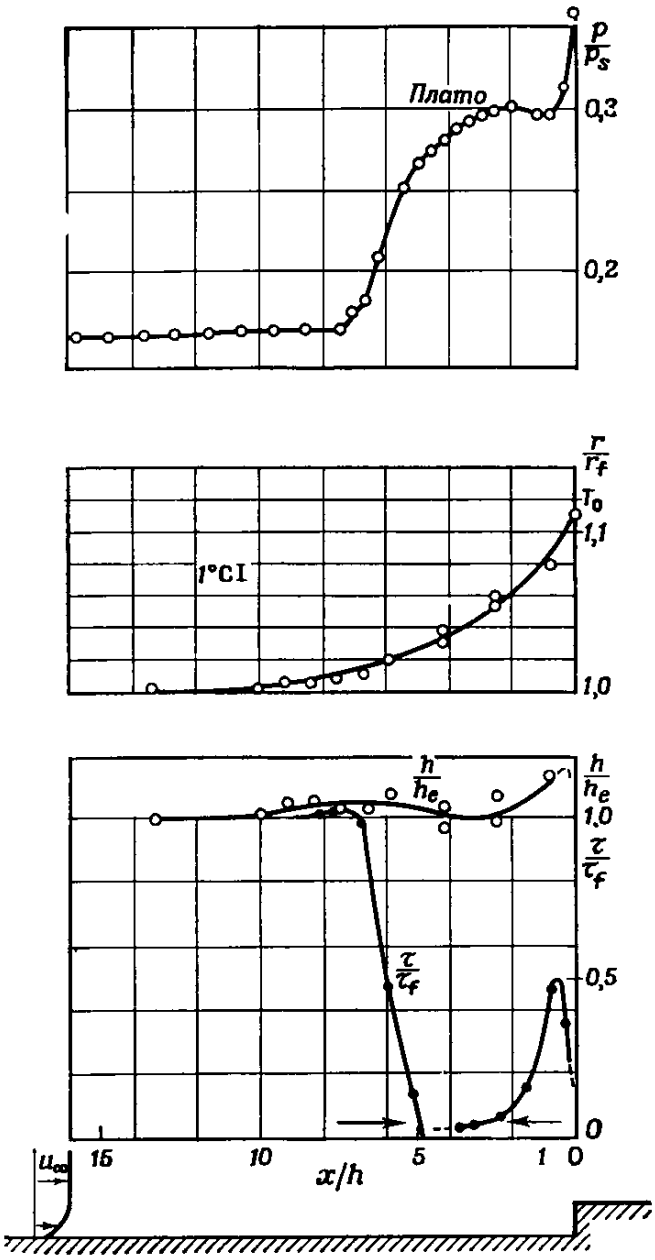
проводил измерения на плоской пластине, его результаты обозначаются индексом f. Кавен [54] исследовал только уступ, обращенный навстречу потоку, сходный с исследованным Томаном. Коэффициент теплоотдачи h и коэффициент восстановления r определялись по формулам

$$h = q/(T_w - T_{эфф})$$

и

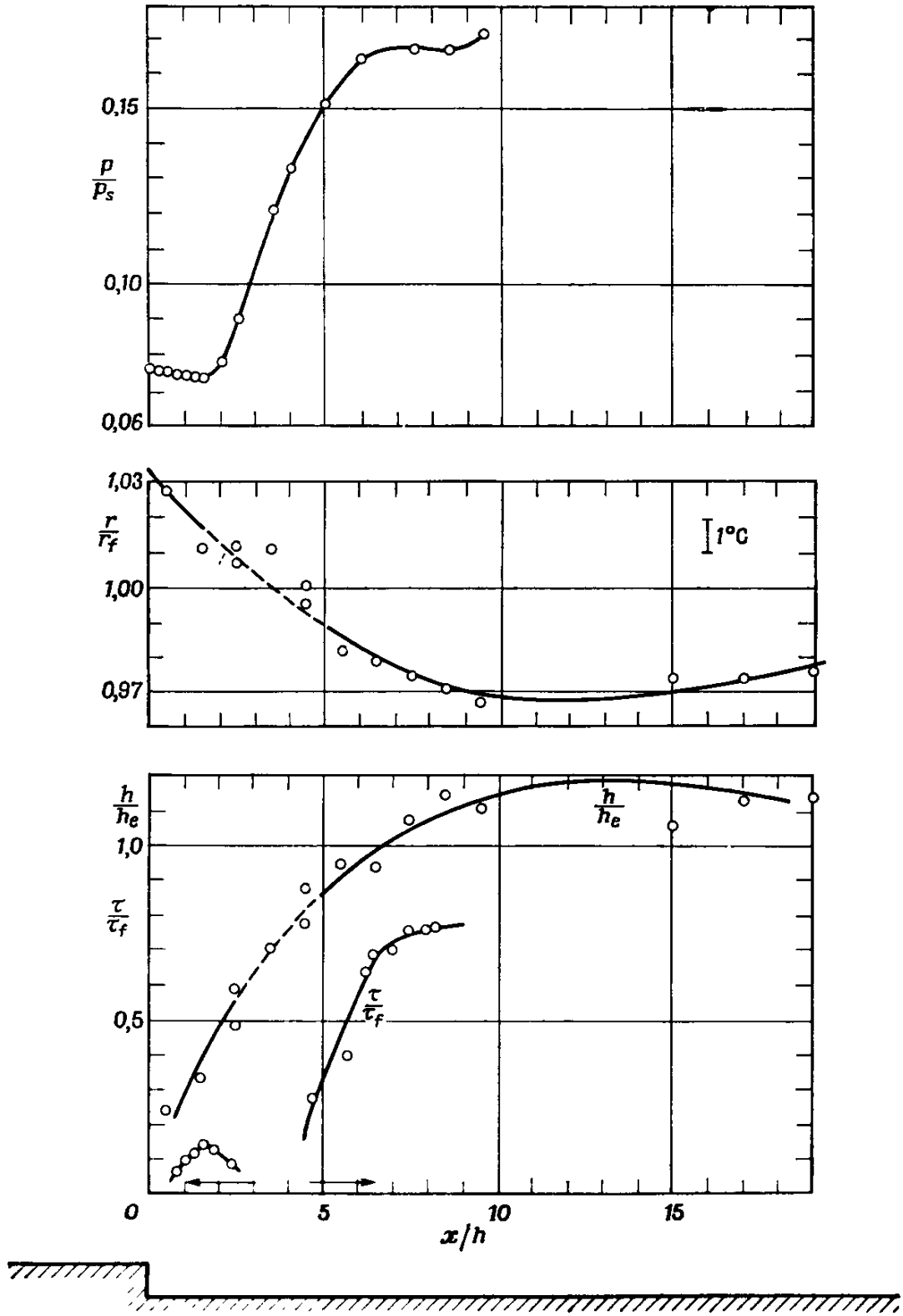
$$r = (T_r - T_\infty)/(T_s - T_\infty),$$

где q — плотность местного теплового потока Вт/м^2; T_w — температура стенки, $T_{эфф}$ — эффективная температура, T_r — температура восстановления и T_∞ — температура невозмущенного потока в °С. $T_{эфф}$ соответствует температуре, при которой в начальный момент времени t тепловой поток $q_{t=0}$ равен нулю. $T_{эфф}$ не обязательно должна быть равна T_r, хотя фактически они равны. Некоторые экспериментальные результаты Томана [53] (за исключением выемки), упомянутые в гл. I, представлены на фиг. 37—40.



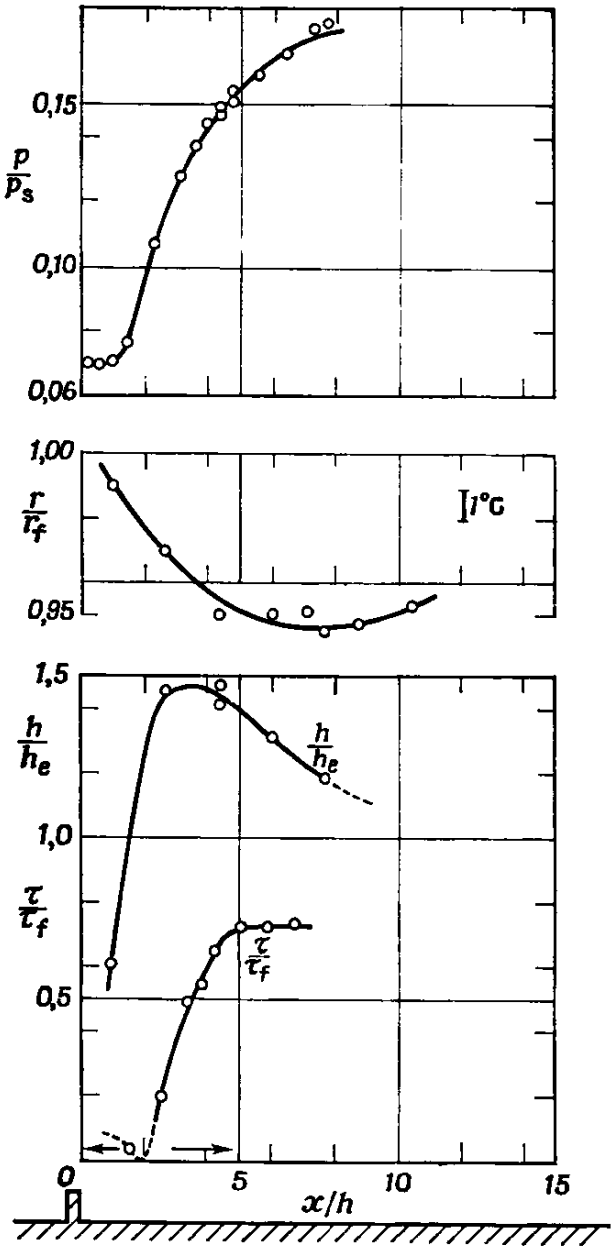
Фиг. 37. Распределение давления, коэффициента восстановления, коэффициента теплоотдачи и напряжения трения перед уступом, обращенным навстречу потоку (высота 12 мм) [53].

Для уступа, обращенного навстречу потоку, распределение давления, теплового потока и напряжения трения, полученные Томаном [53] и Гэддом [4], подобны. Хотя плато давления вблизи лобовой поверхности уступа было зарегистрировано во всех опытах, Томан зафиксировал внезапный рост давления вблизи лобовой поверхности уступа, тогда как на самой поверхности давление было равно плато-давлению (Гэдд повышения давления не обнаружил). Распределения коэффициента восстановления, полученные различными исследователями, немного различались. Томан получил монотонно возрастающий коэффициент r при приближении к уступу с максимумом на лобовой поверхности уступа,

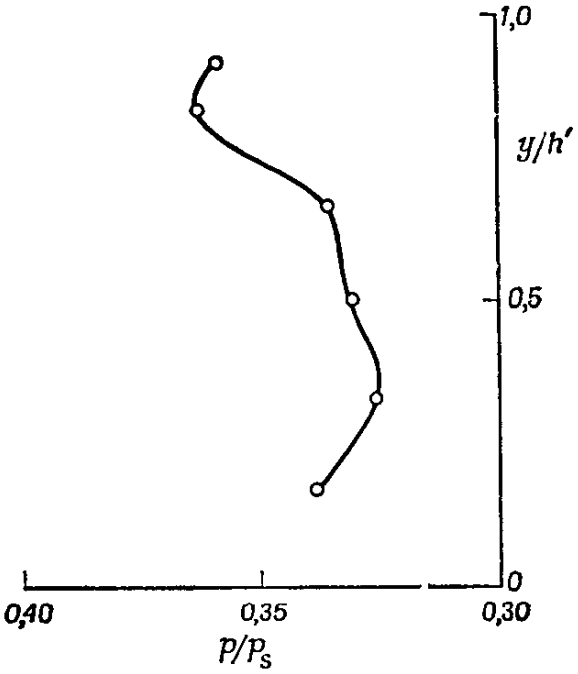


Фиг. 38. Распределение давления, коэффициента восстановления, коэффициента теплоотдачи и напряжения трения за уступом, расположенным по потоку (высота 20 мм) [53].

в то время как Гэдд получил S-образное распределение с максимумом перед уступом. Для уступа, расположенного по потоку, все распределения давления, коэффициента теплоотдачи, напряжения трения и коэффициента восстановления, полученные Томаном и Гэддом, подобны. Харват и др. [55] получили сходное распределение теплового потока за уступом, расположенным по потоку, для толстых турбулентных пограничных слоев. За областью присоединения тепловой поток уменьшался из-за большой толщины пограничных слоев. Эти распределения также подобны полученным для течения за выступом, но в отличие от уступа, расположенного по потоку, тепловой поток



Фиг. 39. Распределение давления, коэффициента восстановления, коэффициента теплоотдачи и напряжения трения за выступом (высота 12 мм) [53].



Фиг. 40. Распределение давления по лобовой поверхности уступа, обращенного навстречу потоку [54].

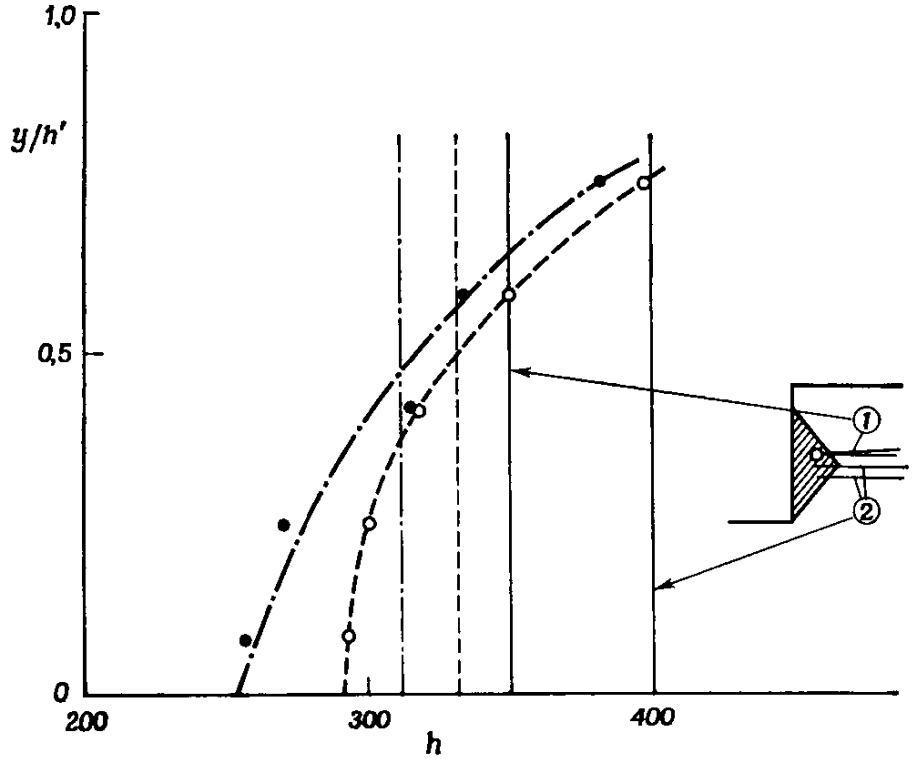
в случае выступа h быстро достигал максимума и внезапно уменьшался.

На большом расстоянии (до 18 высот уступа) за уступом, расположенным по потоку, и за выступом коэффициент восстановления не достигал полной величины. Как указывает Бри-

нич [56], даже на расстоянии 80 высот уступа вниз по потоку коэффициент восстановления не достигает полной величины.

Из опытов Томана следует, что в случае уступа, обращенного навстречу потоку, отрыв очень слабо влияет на теплопередачу, т. е. большие возмущения, вызываемые моделями, и трехмерные эффекты не оказывают существенного влияния на h. В области отрыва поверхностное трение уменьшается в большей степени, чем тепловой поток, так что нельзя применить аналогию Рейнольдса, не имея дополнительных сведений о характеристиках течения в области отрыва. За уступом, расположенным по потоку, образуется вихревой слой, который вызывает уменьшение температуры восстановления за замыкающим скачком, хотя вихри были очень слабыми.

Как видно из фиг. 40 и 41, в верхней и нижней части лобовой поверхности уступа давление больше, чем в средней части. Полученные для лобовой поверхности уступа величины h заключены

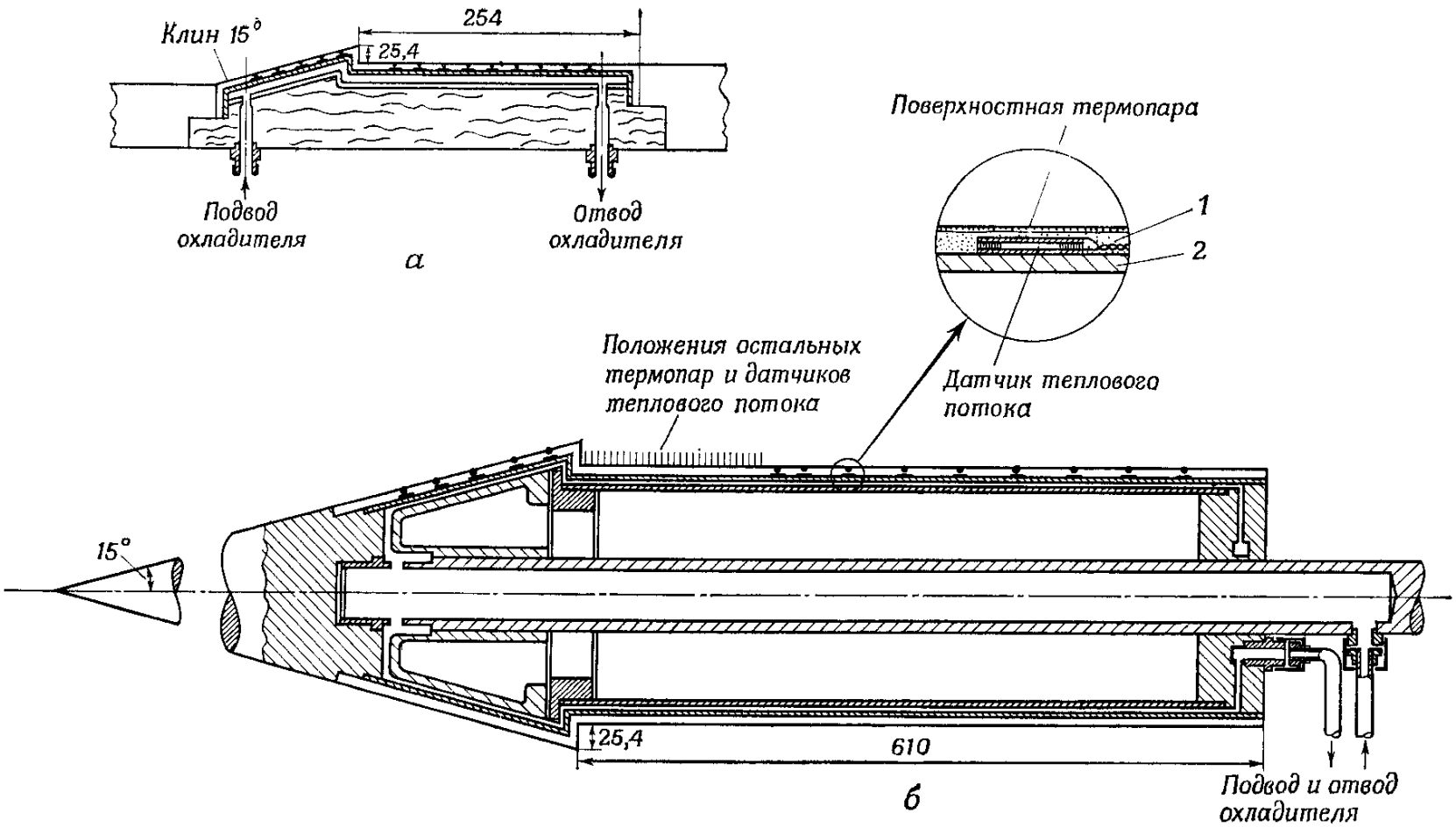


Фиг. 41. Коэффициент теплоотдачи h в зависимости от координаты y/h' и средние величины h по данным нескольких опытов [54].

⊙ результаты расчетов для начальных моментов времени нескольких опытов; ● результаты расчетов для одного непрерывного опыта.

в пределах от 290 до 400 Вт/м^2·град, в то время как в невозмущенном пограничном слое в том же сечении h = 200 Вт/м^2·град [54] (фиг. 41).

Результаты для области присоединения за уступом, образованным клином с углом 15° (фиг. 42) [57, 58], представлены на фиг. 43.



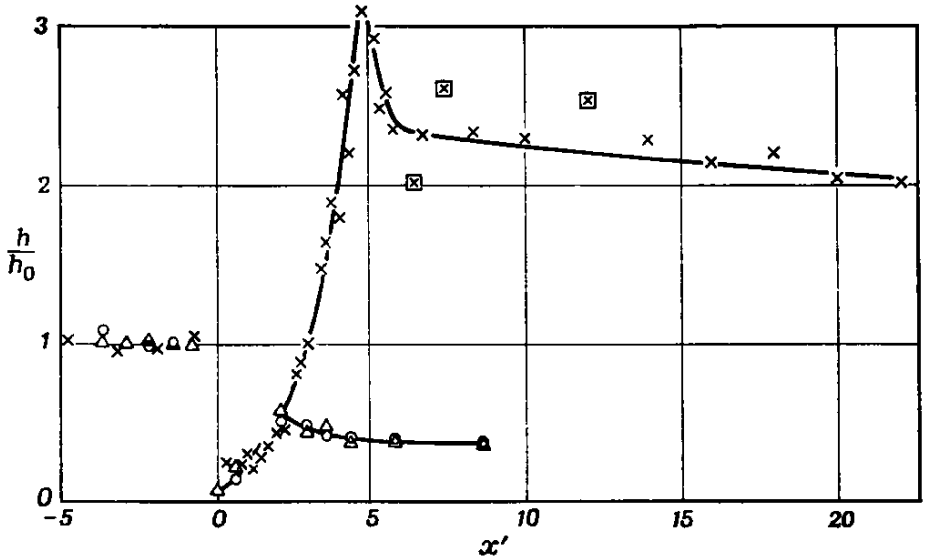
Ф и г. 42. Модели [58].

а — модель I (клин); *б* — модель II (конус — цилиндр); *1* — смесь смолы и алюминиевого порошка; *2* — стальная пластина.

Чтобы свести к минимуму перетекание тепла вдоль поверхности и измерить величину пика теплового потока в узкой области присоединения, модель уступа была изготовлена из материала с низкой теплопроводностью, так как другим исследователям не удалось определить пик теплового потока при использовании материала с большой теплопроводностью. Коэффициент теплоотдачи для клина определялся по формуле

$$h = q/(T_{aw} - T_w).$$

Присоединение за клином и за конусом, переходящим в цилиндр, происходит на расстоянии около 2 и 5 высот уступа, и пиковые



Фиг. 43. Тепловой поток в области присоединения [58].

x' — расстояние за уступом, отнесенное к высоте уступа; × конус — цилиндр; △ клин ($p_0 = 3$ атм); ○ клин ($p_0 = 5$ атм); ⊠ выпадающие точки, очевидно, повреждены датчики.

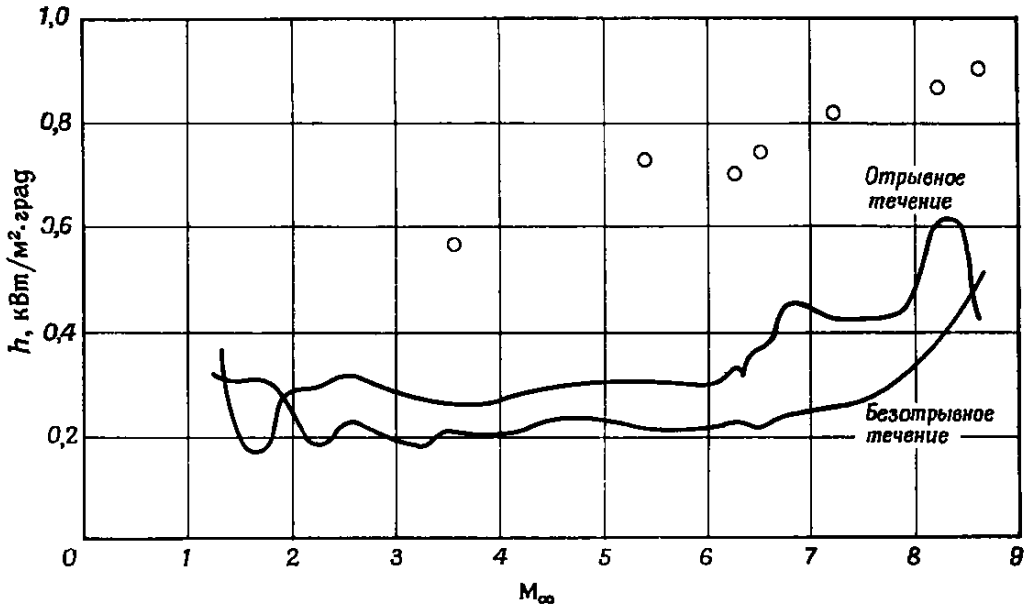
величины h были измерены вблизи области присоединения. На фиг. 43 индекс 0 соответствует средней величине до отрыва. Величина пика и общий уровень тепловых потоков за уступом относительно тепловых потоков перед отрывом зависят от того, был ли пограничный слой перед отрывом ламинарным или турбулентным. В первом случае они зависят также от того, происходит ли переход к турбулентному режиму до присоединения. Из фиг. 43 видно, что для конуса, переходящего в цилиндр, h/h_0 становится больше единицы в отличие от клина. Это явление обусловлено переходом ламинарного слоя смешения в турбулентный после отрыва.

Результаты выполненных в свободном полете исследований турбулентного отрывного течения, вызванного уступом, обращенным навстречу потоку [59], представлены на фиг. 44.

Для сравнения приведены также значения коэффициента теплоотдачи, вычисленные по методу Эккерта [60], для кониче-

ского расширения, заменяющего область отрыва. Измеренные величины на 40—50% ниже расчетных, что согласуется с данными Ларсона [61], полученными в аэродинамической трубе.

Теплопередача в отрывном течении, вызванном коническим расширением, была исследована при $M_\infty = 6{,}8$ [62] и при $M_\infty = 4{,}98$ [63]. Отрыв наблюдался как при чисто ламинарном, так и при переходном течениях. Модель, использованная в экспериментах Фергюсона и Шефера [63], представлена на фиг. 45.



Фиг. 44. Коэффициент теплоотдачи в области отрыва по результатам измерений в свободном полете [59].

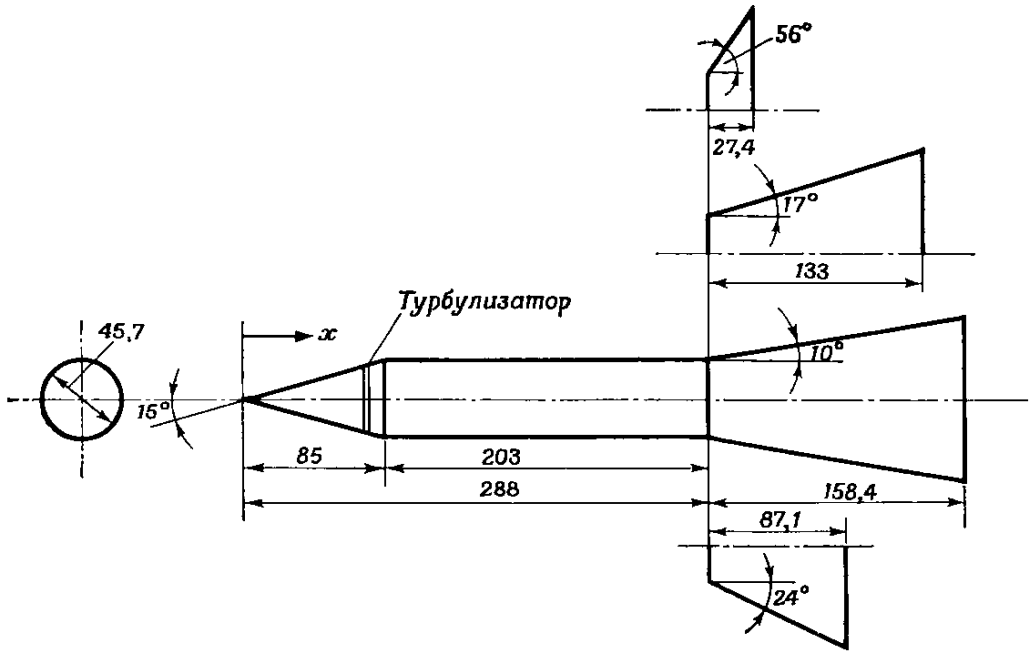
○ результаты расчета для эквивалентного конического расширения.

Геометрические параметры модели: полуугол конуса 15°, полуугол конического расширения 10, 17, 24 и 56°. Единичное число Рейнольдса (Re/м) составляло от $5{,}25 \cdot 10^6$ до $17{,}7 \cdot 10^6$, относительная температура стенки от 0,8 до 1,0, температура торможения 395 К. Область отрыва формировалась перед расширением, снижая сопротивление, но в некоторых условиях увеличивая тепловой поток после присоединения.

Переход происходил на турбулизаторах при единичном числе Рейнольдса (Re/м) более $6{,}5 \cdot 10^6$. Чисто ламинарное течение в области отрыва существовало только при минимальном угле конического расширения 10° и единичном числе Рейнольдса, (Re/м) менее $8{,}5 \cdot 10^6$. При чисто ламинарном течении в области отрыва не существовало пика теплового потока в области присоединения, и тепловой поток к поверхности расширения за присоединением (но перед переходом) был небольшим, но несколько выше вычисленного по теории ламинарного пограничного слоя (фиг. 46).

При переходном режиме течения в области отрыва существовал пик теплового потока в области присоединения. Тепловой поток

в области присоединения для конического расширения достаточно точно определяется расчетом по теории присоединенного турбу-



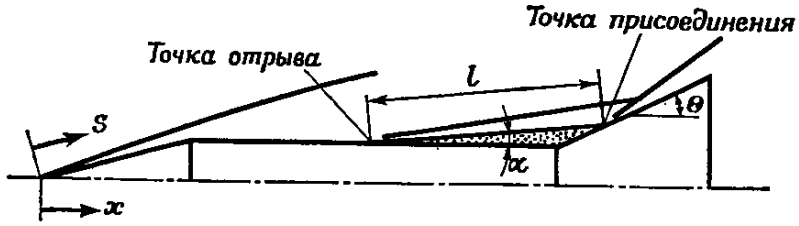
Фиг. 45. Размеры модели и расположение термопар и дренажных отверстий [63].

КООРДИНАТЫ ТЕРМОПАР И ДРЕНАЖНЫХ ОТВЕРСТИЙ

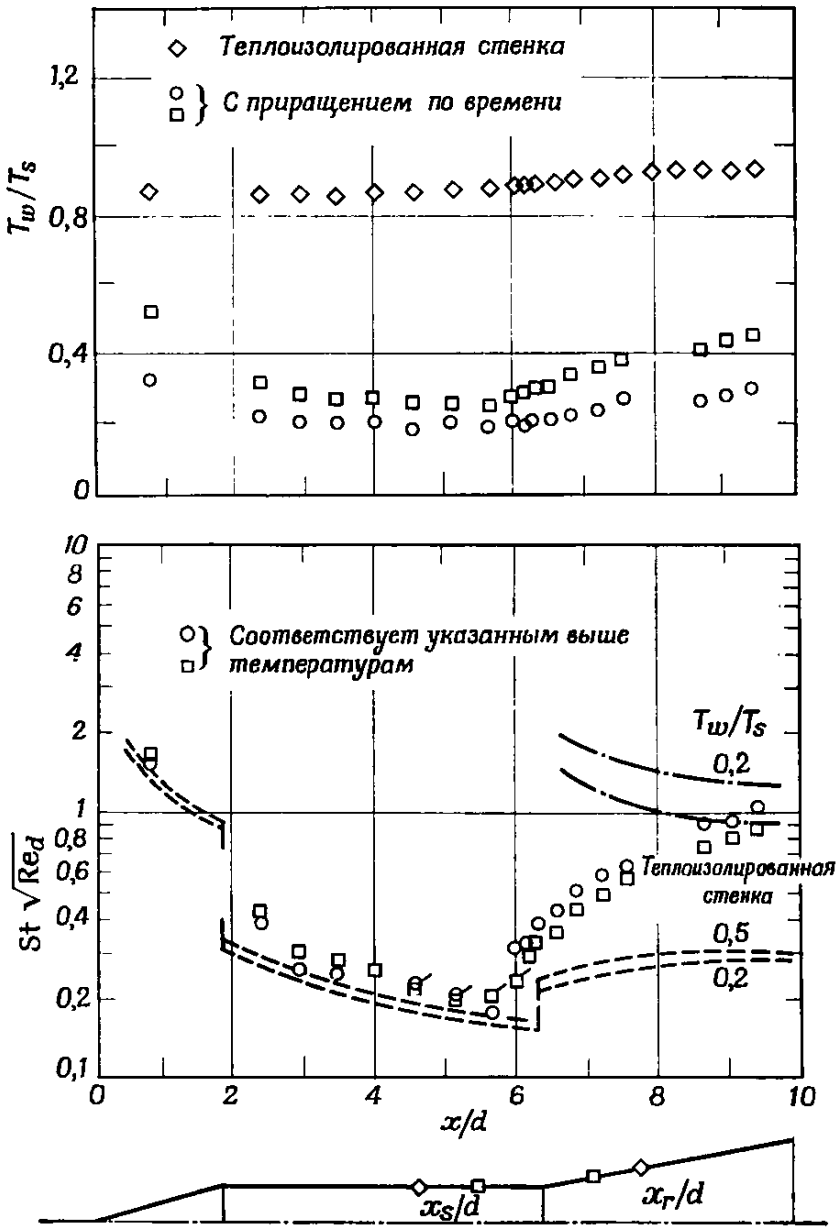
Конус—цилиндр	Коническое расширение			
	10°	17°	24°	56°
Расстояние вдоль оси модели x, мм				
36,8	289,2	289,7	289	288,8
108,4	302	302	300,8	292,3
133,9	314,2	313,5	312,2	299,6
159,2	331,3	330	324	306
172 *	347,8	346	335,2	313,2
184,7	364,8	362	346,6	
197,6 *	381,2	378,2	358	
210	398	394,2	370	
223,2 *	415	418,2		
235,4	431,8			
248,1 *				
260,9				
275,2				
283,2				

* Только дренажные отверстия.

лентного пограничного слоя, начинающегося в точке перехода от цилиндра к расширению. Протяженность области отрыва при чисто ламинарном и переходном режимах течения в ней



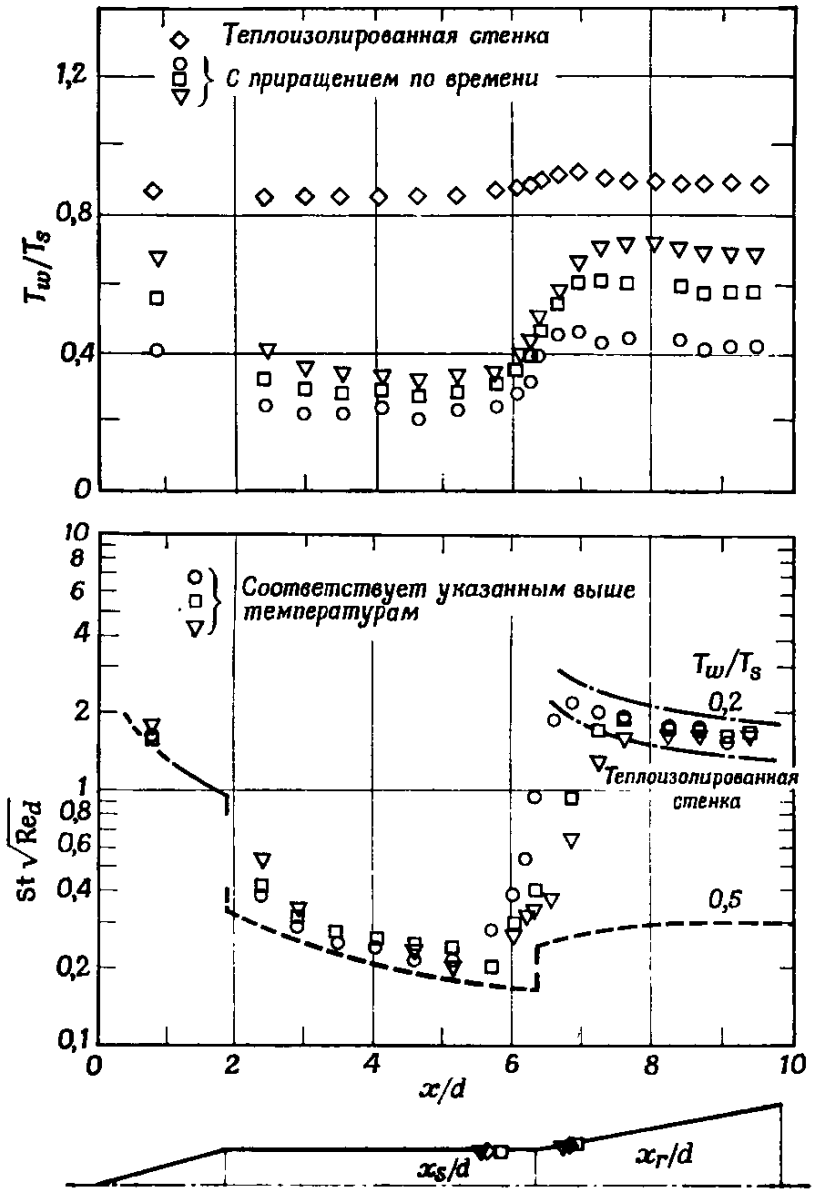
Ф и г. 46. Геометрические характеристики области отрыва [63].



Ф и г. 47. Результаты измерений теплового потока [63].

Значки с черточками означают возможную погрешность более ±20%; — — — расчет по теории ламинарного пограничного слоя [64]; —·— расчет по теории турбулентного пограничного слоя, начиная от точки излома контура [65]. Ламинарное течение в области отрыва; угол конического расширения 10°, единичное число Рейнольдса Re/м = $5{,}25\cdot10^6$; число Рейнольдса, вычисленное по диаметру тела $Re_d = 0{,}79\cdot10^6$.

уменьшалась с охлаждением стенки, уменьшением угла расширения и увеличением единичного числа Рейнольдса. Результаты измерений теплового потока представлены на фиг. 47. Величина $St\sqrt{Re_d}$ отложена в зависимости от x/d (d — диаметр цилиндра,

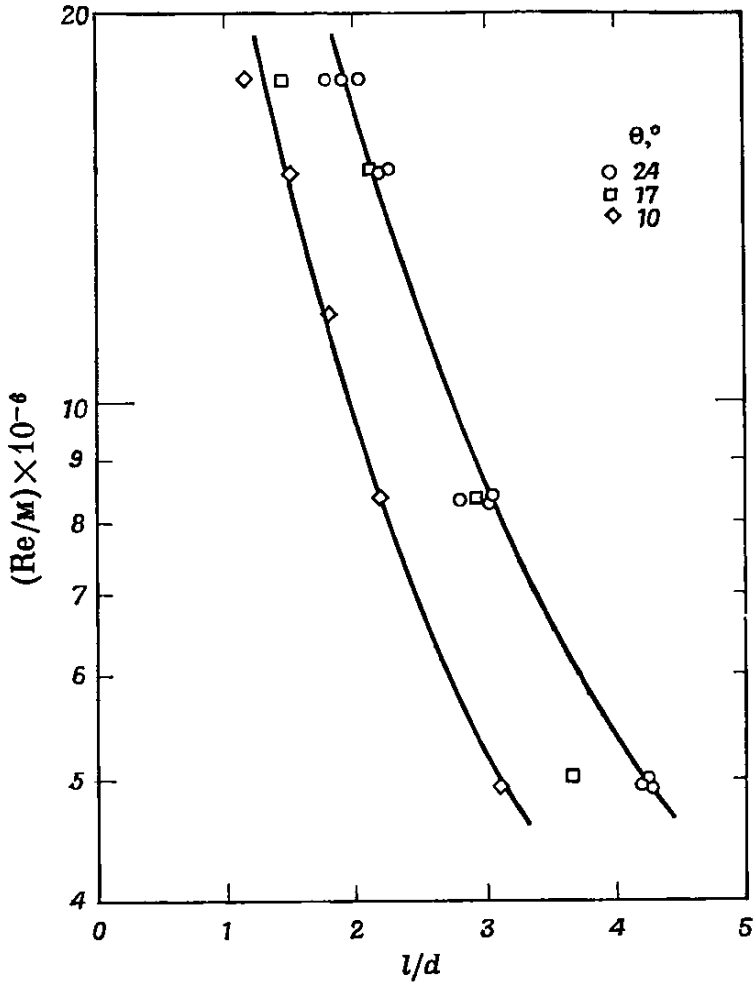


Фиг. 48. Результаты измерений теплового потока [63].

— — — расчет по теории ламинарного пограничного слоя [64]; —·— расчет по теории турбулентного пограничного слоя, начиная от точки излома контура [65]. Переходный режим течения в области отрыва; угол конического расширения 10°, единичное число Рейнольдса Re м = $17{,}7\cdot10^6$, число Рейнольдса, вычисленное по диаметру тела $Re_d = 2{,}66\cdot10^6$.

x — расстояние вдоль оси модели) и сравнивается с расчетами по методу Рошко [64] для присоединенного ламинарного слоя, а также по методу Рошко и Такера [65] для турбулентного присоединенного слоя. Точки отрыва и присоединения обозначены x_s и x_r. Как видно из фиг. 47, расчетные и экспериментальные данные

по влиянию температуры стенки на теплопередачу к изотермической стенке при ламинарном режиме течения в пограничном слое хорошо согласуются между собой. Тепловой поток минимален немного ниже по потоку за точкой отрыва, и протяженность

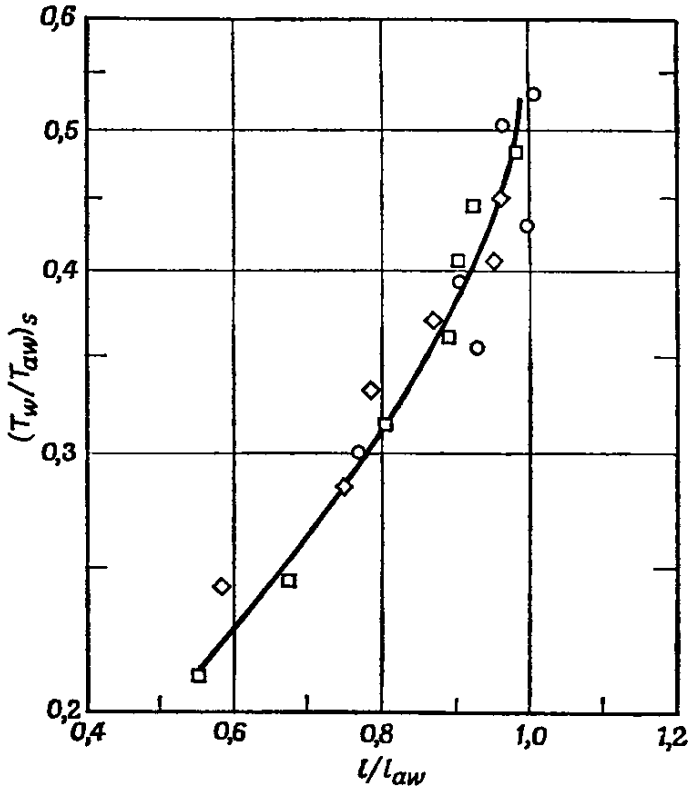


Фиг. 49. Влияние единичного числа Рейнольдса и угла конического расширения на геометрию области отрыва; теплоизолированная стенка [63].
l — длина области отрыва; Θ — угол расширения.

области низкого теплового потока весьма мала по сравнению с протяженностью области отрыва. Тепловой поток резко увеличивался перед присоединением или переходом.

На фиг. 48 приведены результаты измерений теплового потока при переходном режиме течения в области отрыва. В этом случае переход происходил задолго до конического расширения в точке $x_{пер-х}$, и тепловой поток к цилиндру перед переходом был несколько больше расчетного для присоединенного пограничного слоя на конусе с углом, равным углу наклона поверхности области отрыва. Ниже точки перехода тепловой поток к цилиндру был существенно меньше расчетного для турбулентного присоединенного пограничного слоя на конусе с углом, равным углу наклона поверхности области отрыва.

Из сравнения фиг. 47 и 48 видно, что при чисто ламинарном отрыве тепловой поток в области присоединения сравнительно невелик, в то время как при отрыве в переходном режиме тепловой поток в области присоединения весьма велик.



Фиг. 50. Влияние охлаждения стенки на геометрию области отрыва; угол конического расширения поверхности 24° [63].

Re/м: ○ $17{,}7\cdot10^6$; □ $15\ 10^6$; ◇ $8{,}5\cdot10^6$.

Влияние единичного числа Рейнольдса, угла конического расширения и охлаждения стенки на длину области отрыва показано на фиг. 49 и 50. Из фиг. 49 ясно, что с ростом числа Рейнольдса и уменьшением угла расширения длина области отрыва уменьшается. Аналогично предыдущим случаям нагревание поверхности приводит к увеличению l, а охлаждение — к уменьшению l (фиг. 50).

Индекс S на фиг. 50 означает точку отрыва.

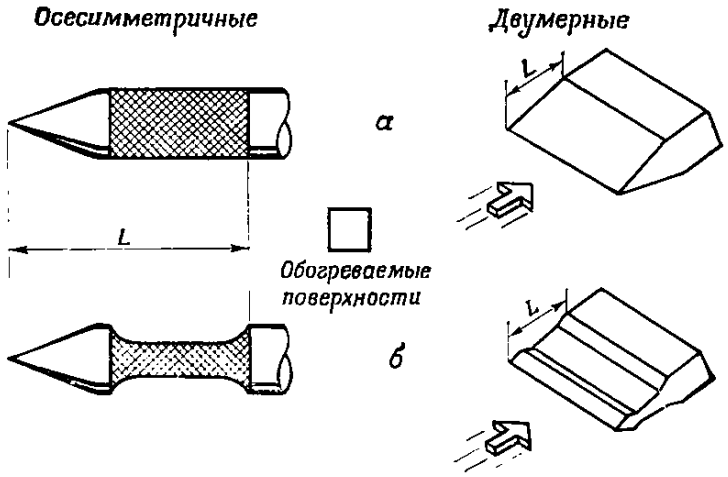
4.2.2. Теплопередача в отрывных течениях, вызванных выемками на осесимметричном теле и плоской поверхности

Ларсон [61] измерил тепловой поток в ламинарных и турбулентных отрывных течениях в выемках на осесимметричных и двумерных телах в интервале значений $0{,}3 < M_\infty < 4{,}0$ и $10^5 < Re < 4\cdot10^6$.

Были получены отношения осредненных тепловых потоков для оторвавшихся пограничных слоев и эквивалентных присоеди-

ненных пограничных слоев, которые сравнивались с результатами расчетов Чепмена [6]. Результаты, полученные для ламинарного пограничного слоя, хорошо соответствовали теории Чепмена в отличие от результатов для турбулентного течения. Тепловой поток достигал максимальной величины в областях присоединения оторвавшегося потока. На фиг. 51 показаны два вида моделей, осесимметричные и двумерные, использованные в данном исследовании.

В случае осесимметричных моделей присоединенный и оторвавшийся пограничные слои имели приблизительно одинаковые



Фиг. 51. Типы моделей [61].
а — с присоединенным течением; *б* — с отрывным течением.

средние и граничные (на внешней границе) характеристики течения и площадь.

На моделях клиньев образовывались двумерные присоединенные и оторвавшиеся пограничные слои приблизительно с одинаковыми характеристиками течения на внешней границе и площадями. Осредненный коэффициент теплоотдачи определялся без использования температуры теплоизолированной стенки по формуле

$$\overline{h} = \frac{d\,(Q_{\text{полн}}/A_{BL})}{dT_w},$$

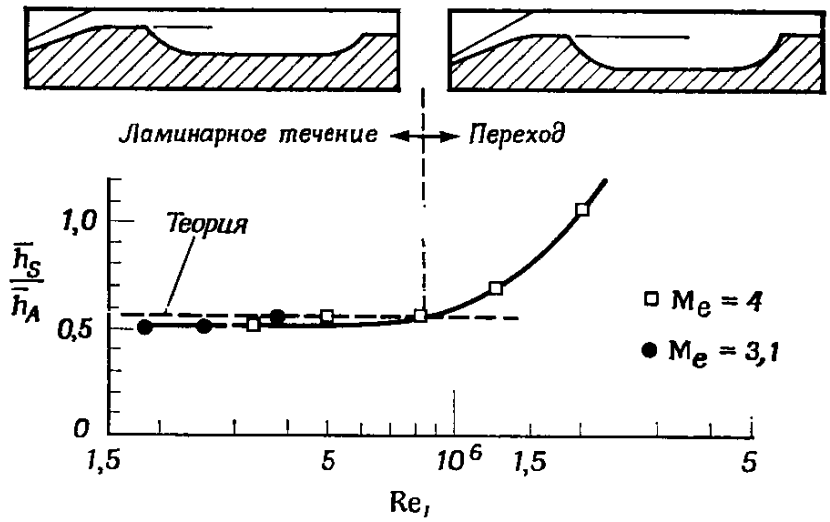
где $Q_{\text{полн}}$ — полный тепловой поток к нагреваемой части модели, A_{BL} — площадь нагреваемого пограничного слоя: πDl — для осесимметричных, $2bl$ — для двумерных моделей, l — длина нагреваемого пограничного слоя. Определенная таким образом величина $\overline{h}$ эквивалентна обычному определению

$$\overline{h} = \frac{Q_{\text{полн}}}{A_{BL}\,(T_w - T_{aw})},$$

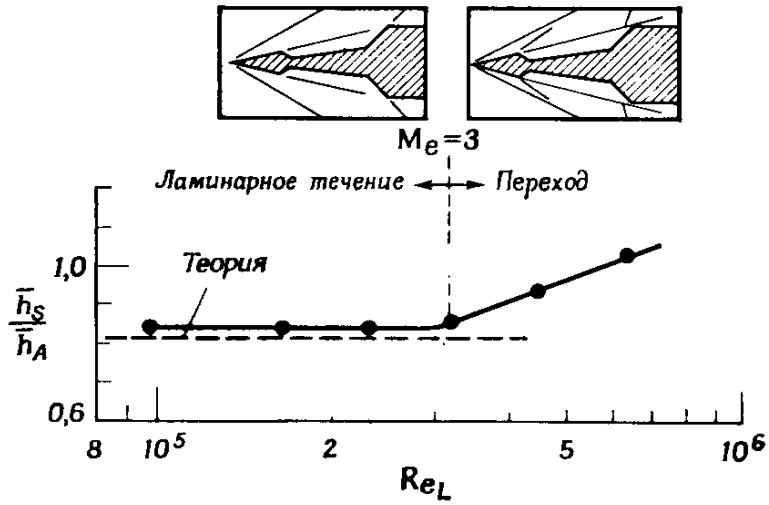
если $\bar{h}$ не зависит от T_w, а в пределах точности опытов Ларсона величина $\bar{h}$ от T_w не зависела. Числа Рейнольдса и Стэнтона были вычислены по средним характеристикам течения на внешней границе слоя.

Ламинарное течение

Результаты измерений Ларсона приведены на фиг. 52 и 53. С достаточной точностью можно принять, что экспериментальные значения отношения $\bar{h}_S/\bar{h}_A$ для осесимметричного течения (отношение среднего коэффициента теплового потока при оторвавшемся



Фиг. 52. Теплопередача в осесимметричном ламинарном течении [61].



Фиг. 53. Теплопередача в двумерном ламинарном течении [61].

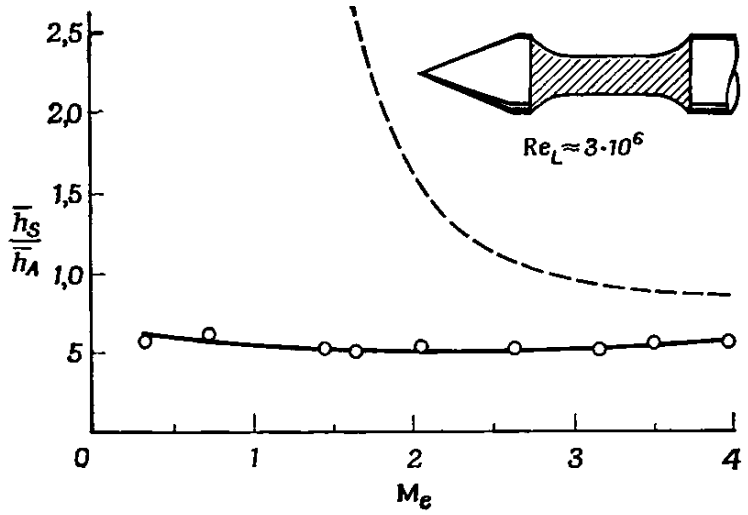
пограничном слое к коэффициенту теплового потока при присоединенном пограничном слое) не зависят от чисел Маха и Рейнольдса до числа Рейнольдса, при котором начинается переход в области

присоединения, и хорошо согласуются с теорией Чепмена. При бо́льших числах Рейнольдса отношение $\bar{h}_S/\bar{h}_A$ растет в области перехода, и отрыв вызывает преждевременный переход. При достаточно больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re}_L > 2\cdot10^6$ (L — длина модели) происходит увеличение, а не уменьшение среднего теплового потока.

При $M_e = 3$ и $M_\infty = 4$ влияние отрыва на двумерной модели распространялось фактически на $^2/_3$ хорды модели, поэтому для сравнения с расчетом следует рассматривать только эту часть поверхности. Следовательно, полного снижения теплового потока на 44% в соответствии с теорией ожидать не следует. Теория хорошо согласуется с экспериментом вплоть до перехода. Кроме того, установлено, что средний тепловой поток в случае оторвавшегося ламинарного пограничного слоя уменьшается в соответствии с теорией Чепмена независимо от площади поверхности нагревателя под оторвавшимся пограничным слоем.

Турбулентное течение

Переход перед отрывом вызывался с помощью турбулизаторов, размещенных на передней изолированной части описанных выше осесимметричных моделей. Вычисленные по результатам измере-



Фиг. 54. Теплопередача при турбулентном течении [61].

$\bar{h}_S$ — средний коэффициент теплоотдачи при отрыве пограничного слоя; $\bar{h}_A$ — средний коэффициент теплоотдачи при безотрывном обтекании; — — — теория.

ний коэффициенты теплоотдачи при постоянном числе Рейнольдса $\mathrm{Re} \approx 3\cdot10^6$ представлены на фиг. 54.

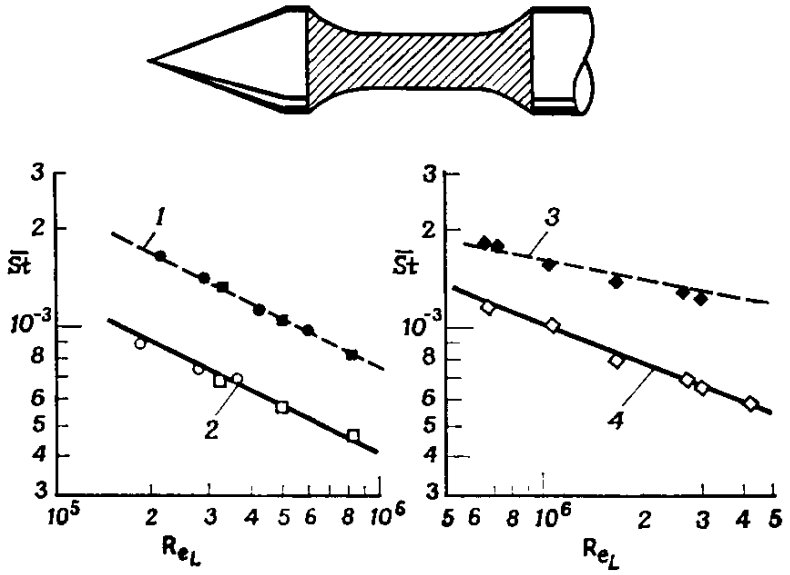
В отличие от хорошего соответствия эксперимента и расчета для ламинарного пограничного слоя получено большое расхождение результатов для турбулентного пограничного слоя при небольших числах Маха. В соответствии с исследованиями Ларсона одной из причин таких расхождений является большое несоот-

ветствие температурных потенциалов. В теории Чепмена предполагается, что воздух из области возвратного течения с малой скоростью попадает в отделившийся пограничный слой при температуре, равной температуре стенки. Если бы это предположение было правильным, то насадок должен был бы измерить на линии нулевой скорости температуру, равную температуре стенки, однако, согласно измерениям насадком у стенки, разность температур на порядок величины меньше принятой в теории. По результатам измерений насадками толщина свободного слоя больше половины глубины области отрыва, что также может быть причиной расхождений, поскольку в теории Чепмена предполагается, что толщина относительно мала. Таким образом, теория должна быть модифицирована с учетом возвратного течения.

Влияние числа Рейнольдса

Влияние числа Рейнольдса на теплопередачу при ламинарном и турбулентном течениях показано на фиг. 55, на которой представлены зависимости среднего числа Стэнтона $\overline{St}$ от числа Рейнольдса Re_L.

При ламинарном течении, как присоединенном, так и с отрывом, зависимость от числа Рейнольдса ($\overline{St} \sim Re_L^{-1/2}$) совпадает



Фиг. 55. Влияние числа Рейнольдса [61].

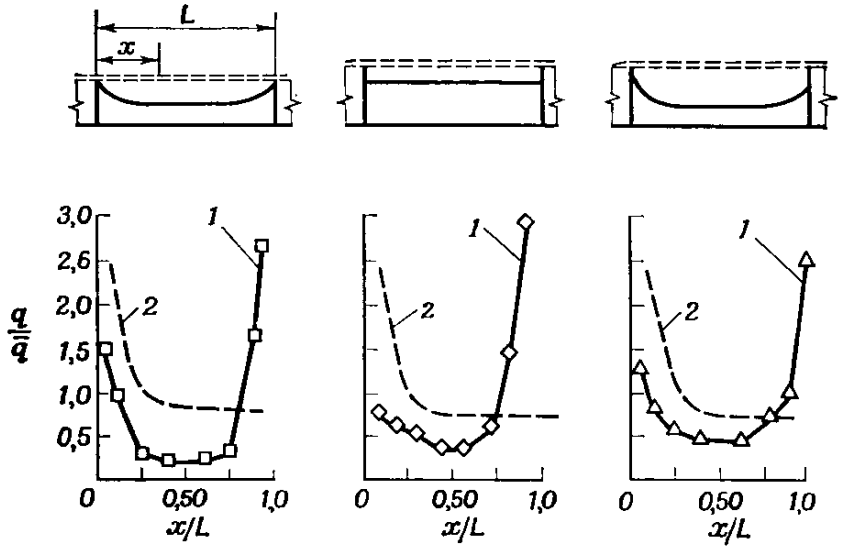
Ламинарное течение: ○ $M_e = 3{,}1$; ⌐ $M_e = 4{,}0$; *1* — безотрывное течение, $\overline{St}_A \sim Re_L^{-1/2}$; *2* — отрывное течение, $\overline{St}_S \sim Re_L^{-1/2}$. Турбулентное течение: $M_e = 2{,}6$; *3* — безотрывное течение, $\overline{St}_A \sim Re_L^{-1/5}$; *4* — отрывное течение, $\overline{St}_S \sim Re_L^{-2/5}$.

с хорошо известной зависимостью для присоединенного пограничного слоя. Таким образом, влияние отрыва на теплопередачу не зависит от числа Рейнольдса. В случае турбулентного течения,

однако, $\overline{St}_A \sim Re_L^{-1/5}$ для присоединенного и $\overline{St}_S \sim Re_L^{-2/5}$ для отрывного течения. Следовательно, снижение теплового потока вследствие отрыва увеличивается с ростом числа Рейнольдса.

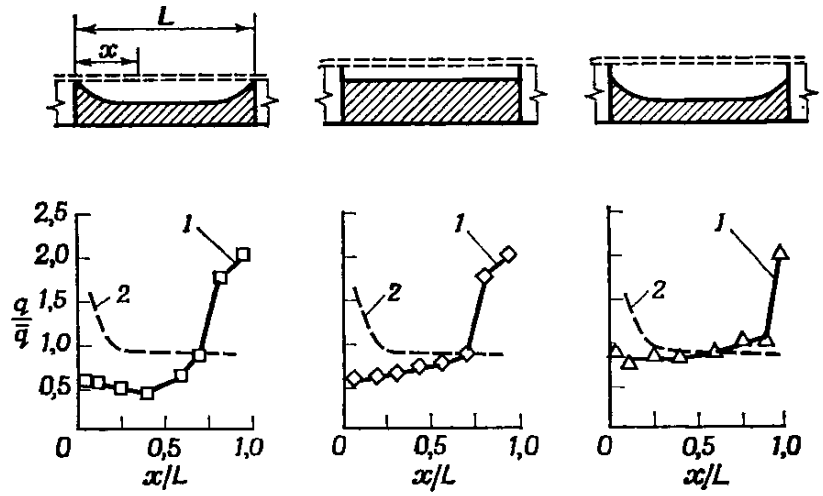
Распределение теплового потока вдоль модели

На фиг. 56 и 57 представлено распределение теплового потока в отрывных ламинарных и турбулентных течениях в виде зависи-



Фиг. 56. Распределение теплового потока по длине модели, ламинарное течение, $M_e = 4$, $Re_L = 0{,}4 \cdot 10^6$ [61].

1 — отрывное течение; *2* — присоединенное течение. *L* — длина модели.



Фиг. 57. Распределение теплового потока по длине модели, турбулентное течение, $M_e = 2{,}6$, $Re_L = 3 \cdot 10^6$ [61].

1 — отрывное течение; *2* — присоединенное течение. *L* — длина модели.

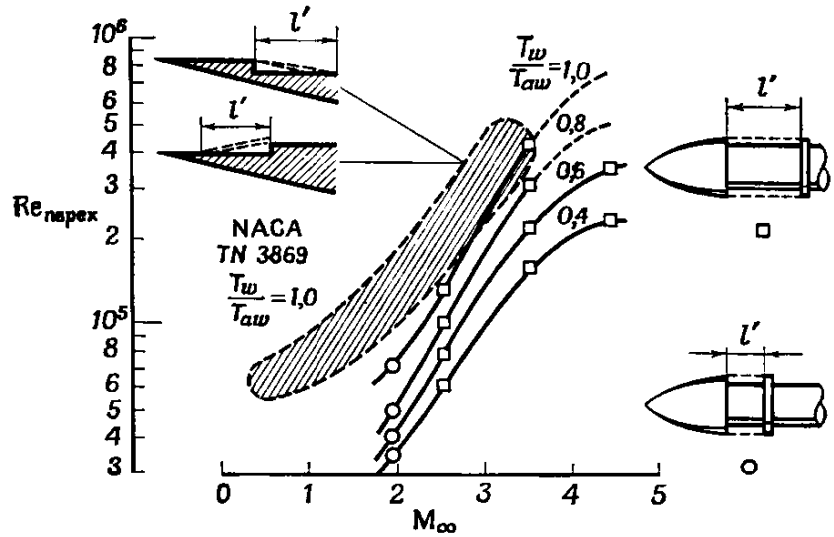
мости отношения местного теплового потока к среднему тепловому потоку $q/\overline{q}$ от относительного расстояния x, отсчитываемого от точки отрыва вниз по потоку [61].

В отрывном течении тепловой поток достигает максимума в области присоединения, причем в окрестности этой области

тепловой поток очень быстро растет в отличие от присоединенного течения, при котором тепловой поток максимален вверх по потоку от поверхности нагревателя. Местный тепловой поток быстро уменьшается вниз по потоку и затем остается постоянным. Такой характер изменения теплового потока одинаков для ламинарного и турбулентного течений.

Переход в свободных пограничных слоях при температуре стенки, меньшей температуры теплоизолированной стенки

Ларсон приводит некоторые результаты экспериментального исследования влияния числа Маха и температуры стенки на число Рейнольдса перехода в свободных пограничных слоях. По определению Ларсона, число Рейнольдса перехода в отрывном течении



Фиг. 58. Переход в свободных ламинарных пограничных слоях [61].

есть максимальное число Рейнольдса, вычисленное по длине свободного слоя l', при котором переход происходит сразу за точкой присоединения (фиг. 58). При постоянном числе Маха M_∞ охлаждение стенки приводит к уменьшению числа Рейнольдса перехода в свободных пограничных слоях.

Это дестабилизирующее влияние охлаждения стенки противоположно стабилизирующему влиянию на присоединенный пограничный слой, наблюдаемому при умеренном охлаждении стенки [66, 67]. Стабилизирующее влияние числа Маха и дестабилизирующее влияние температуры ($T_w < T_{aw}$) наблюдалось также во всех экспериментах.

Исследования теплопередачи в выемке [55]

Введенная в гл. I «модель массообмена» Харвата и др. [55] может быть полезна для физического объяснения механизма теплопередачи для течения в выемке. В экспериментальных исследо-

ваниях систематически варьировались следующие параметры: число Маха внешнего течения, отношение длины к глубине выемки, отношение толщины пограничного слоя перед выемкой к глубине выемки (при турбулентном течении), отношение толщин теплового и динамического слоев и, наконец, геометрия внутренней границы области отрыва. Ограниченное число опытов с той же самой моделью при дозвуковых скоростях дает основание считать, что в общем нет существенных различий в теплопередаче для дозвукового и сверхзвукового течений, за исключением того, что переход от «открытой» каверны к «замкнутой» происходит более плавно и величины L/h' (L — длина выемки, h' — ее глубина) в среднем меньше, чем при сверхзвуковом течении.

Экспериментальные исследования теплопередачи в выемке были проведены при $M_\infty = 2{,}9$ и турбулентном пограничном слое с профилем скорости перед отрывом $^1/_7$ степени. Эквивалентное число Рейнольдса для плоской пластины было равно $1{,}5 \cdot 10^6$, а отношение толщины пограничного слоя к высоте уступа было приблизительно равно 0,4. Модель, собранная из теплоизолированных взаимозаменяемых элементов (секций) из нержавеющей стали, показана на фиг. 59.

Давление торможения в аэродинамической трубе было равно атмосферному, а температура торможения составляла от 10 до 316° С. Во всех экспериментах величина h после отрыва уменьшалась по сравнению с соответствующей величиной перед отрывом и увеличивалась перед областью присоединения и за ней. В среднем тепловой поток ко дну выемки составляет ~50—120% от теплового потока в присоединенном течении эквивалентной длины.

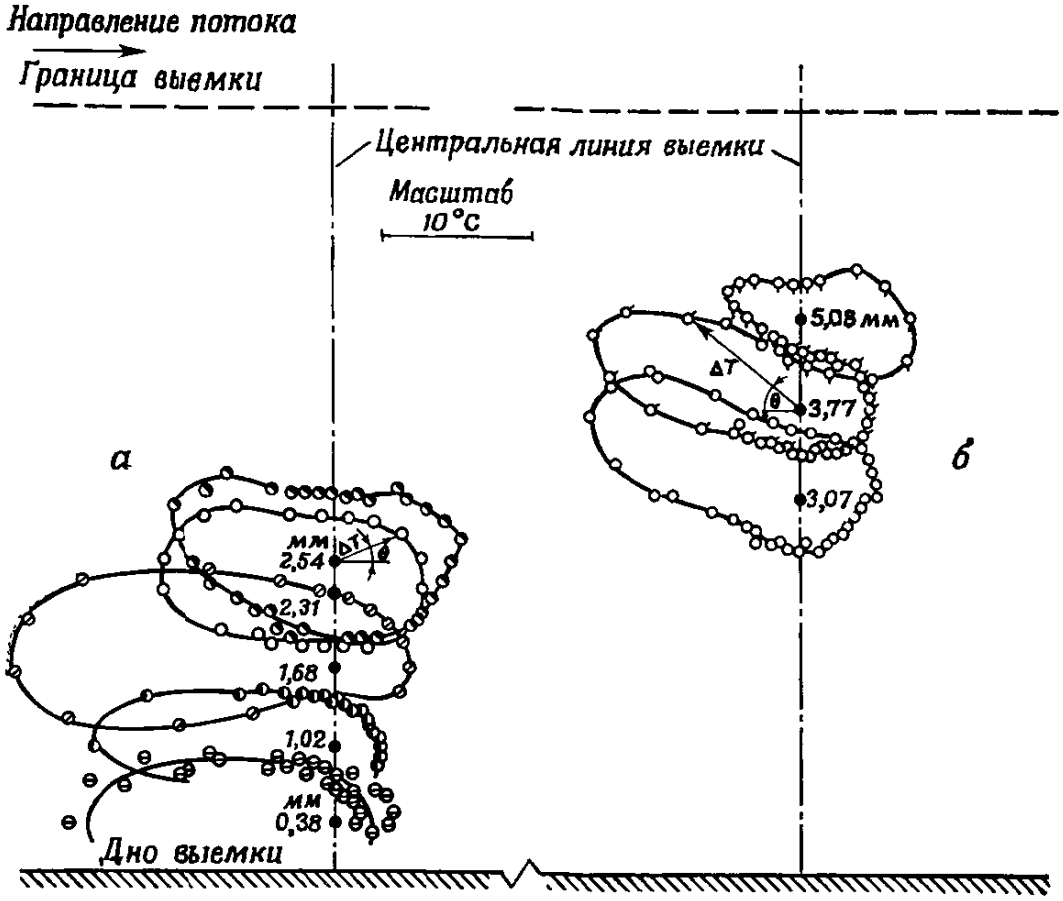
Диффузия тепла. Харват и др. количественно исследовали диффузию тепла при отрывном течении в выемке. Несколько поляр диффузии тепла для разных высот над дном выемки представлено на фиг. 60 [1]).

На фиг. 60, *а* видны поляры, ориентированные вверх по потоку, которые принадлежат к придонному слою. Течение в этом слое неустойчиво и меняет направление, что подтверждается наличием меньших поляр, ориентированных вниз по потоку. Размер основной поляры увеличивается до расстояния 1.68 мм над дном, что свидетельствует об уменьшении скорости. На высоте приблизительно 2,54 мм размеры поляр, ориентированных вперед и назад, почти одинаковы; следовательно, в потоке нет преимущественного направления течения. Высота, на которой наблюдалось это явление, приблизительно совпадает с высотой, на которой не было обнаружено динамического давления. Над этим слоем наблюдался

---

[1]) Поляры дают разности температур потока, измеренных на одинаковых расстояниях, но при различных угловых положениях термопары относительно нагретой и ненагретой проволоки.— *Прим. ред.*

ветствии с исследованиями диффузии тепла в центральном сечении существуют три слоя: слой неустановившегося слабого возвратного течения вблизи дна, в среднем направленного вверх по потоку; буферный слой, характеризуемый сильным течением с периоди-



Фиг. 60. Поляры диффузии тепла на средней линии выемки и разных расстояниях от дна Y, $M_\infty = 2{,}8$, $L/h' = 9$ [55].

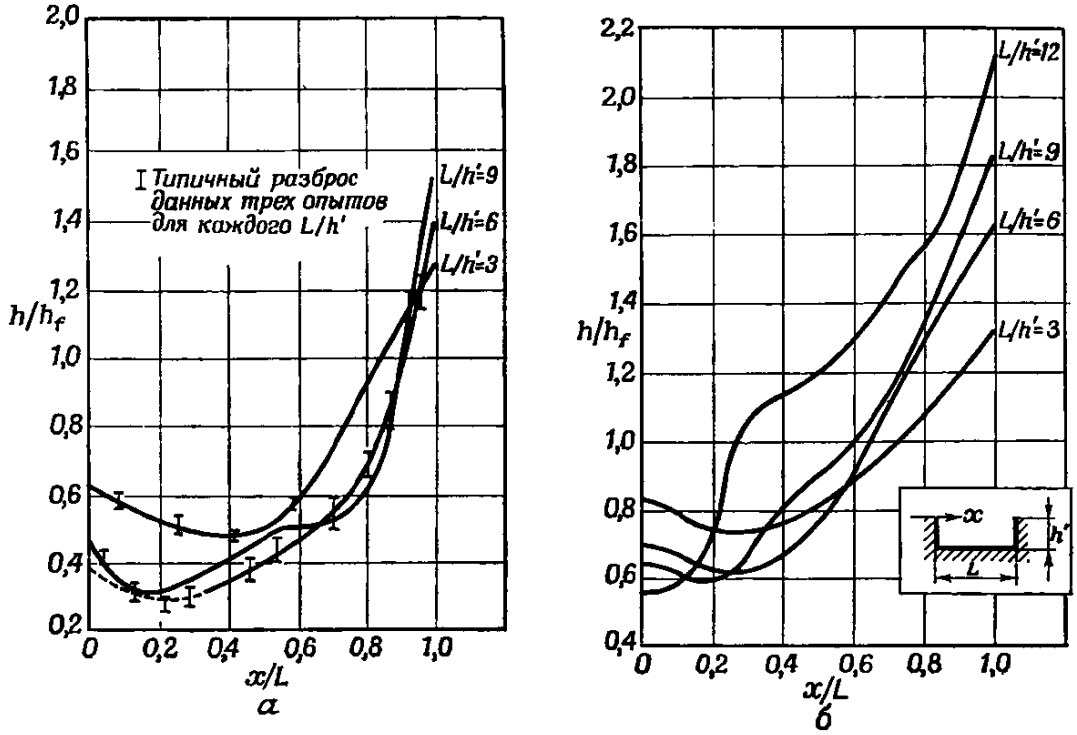
а — слой возвратного течения; *б* — буферный слой.
Примечание. Все размеры даны в миллиметрах.

ческим изменением направления без определенного расхода массы, и слой смешения.

Теплопередача. Были проведены два вида опытов: в одном из них воздух подогревался, а стенка охлаждалась (стандартная схема), в другом воздух имел температуру торможения окружающей среды, а стенка нагревалась (насыщенным паром при температуре 150° С).

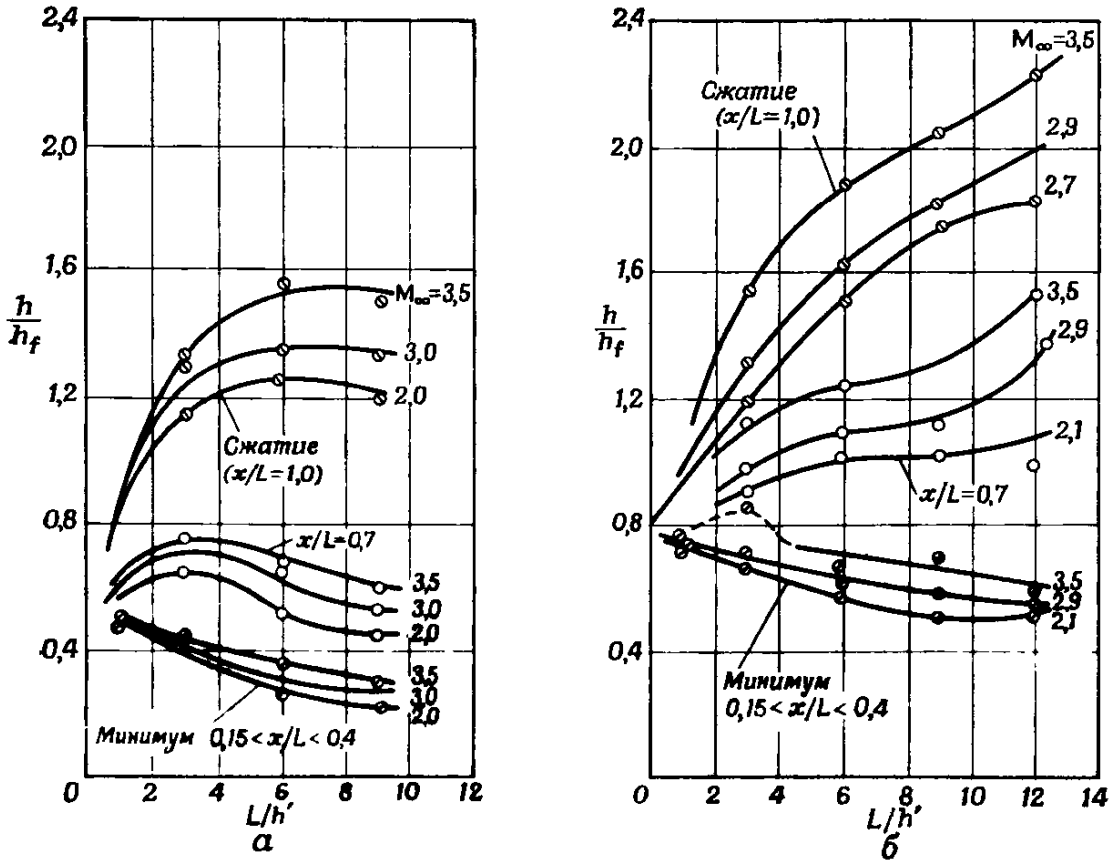
На фиг. 61—63 приведены распределения h/h_f. Индекс f относится к плоской пластине, пограничный слой считается присоединенным на расстоянии двух — пяти глубин выемки до отрыва. Коэффициент h_f определялся по формуле

$$h_f = \frac{q_f}{T_{aw} - T_w} = K \frac{T_w - T_c}{T_{aw} - T_w},$$



Ф и г. 61. Распределение теплового потока по дну выемки при различных значениях L/h', $M_\infty = 2{,}9$ [55].

а — тонкий пограничный слой перед выемкой; *б* — толстый пограничный слой перед выемкой.



Ф и г. 62. Относительный коэффициент теплоотдачи (минимальный, максимальный и на расстоянии $x/L = 0{,}7$) в зависимости от L/h' и M_∞ (осредненные данные всех опытов) [55].

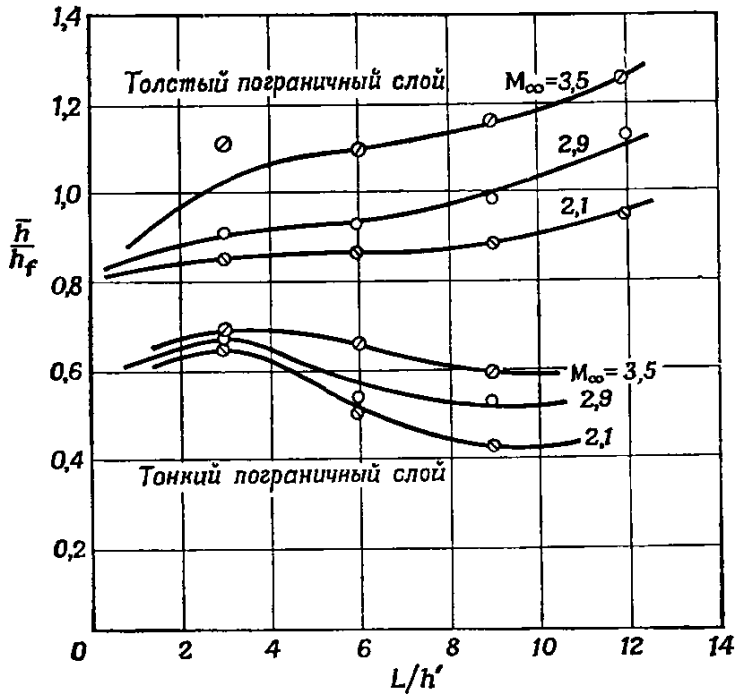
а — тонкий пограничный слой; *б* — толстый пограничный слой.

где K — постоянная, зависящая от геометрии модели и теплопроводности материала стенки; T_c — температура в выемке. Коэффициент h определялся по формуле

$$h = h_{\text{местн}} \frac{T_{aw} - T_w}{T_{aw_f} - T_w},$$

где T_{aw_f} — температура восстановления перед отрывом. Эта формула позволяет обойтись без коэффициента восстановления для области отрывного течения, величина которого неизвестна.

На фиг. 61 показано распределение отношения коэффициентов теплоотдачи ко дну прямоугольной выемки при $M_\infty = 2{,}9$ и различных значениях L/h' для тонкого и толстого пограничных



Фиг. 63. Средний относительный коэффициент теплоотдачи ко дну выемки в зависимости от числа Маха и L/h' для тонкого и толстого пограничного слоев [55].

слоев. Отношение h/h_f меньше единицы в точке отрыва, минимально в первой половине выемки и больше единицы на задней стенке. Оно увеличивается с L/h' у задней стенки, но уменьшается вблизи точки отрыва. Минимальная величина h/h_f уменьшается с ростом L/h', причем минимум смещается в сторону меньших значений x/L (x — расстояние по горизонтали от передней стенки). При $L/h' = 9$ образуется «плато» в центре выемки, обусловленное началом присоединения потока. Влияние δ/h' (δ — толщина пограничного слоя непосредственно перед выемкой) состоит в смещении кривой в сторону больших значений h/h_f с увеличением δ/h', причем кривые остаются качественно подобными. На фиг. 62

приведена зависимость h/h_f от M_∞ и L/h'. Кривые соответствуют постоянным x/L, за исключением кривых «минимума». На общий уровень кривых h/h_f число Маха M_∞ оказывает слабое влияние, оно более заметно в толстом пограничном слое, особенно в сечении на расстоянии 70% длины выемки. В тонком пограничном слое это сечение находится еще в области низкого теплового потока, но в толстом пограничном слое уже сказывается влияние роста теплового потока в области присоединения и это заметно отражается на среднем тепловом потоке ко дну выемки.

На фиг. 63 представлен средний тепловой поток $\bar{h}/h_f$ ко дну выемки. В случае тонкого пограничного слоя область отрыва «экранирует» стенку, снижая тепловой поток вдвое, в отличие от случая толстого пограничного слоя, причем переход от тонкого слоя к толстому происходит при $\delta/h' \approx 1$. Влияние числа Маха слабее и скорее отражает влияние изменения δ/h', чем самого числа M_∞.

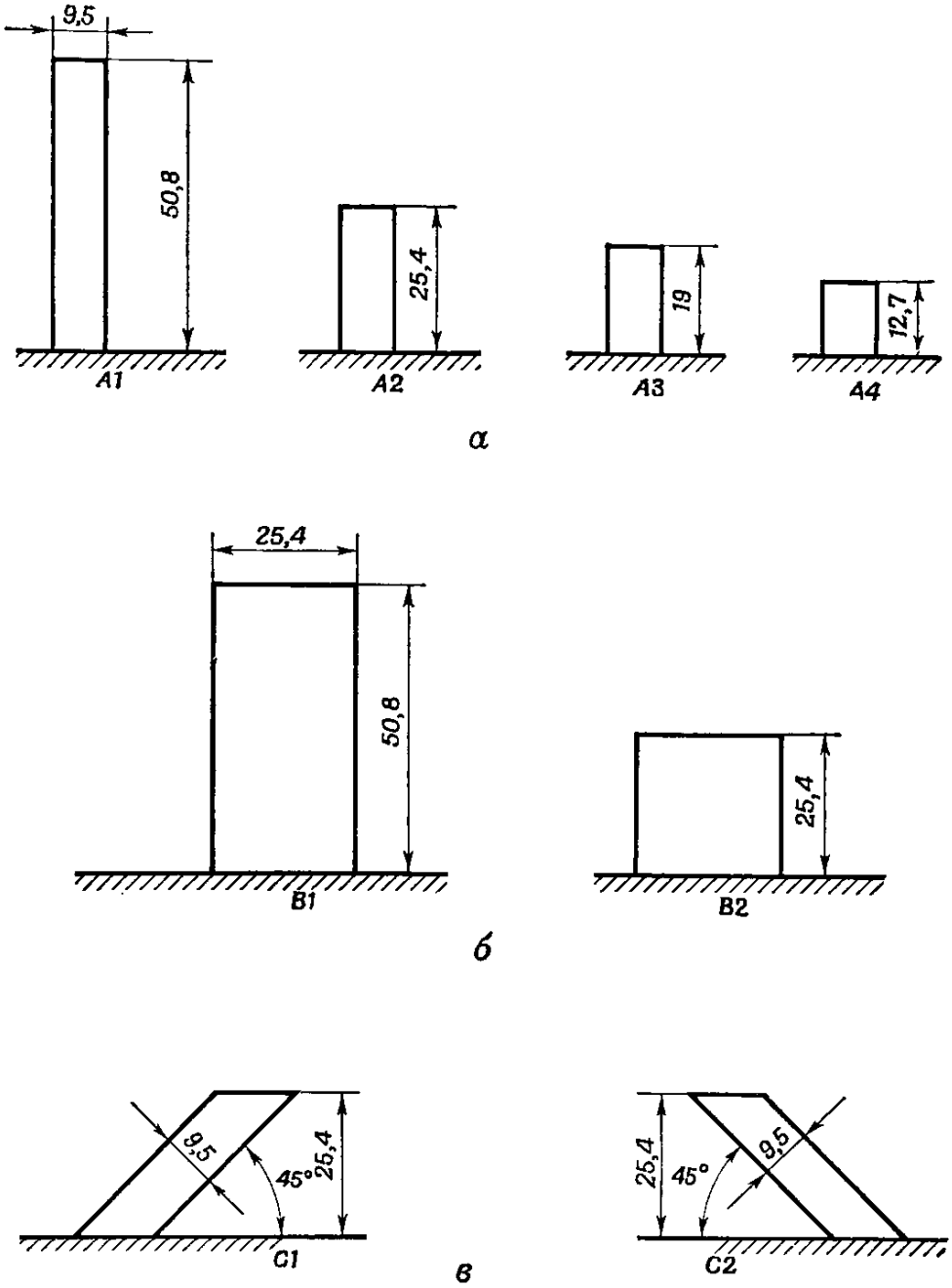
Влияние охлаждения турбулентного пограничного слоя в интервале температур от —18 до —85° С (что соответствует $T_w/T_s = 0{,}96—0{,}75$) на отрывное течение было экспериментально исследовано Чернецки и Синклером [68] при $M_\infty = 1{,}61$ в интервале чисел Рейнольдса от $11{,}6 \cdot 10^6$ до $34{,}8 \cdot 10^6$, вычисленных по расстоянию от носка модели до точки отрыва и условиям в невозмущенном потоке. Результаты показывают, что влияние теплопередачи на пик давления, связанный с отрывом на теле вращения, очень слабо сказывается или почти не сказывается на угле наклона скачка уплотнения, вызываемого отрывом. Изменение условий теплообмена на стенках сверхзвукового сопла Лаваля за счет изменения температуры торможения не оказывает существенного влияния на отрыв [69].

4.2.3. Теплообмен вблизи цилиндрических выступов

Был измерен тепловой поток к стенке осесимметричного сопла в окрестности выступающих прямого и наклонного цилиндров при гиперзвуковой скорости, $M_\infty = 6{,}6$ давлении торможения 42 кгс/см², температуре торможения от 810 и 890 К, числе Рейнольдса Re/м от $1{,}44 \cdot 10^7$ до $1{,}7 \cdot 10^7$ и температуре стенки ниже 350 К [70]. Цилиндры имели размеры порядка толщины невозмущенного пограничного слоя (3,5 см), толщина вытеснения составляла 1,37 см, а толщина потери импульса 0,14 см, так что весь цилиндр или его основная часть была погружена в пограничный слой, который первоначально был турбулентным. Средняя температура цилиндров составляла от 470 до 560 К. Коэффициент теплоотдачи h определялся по формуле

$$h = q/(T_s - T_w),$$

где q — плотность теплового потока к стенке, T_s и T_w — температуры торможения и стенки соответственно. В этом определении не используется температура теплоизолированной стенки, так



Фиг. 64. Типы моделей и их обозначения [70].

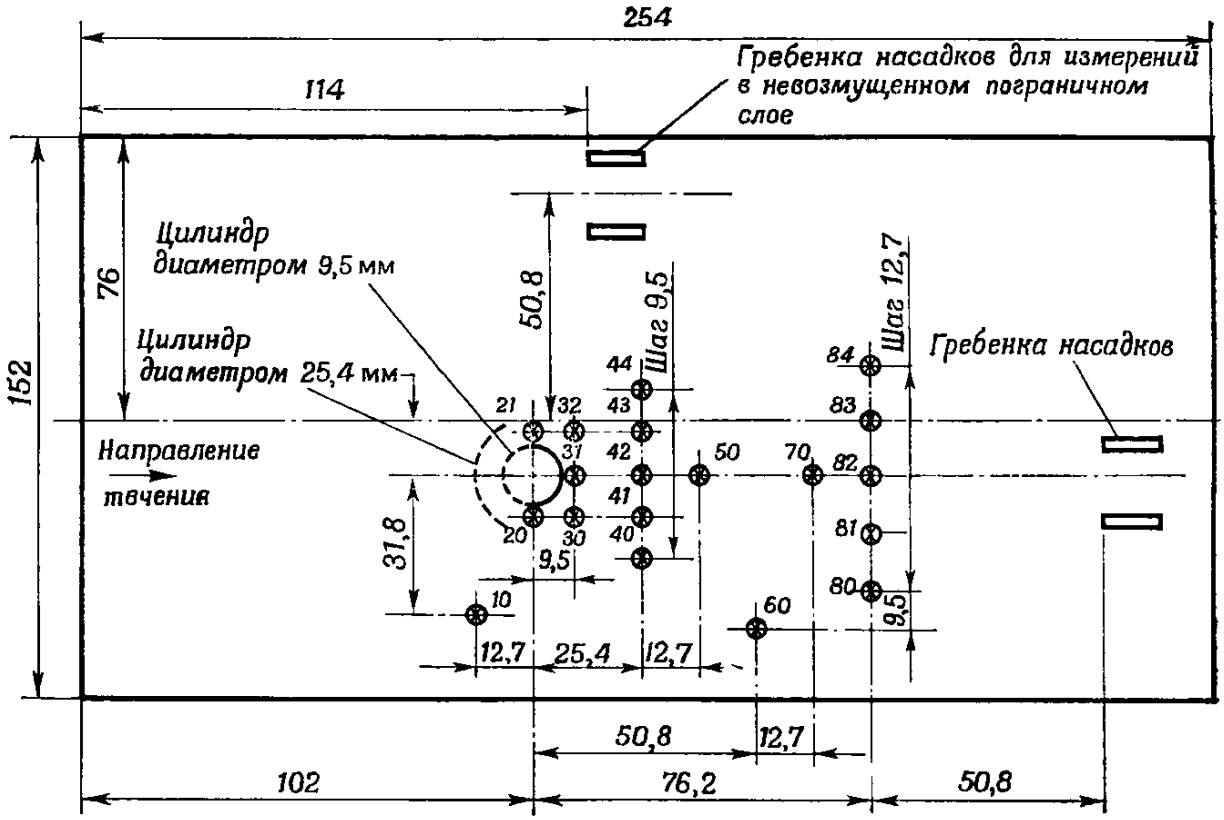
а — группа А: круговые цилиндры диаметром 9,5 мм, ось перпендикулярна поверхности, нержавеющая сталь, толщина стенки 1,27 мм; *б* — группа В: круговые цилиндры диаметром 25,4 мм, ось перпендикулярна поверхности, нержавеющая сталь, толщина стенки 1,27 мм; *в* — группа С: наклонные круговые цилиндры диаметром 9,5 мм, нержавеющая сталь, толщина стенки 1,27 мм.

Примечание. Все размеры даны в миллиметрах.

как практически она не имеет смысла вследствие сложной природы течения.

Для стенки рабочей части $h = 0{,}057$ кВт/м^2·град, на испытываемой пластине без цилиндрического препятствия $h = 0{,}040 \pm 0{,}0006$ кВт/м^2·град.

Рассмотренные варианты цилиндрических препятствий и их обозначения представлены на фиг. 64, расположение термопар и гребенок насадков полного давления на пластине — на фиг. 65.



Фиг. 65. Расположение термопар и гребенок насадков полного давления на пластине [70].

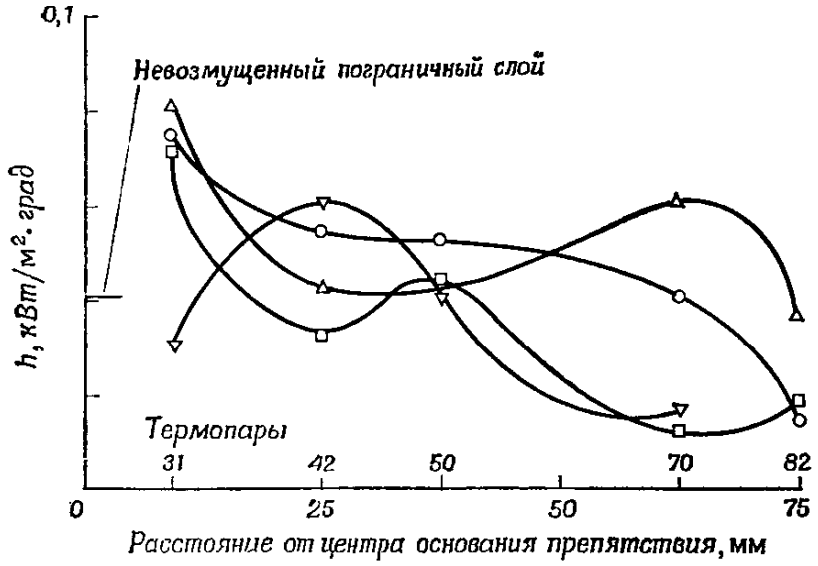
Первая цифра номера термопары обозначает ряд.

Одно из окон трубы было заменено панелью из малоуглеродистой стали с никелевым покрытием, имеющей отверстие диаметром 9,5 мм, через которое проходила державка цилиндра и провода.

При изложении результатов испытаний основное внимание уделяется качественным тенденциям, т. е. изменениям порядка 50% или более.

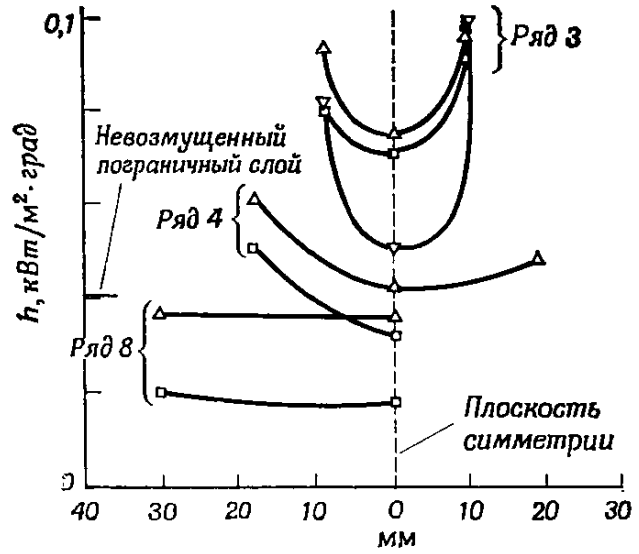
Группа А

Тепловой поток в прилегающей к цилиндру области в пределах одного его диаметра в 2—4 раза превосходил тепловой поток в невозмущенном пограничном слое (0,040 кВт/м^2·град). В точке, расположенной на расстоянии около трех диаметров в сторону и впереди цилиндра, тепловой поток в 2 раза больше, чем в невозмущенном пограничном слое, что свидетельствует о существовании области влияния вверх по потоку и по его ширине. Для цилиндров высотой 50,8, 25,4 и 19 мм тепловые потоки сходны, хотя в случае



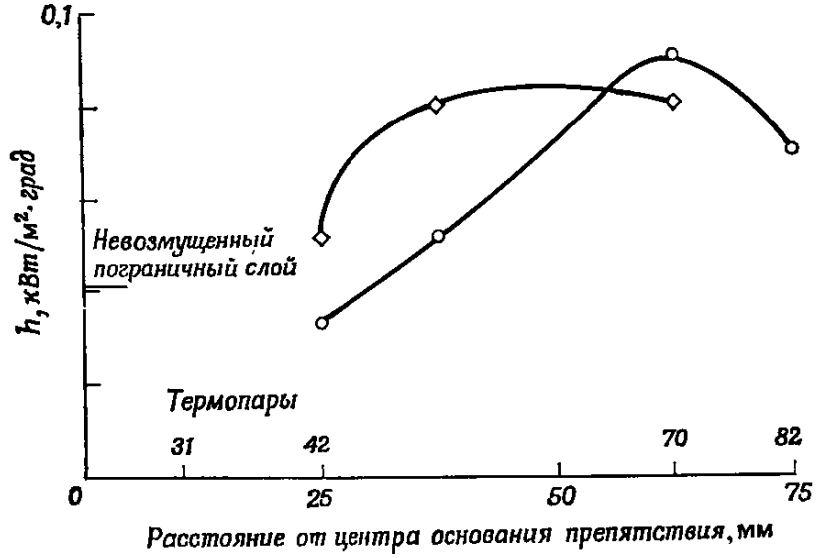
Ф и г. 66. Коэффициент теплоотдачи в плоскости симметрии для цилиндрических препятствий группы А [70].

Препятствия: ΔA1; ○A2; □A3; ▽A4.



Ф и г. 67. Коэффициент теплоотдачи в сечениях, перпендикулярных к направлению потока, для цилиндрических препятствий группы А и С [70].

Препятствия: ΔA1; □A3; ▽C2.



Ф и г. 68. Коэффициент теплоотдачи в плоскости симметрии для цилиндрических препятствий группы В [70].

Препятствия: ◇ B1; ○B2.

самого короткого цилиндра (12,7 мм) в близлежащей точке и точке 10, расположенной на расстоянии трех диаметров в сторону от цилиндра, они снижались до величины, соответствующей невозмущенному слою.

Большие тепловые потоки за цилиндром высотой 12,7 мм, вероятно, вызваны отрывом потока от верхнего торца цилиндра и последующим его присоединением. Полученные в опытах величины h приведены на фиг. 66.

Для всех цилиндров диаметром 9,5 мм на расстоянии в пределах трех диаметров за цилиндром тепловой поток вообще уменьшается до соответствующего уровня в невозмущенном пограничном слое, а для 7-го и 8-го рядов, на расстоянии семи или восьми диаметров вниз по потоку, он падает ниже этого уровня.

На фиг. 67 представлено распределение плотности теплового потока в сечениях, перпендикулярных потоку. Тепловой поток минимален в плоскости симметрии. Такое распределение теплового потока, возможно, является следствием понижения энергии в вязком следе на оси симметрии по сравнению с энергией за косыми скачками, идущими от препятствия.

Группа B

На фиг. 68 и 69 представлено распределение коэффициента теплоотдачи за вертикальными цилиндрами диаметром 25,4 мм и высотой 25,4 и 50,8 мм в плоскости симметрии и в сечениях, перпендикулярных направлению потока.

Большие тепловые потоки обнаружены в ряде 4 и в точке 10 около цилиндров; в прилегающих к цилиндрам точках тепловой поток несколько ниже для короткого цилиндра. Уменьшение теплового потока в направлении течения происходит медленнее, чем для цилиндров диаметром 9,5 мм.

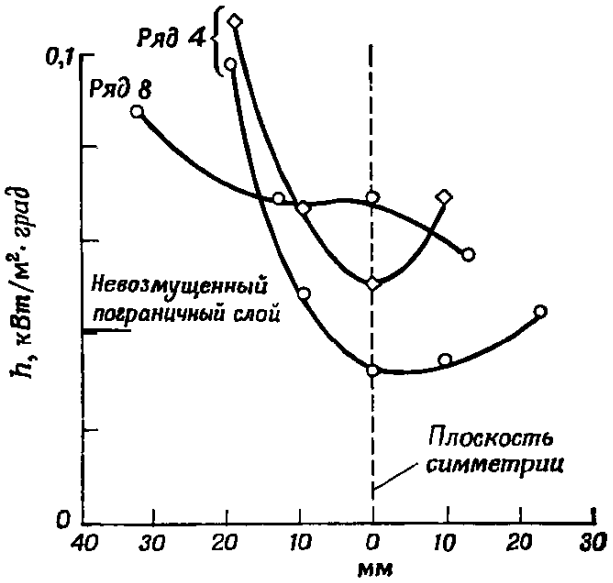
На расстоянии трех диаметров вниз по потоку тепловой поток оставался в 1,5—2 раза больше, чем в невозмущенном пограничном слое. Путем сравнения чисел не обнаружено простого геометрического подобия.

Группа C

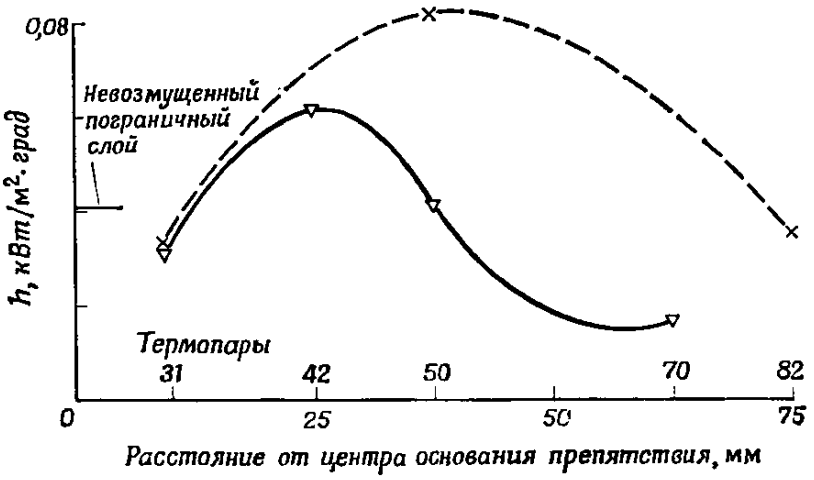
Результаты, полученные для наклонных цилиндров, представлены на фиг. 70, 71.

В случае цилиндра, наклоненного назад, тепловой поток в плоскости симметрии в окрестности цилиндра меньше, чем для прямого цилиндра, вследствие стекания назад ламинарного пограничного слоя с наклонного цилиндра [1]). Бо́льшие тепловые потоки

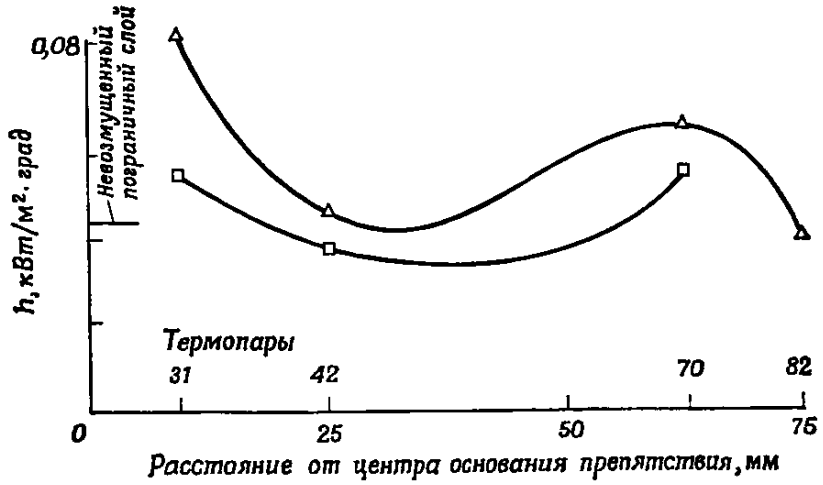
[1]) На фиг. 70 и 71 приведены только тепловые потоки за цилиндром.— *Прим. ред.*



Фиг. 69. Коэффициент теплоотдачи в сечениях, перпендикулярных к направлению потока, для цилиндрических препятствий группы В [70].
Препятствия: ◇B1; ○B2.



Фиг. 70. Коэффициент теплоотдачи в плоскости симметрии для цилиндрических препятствий A4 и C1 [70].
Препятствия: ▽A4; ×C1.

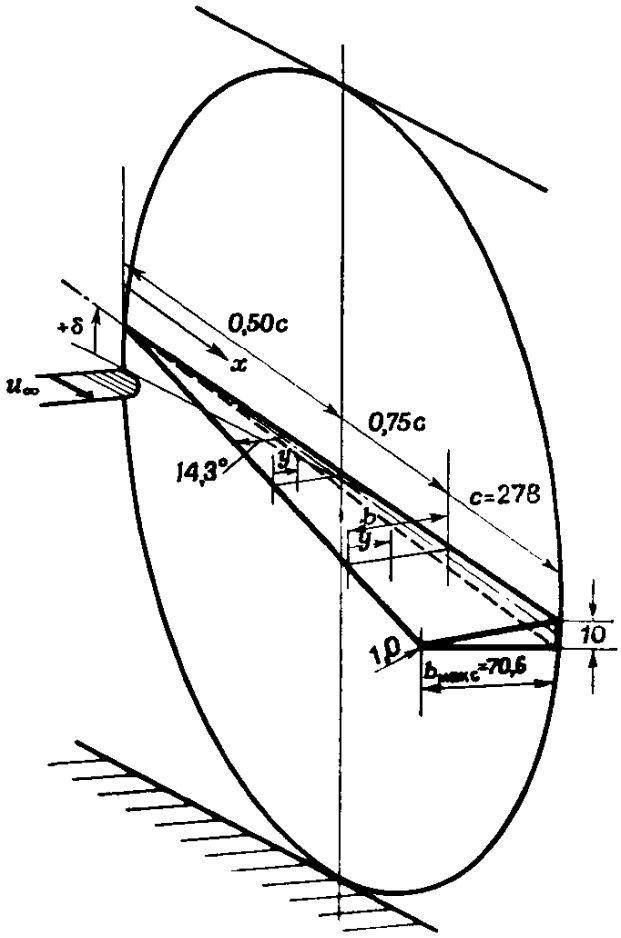


Фиг. 71. Коэффициент теплоотдачи в плоскости симметрии для цилиндрических препятствий A1 и C2 [70].
Препятствия: ΔA1; △C2.

были измерены перед цилиндром не в плоскости симметрии и за ним, причем величина теплового потока, соответствующая невозмущенному пограничному слою, достигалась на расстоянии восьми диаметров за цилиндром. В случае цилиндра, наклоненного вперед, тепловые потоки в его окрестности превосходили соответствующие невозмущенному пограничному слою до 5 раз с последующим уменьшением их вниз по течению. Области повышенных тепловых потоков вниз по течению обусловлены скачками в следе, причем распределение теплового потока вниз по течению подобно полученному для длинных круговых цилиндров.

4.3. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ОБЛАСТИ ОТРЫВА НА ВЕРХНЕЙ СТОРОНЕ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА

Рассмотрим влияние теплопередачи на явление разрушения вихрей на крыле, описанное в гл. IX, воспользовавшись экспериментальным исследованием Томана [71] при $M_\infty = 3$ и $Re = 7{,}3 \cdot 10^6$/м. Стейнбек [72], Ганн [73], О'Нил и Бонд [74] также провели измерения теплопередачи на треугольных крыльях и стреловидных затупленных передних кромках при сверхзвуковых скоростях. Геометрические характеристики модели, использованной Томаном [71], схема и спектр течения на стороне разрежения треугольного крыла с дозвуковыми передними кромками показаны на фиг. 72 и 73.

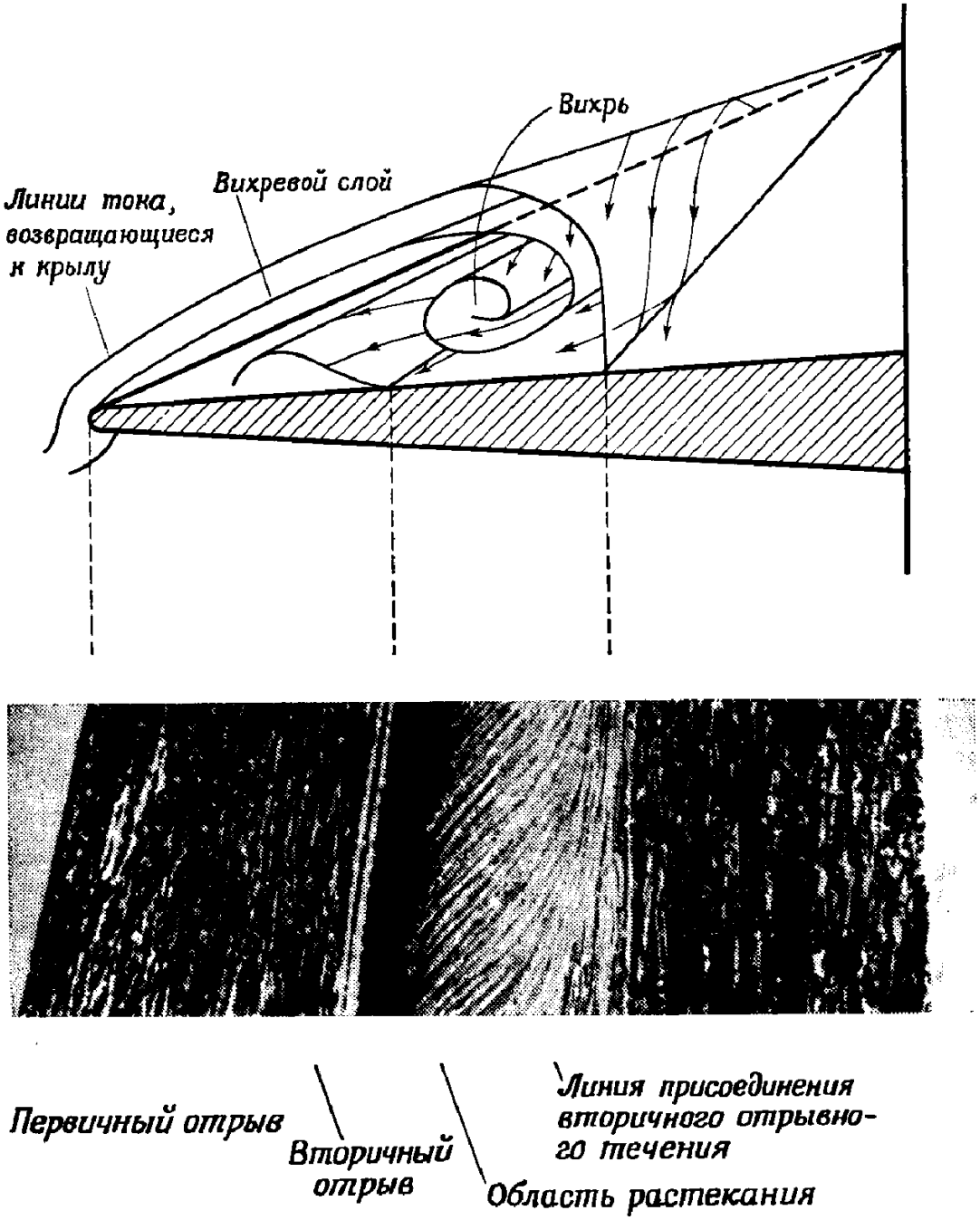


Фиг. 72. Геометрия крыла с углом стреловидности передней кромки 75,7° [71].

Примечание. Все размеры даны в миллиметрах.

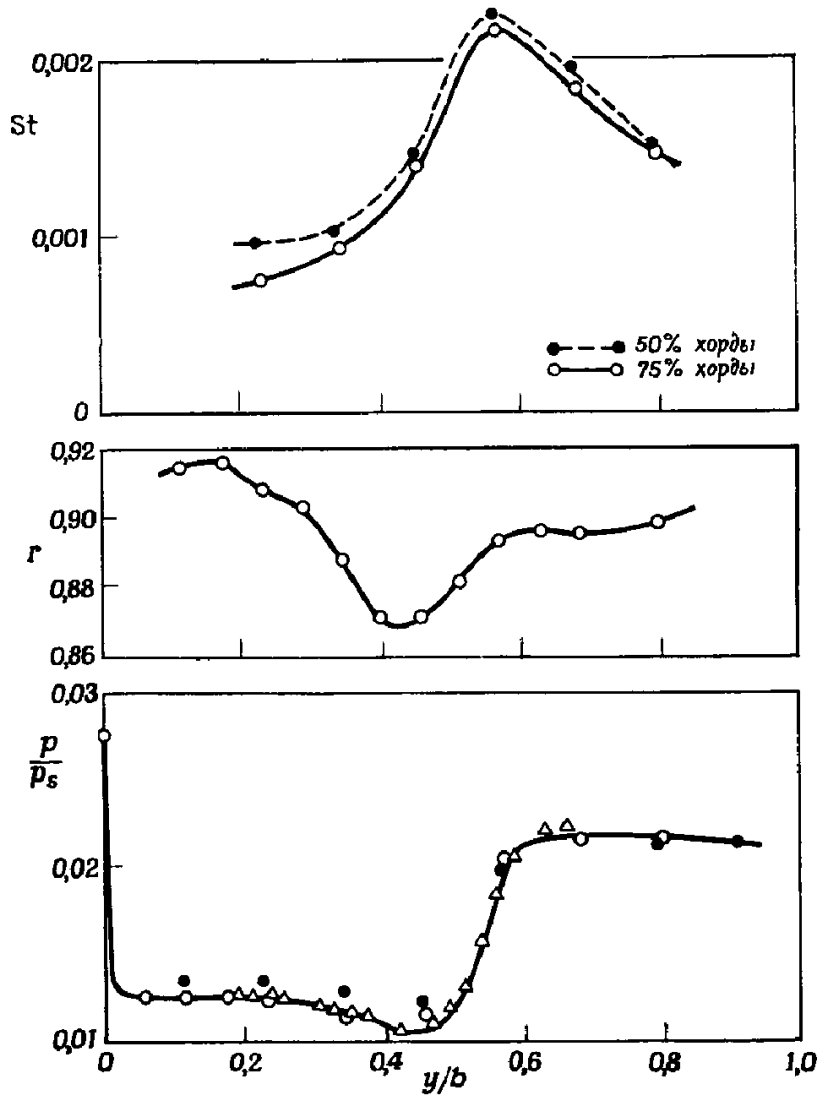
Угол стреловидности передней кромки составлял от 75,7 до 60,2°. Во всех исследованных случаях происходил отрыв ламинарного пограничного слоя, и образующийся на линии отрыва вихревой слой в большинстве случаев свертывался в вихрь. С увеличением угла стреловидности передней кромки интенсивность вихря уменьшалась. Внутрь от линии отрыва в течении преобладали один или более вихрей, образованных оторвавшимся слоем, и поле течения отличалось от ко-

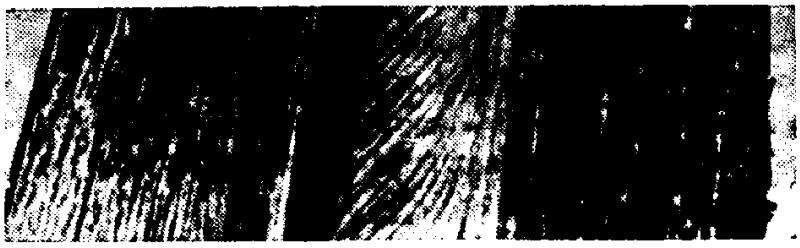
нического. При угле стреловидности передней кромки 75,7° и малых углах атаки оторвавшийся поток и вихревой слой проходят над крылом и свертываются в вихрь над стороной разрежения, ко-



Фиг. 73. Течение на стороне разрежения треугольного крыла с дозвуковой передней кромкой [71].

торый определяет поле течения на этой стороне. Тепловой поток максимален в области растекания под вихрем и вследствие низкого давления величина его меньше, чем на стороне давления. При ламинарном течении число Стэнтона под вихрем заметно увеличивается с увеличением числа Рейнольдса, пока пограничный слой под вихрем не становится турбулентным. Тепловой поток





Фиг. 74. Теплопередача, коэффициент восстановления и распределение давления для крыла с углом стреловидности передней кромки 75,7° и углом атаки 6,5°, $Re_c = 2 \cdot 10^6$ [71].

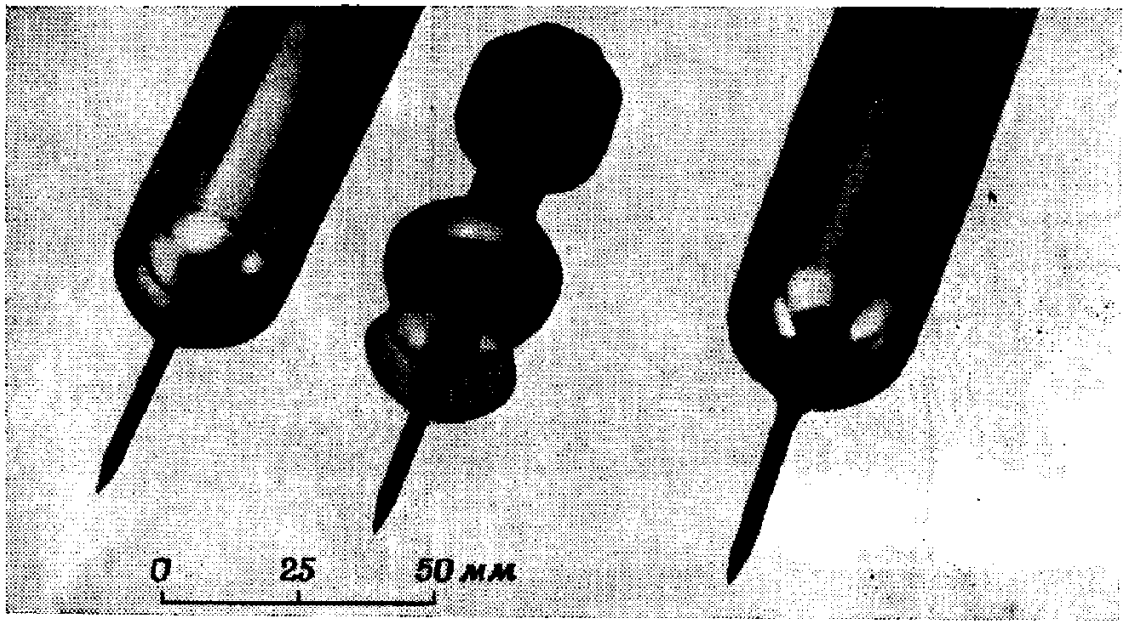
имеет пик под каждым вихрем. Температура восстановления под вихрем была низкой.

В качестве примера на фиг. 74 приведены величины St, r и p/p_s для крыла со стреловидностью передней кромки 75,7°, углом атаки 6,5° при числе $\mathrm{Re}_c = 2 \cdot 10^6$. Число St и коэффициент r определены по формулам

$$\mathrm{St} = \frac{h}{\rho_\infty u_\infty c_p}. \qquad r = \frac{T_r - T_\infty}{T_s - T_\infty}.$$

4.4. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ОБЛАСТИ ОТРЫВА ПОТОКА ОТ ИГЛЫ

Отрыв потока от иглы был описан в гл. IX. Теплопередача в отрывном течении за иглой, расположенной перед тупым телом, была исследована в работах [75—79]. Наиболее интересен вопрос о том, вызывает ли игла увеличение или уменьшение теплового потока, однако результаты опытов при различных числах Рейнольдса крайне противоречивы, что свидетельствует о зависимости теплопередачи от числа Рейнольдса и режима течения

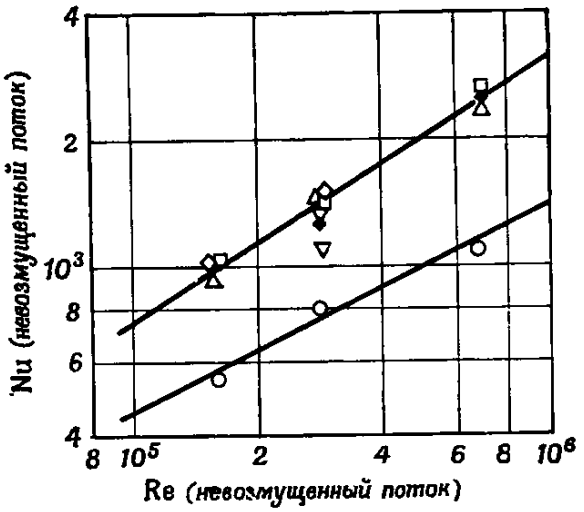


Фиг. 75. Общий вид моделей [75].

Слева направо: модель для измерения теплового потока с медной головной частью, носовая часть в разобранном виде, модель для измерения давления.

(ламинарное или турбулентное). Столдер и Нильсен [75], а также Кроуфорд [78] обнаружили увеличение теплового потока, в то время как измерения Богдонова и Вэса [77], а также Эггерса и Гермаха [76] дали противоположные результаты. Кроуфорд [78] попытался объяснить это расхождение влиянием числа Рейнольдса и режима течения.

Столдер и Нильсен [75] измерили среднюю температуру восстановления, средний тепловой поток и распределение давления на теле вращения с полусферической носовой частью и серией игл с коническим заострением (полуугол при вершине 10°) и отношением длины к диаметру тела от 0,5 до 2,0. Модели показаны на фиг. 75. Измерения выполнены в интервале чисел Рейнольдса, вычисленных по диаметру тела, $1{,}55 \cdot 10^5$—$9{,}85 \cdot 10^5$ и чисел Маха 0,12—5,04.



Фиг. 76. Влияние иглы при $M_\infty = 2{,}67$ [75].

$\frac{\text{Длина иглы}}{\text{Диаметр тела}}$: ○ 0; □ 0,5; ◇ 1,0; △ 2,0; ◆ диск диаметром 6,4 мм на стержне длиной 12,7 мм; ▽ диск диаметром 9,5 мм на стержне длиной 25,4 мм.

Первая модель состояла из медной полусферы диаметром 25,4 мм с иглами разной длины и цилиндра из нержавеющей стали длиной 140 мм. Вторая модель представляла собою полусферу, состоящую из двух деталей с одинаковыми площадями поверхности. Передняя медная деталь нагревалась, задняя деталь из нержавеющей стали не нагревалась. Типичный интервал температур для носовой части от 10 до 71° С. Коэффициент теплоотдачи вычисляется по формуле

$$q = hA\,(T_r - T_n),$$

где T_n — температура носовой части.

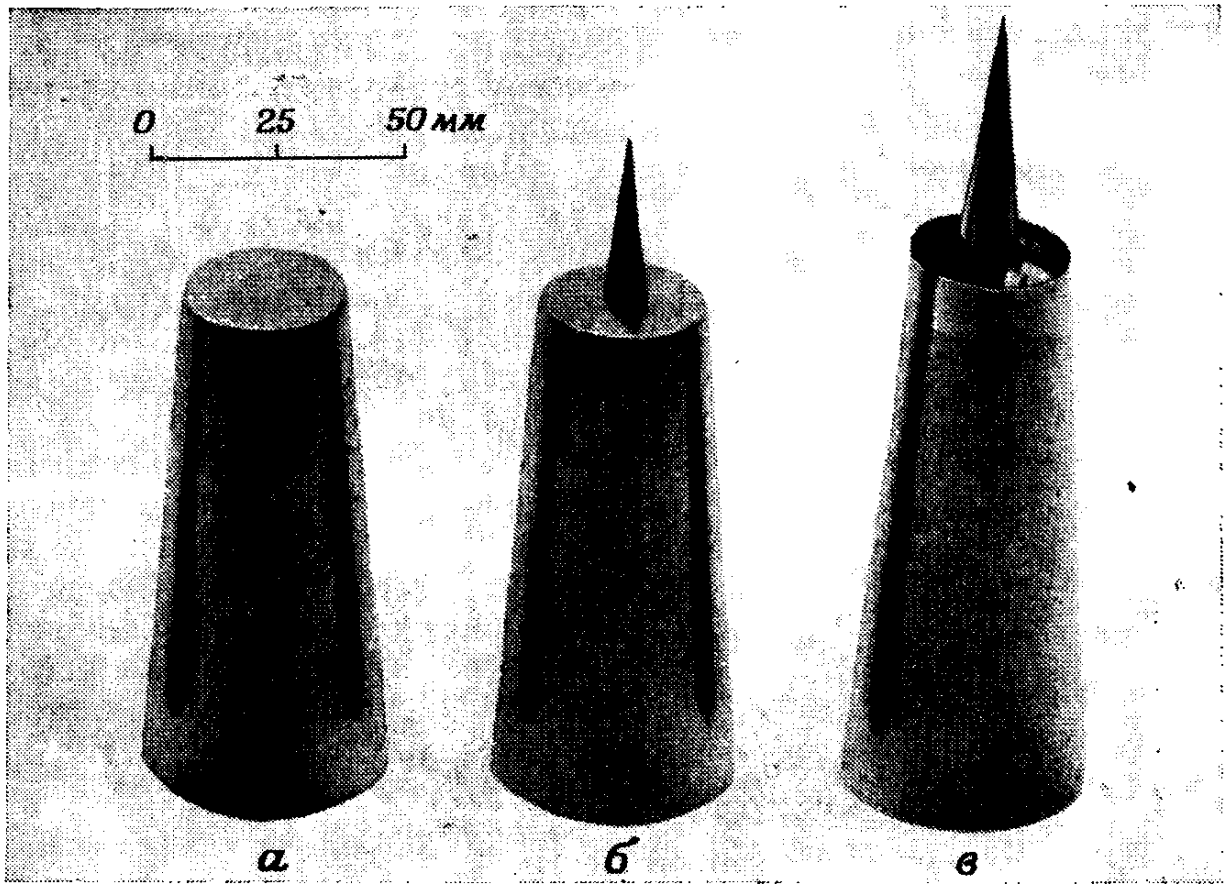
Предполагалось, что пограничный слой на полусфере без иглы был ламинарным, так как в соответствии с исследованиями Фейджа [80] переход на сфере происходит при числе Рейнольдса от $1{,}57 \cdot 10^5$ до $4{,}24 \cdot 10^5$. Однако тщательное исследование теневых фотографий позволило установить, что отрывное течение было переходного типа (переход между отрывом и присоединением).

При наличии иглы коэффициент восстановления уменьшается пропорционально длине иглы. При $M_\infty = 1{,}75$ игла длиной 50,8 мм снизила коэффициент восстановления на 3—5%, а при $M_\infty = 2{,}67$ — на 5—10%. Равновесная температура головной части ракеты диаметром 0,305 м, равная 185° С при $M_\infty = 2{,}67$ на высоте 30 км, снижается за счет установки иглы приблизительно на 22° С.

Как видно из фиг. 76, на которой представлены экспериментальные величины числа Nu в зависимости от числа Re при данных M_∞ и Re независимо от длины иглы, величина теплового потока почти удваивается по сравнению со сферой без иглы.

При добавлении иглы тепловой поток от передней половины полусферы в большинстве случаев увеличивается.

Эггерс и Гермах [76] измеряли тепловой поток и температуру восстановления на двух телах вращения с иглами (фиг. 77) в интервалах чисел Маха и Рейнольдса $3 \leqslant M_\infty \leqslant 5{,}05$ и $0{,}7 \cdot 10^6 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 1{,}90 \cdot 10^6$ (удлинение исходной модели 2).



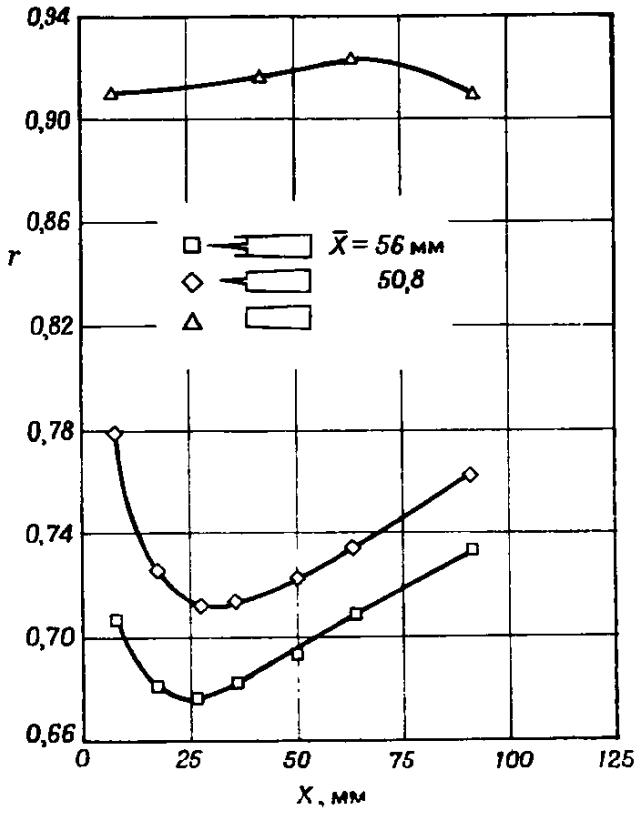
Фиг. 77. Формы моделей [76].

а — усеченный конус (исходная конфигурация); *б* — усеченный конус с иглой; *в* — усеченный конус с иглой и кольцевой проточкой.

Наблюдались пульсации отрывного течения, поэтому аэродинамическое охлаждение крупномасштабными вихрями должно было непосредственно сказаться на температуре восстановления поверхности, так как крупномасштабные вихри уносят тепло от поверхности, что должно привести к снижению ее температуры. В интервале длин иглы, при которых наблюдались пульсации большой амплитуды, обнаружен эффект гистерезиса для усеченного конуса с иглой. В области гистерезиса для усеченного конуса с иглой получены несколько большие значения коэффициента восстановления, чем для конуса с полусферической вогнутой поверхностью носовой части. Полученные коэффициенты восстановления приведены на фиг. 78. Коэффициент восстанов-

ления сначала уменьшается, а затем медленно увеличивается с расстоянием вдоль поверхности тел с иглами и мало изменяется, оставаясь близким к величинам, характерным для обычного пограничного слоя в случае усеченного конуса.

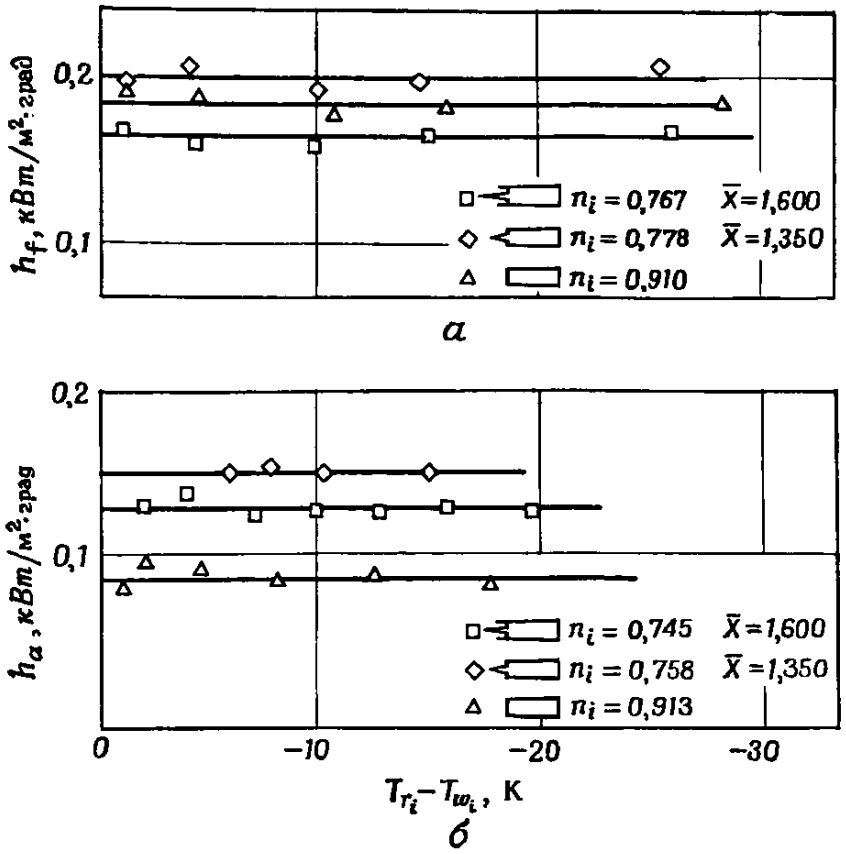
Наибольшее снижение коэффициента восстановления от 0,91 до 0,68 вследствие влияния иглы имеет место на расстоянии 25,4 мм на модели с полусферической вогнутой лобовой поверхностью. Соответствующее снижение температуры восстановления составляет от 660 до 470° С при $M_\infty = 3{,}5$ и температуре окружающего воздуха 4° С. Таким образом, крупномасштабные вихри могут существенно понизить температуру восстановления летательного аппарата при больших скоростях полета. Влияние угла атаки сводится к повышению температуры наветренной и понижению температуры подветренной поверхностей тела. Носовая часть с иглой и полусферической вогнутой лобовой поверхностью вызывает наибольшее снижение коэффициента восстановления, следовательно, эта конфигурация является наиболее эффективным генератором вихрей в исследованном диапазоне чисел Маха. Некоторые результаты для коэффициента теплоотдачи $h = q/(T_r - T_w)$ при нулевом угле атаки и $M_\infty = 3{,}5$, полученные Эггерсом и Гермахом [76], представлены на фиг. 79 в зависимости от r_i и $T_{r_i} - T_{w_i}$, причем r_i — коэффициент восстановления, T_{r_i} и T_{w_i} — температуры восстановления и стенки, измеренные внутри модели у дна, а не на ее поверхности, h_f и h_a — значения h для модели в целом и без носовой части (в обоих случаях без дна).



Фиг. 78. Сравнение коэффициентов восстановления для тел различной формы, $\alpha = 0°$, $M_\infty = 3{,}5$ [76].

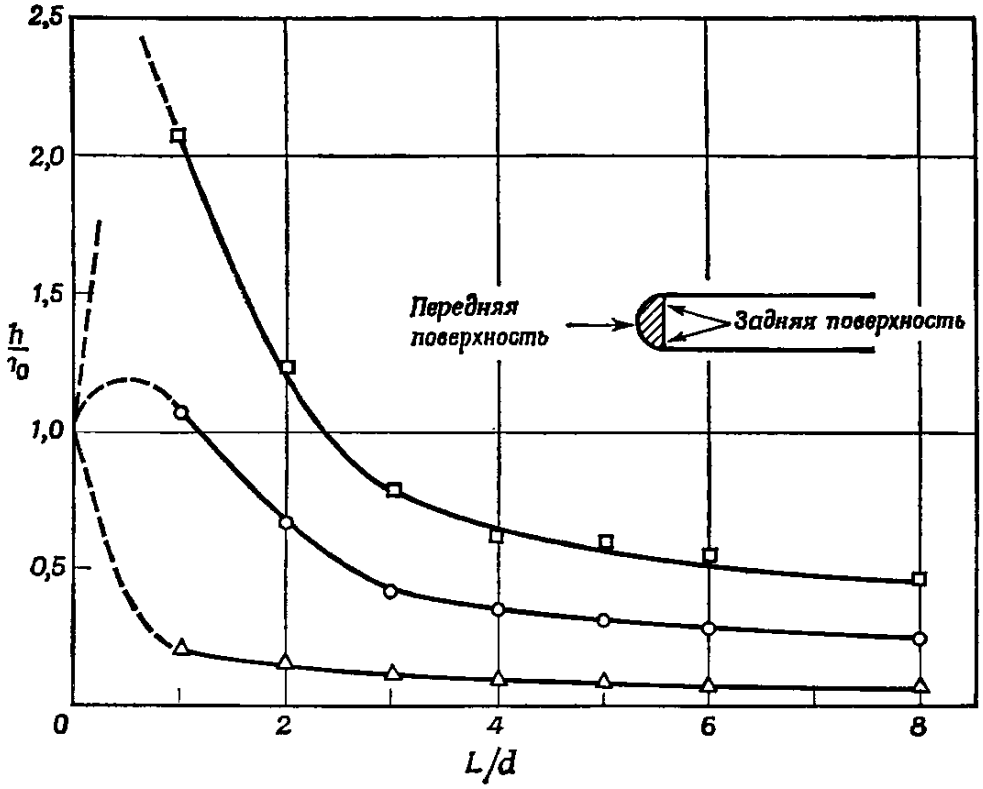
r — коэффициент восстановления; X — расстояние вдоль модели от торцевой кромки основной модели до термопары; $\bar{X}$ — расстояние от конца иглы до тела.

Коэффициент восстановления для исходной конфигурации выше, чем для тела с иглой и полусферической вогнутой лобовой поверхностью, но различие невелико и составляет 5—10% (фиг. 79, *а*). Установка иглы приводит к увеличению $\bar{h}$ для модели без носовой части примерно на 20% (фиг. 79, *б*). Богдонов и Вэс [77] измерили тепловой поток к цилиндрической модели с полусфе-



Ф и г. 79. Сравнение средних коэффициентов теплоотдачи для моделей разных форм, $\alpha = 0°$, $M_\infty = 3,5$ [76].

а — модели в целом; *б* — модели без носовых частей.



Ф и г. 80. Коэффициент теплоотдачи к цилиндру с полусферической носовой частью и иглами разной длины, $M_\infty = 14$ [77].

h_0 — коэффициент теплоотдачи для тела без иглы; L — длина иглы; d — диаметр цилиндра. ○ полусфера в целом; △ передняя поверхность полусферы; □ задняя поверхность полусферы.

рической носовой частью и иглами различной длины в потоке гелия при $M_\infty = 14$ и давлении торможения ~70 ата. Число Рейнольдса, вычисленное по длине иглы, было равно $0{,}365 \cdot 10^6$, а отрывное течение было ламинарным.

Результаты измерений теплового потока к носовой части представлены на фиг. 80. При использовании иглы длиной, равной четырем диаметрам цилиндра, тепловой поток к полусферической носовой части модели составляет менее $^1/_3$ теплового потока к модели без иглы.

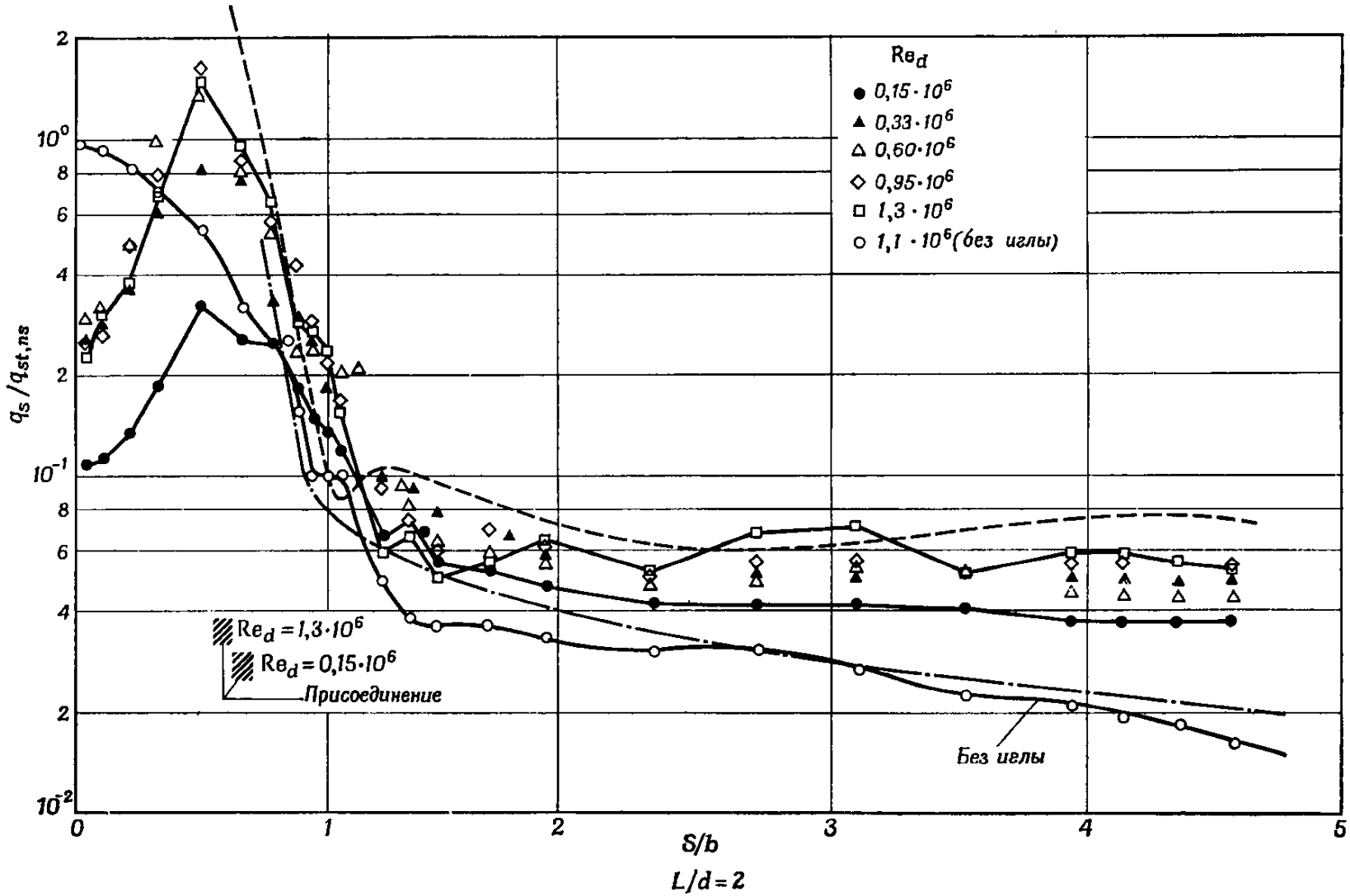
Кроуфорд [78] провел широкое исследование теплопередачи к цилиндрической модели с полусферической носовой частью и иглой при номинальном числе Маха 6,8 и в интервале чисел Рейнольдса Re_d, вычисленных по диаметру цилиндра и параметрам потока перед моделью, от $0{,}12 \cdot 10^6$ до $1{,}5 \cdot 10^6$. Широкий интервал чисел Рейнольдса позволил исследовать случаи ламинарного, переходного и турбулентного течений на границах области отрыва. Теплоотдача к полусфере с иглой существенно зависит от вида течения в области отрыва.

В случае тела с иглой переход происходил на границе области отрыва или перед ней при числе Рейнольдса, вычисленном по параметрам невозмущенного потока и длине модели без иглы, $Re \approx 0{,}5 \cdot 10^6$. Наименьшее число Рейнольдса, вычисленное по длине пограничного слоя до перехода, составляло около $0{,}06 \cdot 10^6$ при длине иглы $L/d = {}^1/_2$, но на теле с иглой переход может произойти при значительно меньшем числе Рейнольдса, следовательно, игла может быть применена как турбулизатор пограничного слоя. На фиг. 81 показаны отношения местных тепловых потоков к модели с иглой ($L/d=2$) q_s к местным тепловым потокам в критической точке тела без иглы $_{st,\,ns}$. Для всех остальных длин игл L/d ($^1/_2$, 1, 2, 3 и 4) зависимости подобны.

Как видно из фиг. 81, тепловой поток уменьшается около основания иглы, но достигает максимума вблизи точки присоединения течения на полусфере.

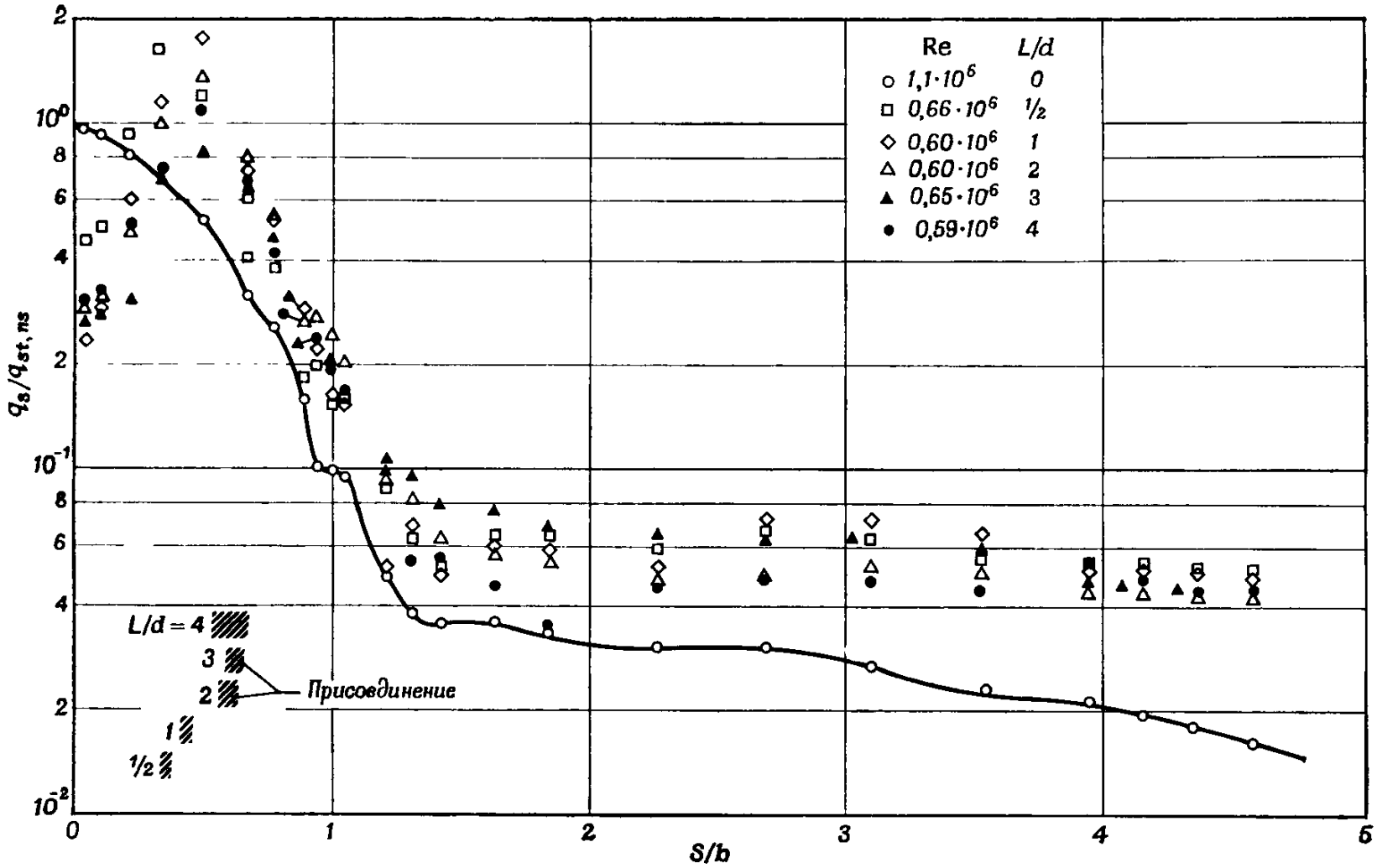
На фиг. 81 представлены также результаты расчетов по методам Стайна и Уэнлеса [81] для ламинарного течения и по методу Коэна [82] для турбулентного течения. В обоих случаях предполагалось, что пограничный слой начинается в предполагаемой точке присоединения. Хотя результаты расчетов недостаточно хорошо согласуются с экспериментом, они определяют общую тенденцию. Кроуфорд [78] построил зависимость $q_{st}/q_{st,\,ns}$ от S/b отдельно для различных областей чисел Рейнольдса от $0{,}14 \cdot 10^6$ до $1{,}4 \cdot 10^6$, чтобы исследовать влияние изменения длины иглы. Так как все случаи подобны, представлена лишь область $0{,}59 \cdot 10^6 \leqslant Re_d \leqslant 0{,}66 \cdot 10^6$ (фиг. 82).

С ростом S/b местный тепловой поток уменьшается, и общим следствием удлинения иглы является снижение теплового потока



Ф и г. 81. Влияние числа Рейнольдса на местный тепловой поток к цилиндру с полусферической носовой частью и иглой [78].

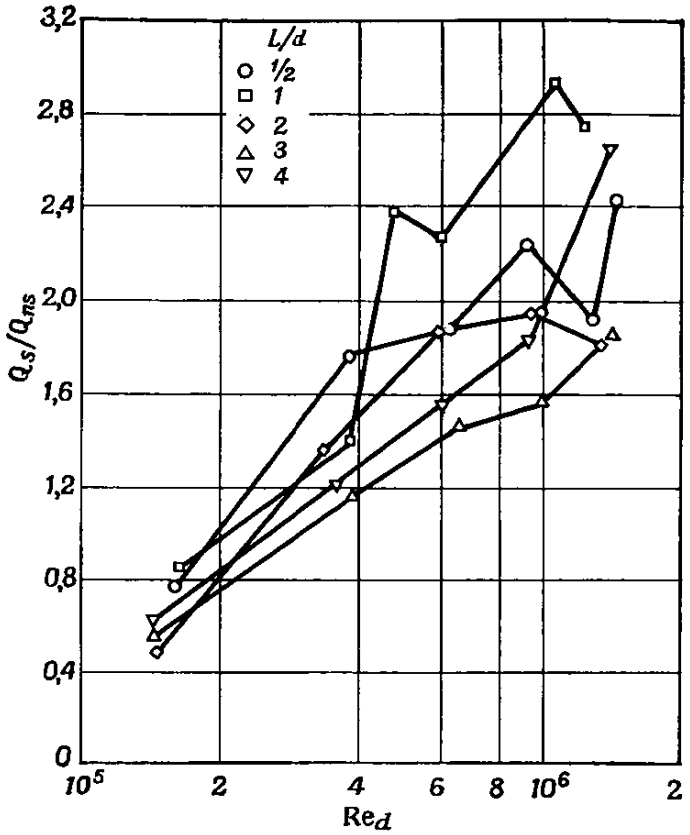
q_s — плотность местного теплового потока тела с иглой; $q_{st,ns}$ — плотность местного теплового потока в критической точке модели без иглы; S — расстояние вдоль образующей от критической точки полусферы; b — длина дуги полусферы; —·—·— теория ламинарного течения [81]; — — — теория турбулентного течения [82].



Фиг. 82. Влияние длины иглы на местный тепловой поток к цилиндру с полусферической носовой частью и иглой [78].

в небольшой области у основания иглы и рост теплового потока после присоединения на остальной части поверхности полусферы.

Наконец, на фиг. 83 показано влияние длины иглы на суммарный тепловой поток к полусферической лобовой поверхности.



Фиг. 83. Влияние длины иглы и числа Рейнольдса на суммарный тепловой поток к полусферической лобовой поверхности цилиндрической модели [78].

Q_s и Q_{ns} — суммарный тепловой поток к полусферической лобовой поверхности при наличии иглы и без нее.

Как было сказано раньше, при больших числах Рейнольдса тепловой поток к полусфере приблизительно удваивается за счет иглы.

Столдер и Нильсен [75] также обнаружили увеличение теплового потока за счет иглы. Однако при небольших числах Рейнольдса влияние иглы сводится к уменьшению теплового потока до ~50%. Это согласуется с теорией Чепмена [6], экспериментальными результатами Богдонова и Вэса [77], полученными при ламинарном режиме течения. В опытах Кроуфорда [78] течение в общем было ламинарным. В некоторых случаях при присоединении наблюдался переход. При несколько больших числах Рейнольдса ($\sim 0{,}3 \cdot 10^6$) переход начинался до присоединения и число Рейнольдса перехода для свободного слоя смешения было меньше, чем для слоя на стенке. Число Рейнольдса перехода, вычисленное по местным параметрам течения за пределами

области отрыва, возрастало с ростом чисел Маха и Рейнольдса. При увеличении чисел Маха числа Рейнольдса перехода в области отрыва приближались к соответствующим числам на твердой границе [83, 84].

5. РАСЧЕТ ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ НА ОТРЫВНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Имеется несколько методов расчета влияния теплопередачи на отрывное течение в широком интервале скоростей от дозвуковой до гиперзвуковой.

5.1. РАСЧЕТ ДЛЯ ОБЛАСТИ ПРИСОЕДИНЕНИЯ В НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

Как уже упоминалось в гл. I, расчет теплового потока в области присоединения очень важен, так как именно в этой области он достигает большой величины. Чанг и Вигас [85] предложили приближенный метод расчета теплопередачи в области присоединения сильно охлажденного ламинарного пограничного слоя на тупоносых телах при гиперзвуковых скоростях [86]. Их расчет распределения давления и скорости относится к завихренному течению жидкости. Схемы течения в областях отрыва и присоединения показаны на фиг. 84 и 85.

В предположении, что двумерное течение в области присоединения ламинарное и что направление течения перпендикулярно стенке, линии тока могут быть определены из уравнения

$$\nabla^2\psi = -\Omega(\psi), \tag{23}$$

где ψ — функция тока, $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$, Ω — интенсивность вихря. Это уравнение справедливо для невязкой жидкости. Предполагается, что вязким является только пограничный слой, развивающийся вдоль оси x. Если мы таким образом определим расстояние L, что стенка, на которой происходит присоединение потока, не влияет на приходящее течение при $y > L$, т. е. если $u = 0$ при $y \geqslant L$ и $u > 0$ при $y < L$, то уравнение (23) сводится к следующему:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \lambda^2\psi + v_0\lambda = 0, \tag{24}$$

где λ — параметр слоя смешения, определяемый из уравнения, $v(x, L) = -v_0 e^{-\lambda x}$, v_0 — составляющая v при $x = 0$ и $y = L$. Используем при решении уравнения (24) следующее преобразование Лапласа для функции тока:

$$\varphi(S, y) = L_x\{\psi(x, y)\},$$

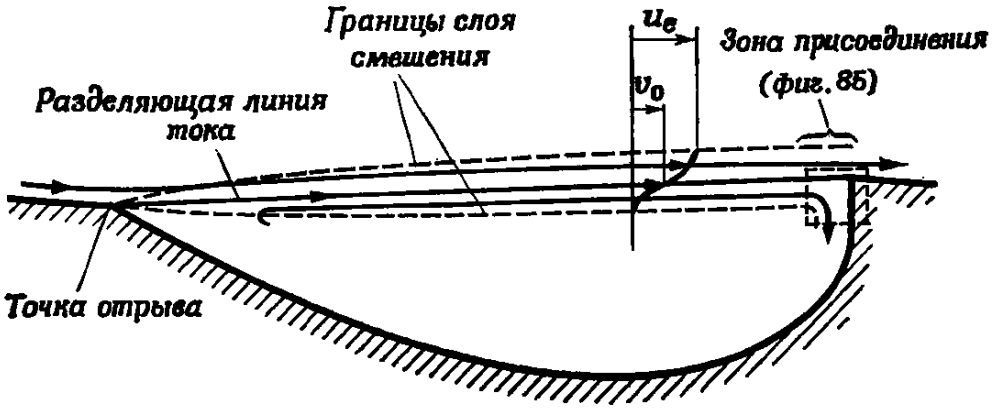
$$\chi(S, Z) = L_y\{\varphi(S, y)\},$$

где S и Z — переменные.

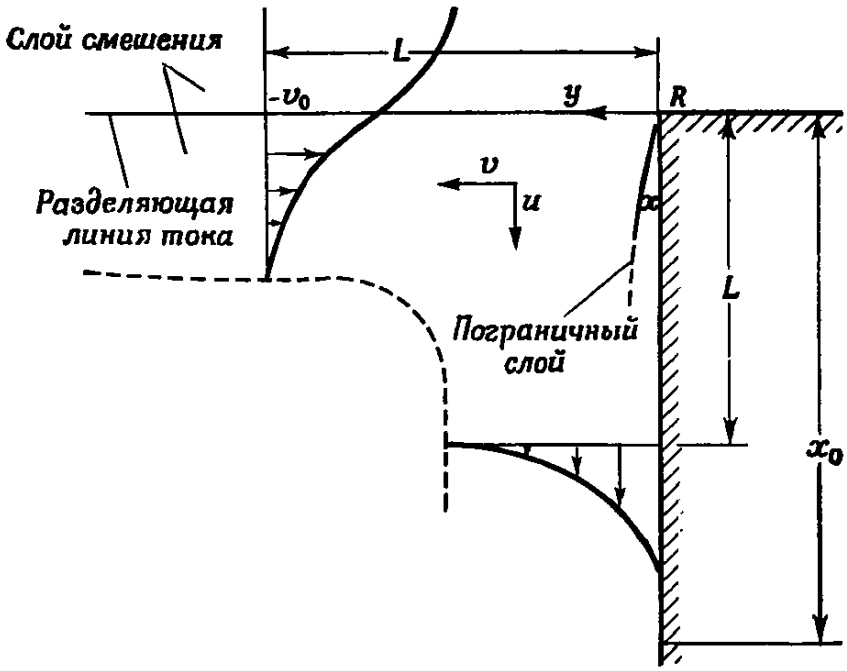
Из определения линии тока, граничных условий при $x = x$, $y = 0$ и граничных условий для ψ следует

$$\varphi(S, 0) = 0, \qquad \varphi(S, L) = \frac{v_0}{S(S+\lambda)},$$

$$|\varphi(S, y)| < N \text{ для всех } S > 0,$$



Фиг. 84. Область отрыва [85].



Фиг. 85. Область присоединения [85].

где N — произвольное большое положительное число. Решение уравнения (24) принимает вид

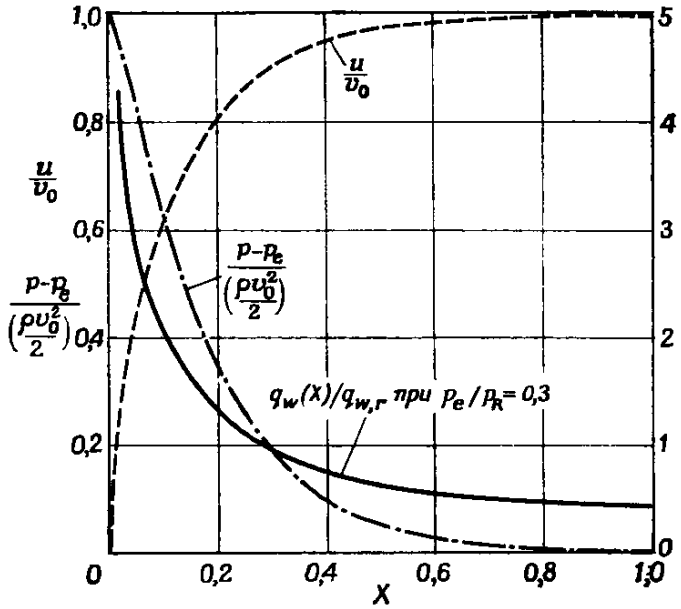
$$\psi(X, Y) = \frac{\operatorname{cth}\lambda L}{\lambda L}(\operatorname{sh}\lambda L Y) + \frac{1-\operatorname{ch}\lambda L}{\lambda L} - \frac{Y}{\lambda L}\exp(-\lambda L X) -$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda L(\sin n\pi Y)}{n\pi\{(n\pi)^2+(\lambda L)^2\}}\exp\left[-\sqrt{(n\pi)^2+(\lambda L)^2}\,X\right], \qquad (25)$$

где $X = x/L$, $Y = y/L$. Это уравнение можно получить также методом разделения переменных.

Распределения скорости и давления вдоль стенки, полученные с помощью уравнения (25), представлены на фиг. 86.

На этой фигуре приведено также распределение теплового потока в области присоединения, полученное с помощью приве-



Фиг. 86. Распределения скорости, давления и теплового потока вдоль стенки [85].

денного выше решения и метода Лиза [86]. Область присоединения определена здесь как расстояние вдоль стенки, на котором поток перестраивается, а именно $0 \leqslant X \leqslant 1$. Средний тепловой поток в области присоединения $q_{w,r}$ в интервале значений давления $0,1 \leqslant p_e/p_R \leqslant 0,5$ (индекс R соответствует присоединению) определяется по следующей полуэмпирической формуле:

$$q_{w,r} \approx 2^{-3/2} \Pr^{-2/3} \sqrt{\rho_r \mu_r} \sqrt{\frac{v_0}{L}} (h_r - h_w) \left(0,76 + 1,411 \frac{p_e}{p_R}\right). \quad (26)$$

Если $\rho_R \mu_R \approx (\rho_e \mu_e) p_R/p_e$ и $\Pr \approx 1$,

или

$$\frac{h_R - h_w}{h_e - h_w} \approx \frac{v_0}{u_e} = 0,587 \text{ [85]},$$

то, так как

$$\lambda L = 5,3 \text{ и } \lambda = \frac{1}{2,222} \frac{\sqrt{\mathrm{Re}}}{l},$$

уравнение (26) принимает вид

$$\mathrm{Nu}_r = \frac{q_{w,r} \Pr l}{(h_e - h_w) \mu_e} \approx 0,0463 \Pr^{1/3} \mathrm{Re}^{3/4} (p_e/p_R)^{-1/2} \left(0,76 + 1,411 \frac{p_e}{p_R}\right). \quad (27)$$

Величину p_e/p_r можно определить в предположении изэнтропического сжатия вдоль разделяющей линии тока слоя смешения, как это сделано Чепменом и др. [87]. Площадь области присоединения меняется с числом Рейнольдса.

Средний тепловой поток для площади, большей области присоединения и включающей ее, также может быть вычислен. Так как на расстоянии $x > L$ давление почти постоянное (фиг. 85), то для $L < x \leqslant x_0$

$$\mathrm{Nu} \approx \frac{0{,}0926\,\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re}^{3/4}}{0{,}2922\,(x_0/l)^{1/2}\,\mathrm{Re}^{1/4}+1}, \tag{28}$$

где x_0 — некоторое значение x, большее L, но еще соответствующее окрестности точки присоединения. Средний тепловой поток в окрестности точки присоединения при $x_0 > L$ определяется суммой величин, вычисленных по формулам (27) и (28) с соответствующими весовыми коэффициентами.

Сравнение результатов расчета со средними величинами теплового потока, измеренными Ларсоном [61] для $x_0/l = 0{,}08$ и ламинарного пограничного слоя, присоединяющегося под углом около 45°, показывает, что средний тепловой поток, вычисленный для условий эксперимента Ларсона, согласуется с измеренным в пределах 10%. Расчет, выполненный Чангом и Вигасом [85], основан на предположении о присоединении под прямым углом. Согласно результатам экспериментального исследования течения в выемке на поверхности конуса при $M_\infty = 11$, проведенного Николем [88], расчет Чанга и Вигаса дает завышенные вдвое значения среднего коэффициента теплоотдачи в области присоединения, по-видимому, вследствие допущения о подходе разделяющей линии тока к поверхности выемки в точке присоединения под прямым углом, хотя Чанг и Вигас сами сомневались в правильности этого допущения [85].

Из уравнений (27) и (28) видно, что Nu пропорционально $\mathrm{Re}^{3/4}$ в области присоединения и Re немного в меньшей степени вне этой области. Следовательно, пропорциональность среднего теплового потока числу Рейнольдса для заданного $x_0 > L$ колеблется между $\mathrm{Re}^{1/2}$ и $\mathrm{Re}^{3/4}$ в зависимости от x_0 и Re. Так как длина области присоединения L обратно пропорциональна $\mathrm{Re}^{1/2}$ при $x_0 > L$, зависимость среднего теплового потока от Re уменьшается с ростом Re.

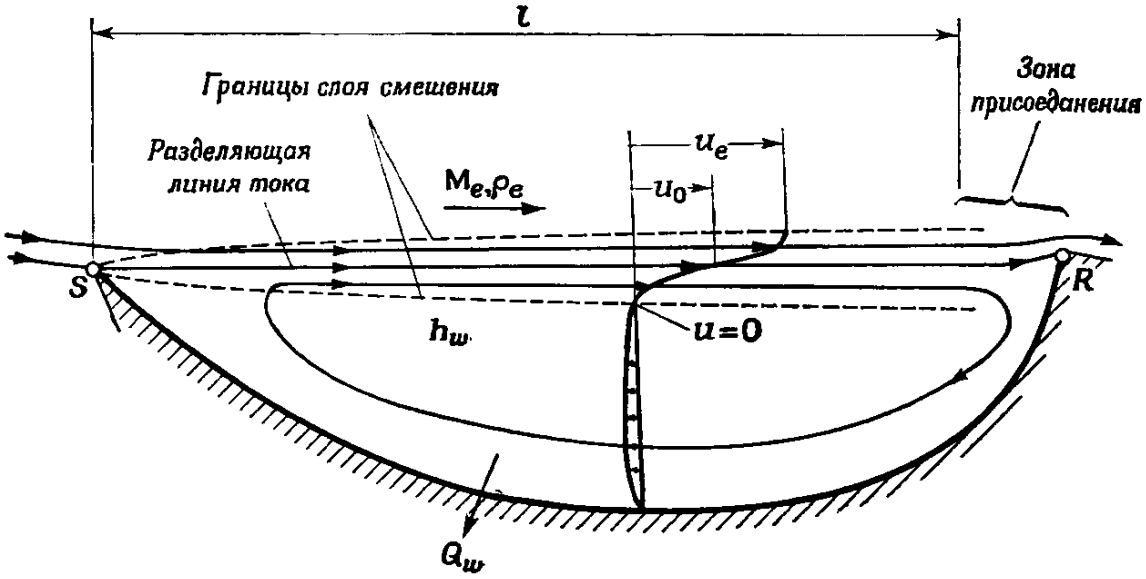
5.2. ТЕОРИЯ ЧЕПМЕНА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ОБЛАСТЯХ ОТРЫВА

Эта теория наиболее широко известна и существенно способствует пониманию сложного характера отрывного течения. Она дает решение для средних величин. В связи с принятыми допущениями область ее приложения соответственно ограничена.

Один из типичных примеров, подтверждающих это, как упоминалось ранее, приведен Ларсоном [61].

Чепмен [6] рассматривает плоский тонкий вязкий слой смешения, отделенный от твердого тела замкнутой областью, в которой воздух движется с малой скоростью (фиг. 87), причем давление на внешней границе слоя постоянное.

Эта схема течения применяется к отрыву ламинарного слоя газа при различных значениях числа Прандтля, включая случай,



Фиг. 87. Схема отрывного течения (растянута по вертикали) [6].

когда воздух вдувается в область отрыва. Последний случай будет рассмотрен в гл. XII. Для случая отрыва турбулентного слоя предполагается, что число Прандтля в области малых скоростей равно единице. Предполагается также, что в точке отрыва толщина пограничного слоя равна нулю, это предположение уже обсуждалось в гл. X. В предположении о постоянстве давления расчетная величина теплового потока к области ламинарного отрыва (воздух) составляла 0,56 соответствующей величины в случае присоединенного пограничного слоя.

Основные уравнения количества движения, неразрывности и энергии следующие:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{29}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0, \tag{30}$$

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial h}{\partial y}\right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{31}$$

где h — удельная энтальпия.

Граничные условия:

$$u(x, \infty) = u_e, \qquad h(x, \infty) = h_e,$$
$$u(x, -\infty) = 0, \qquad h(x, -\infty) = h_w.$$

Предел $-\infty$ означает, что при определении характеристик слоя смешения стенка считается удаленной на бесконечное расстояние.

Для решения этих дифференциальных уравнений принимаются следующие дополнительные допущения:

1. $\mathrm{Pr} = \mathrm{const}$;
2. $p = \rho RT$;
3. $\mu/\mu_e = C\dfrac{T}{T_e}, \qquad C = \sqrt{\dfrac{T_w}{T_e}}\,\dfrac{T_e+S}{T_w+S}$

(закон Сазерленда).

4. Толщина слоя смешения в точке отрыва равна нулю или пренебрежимо мала по сравнению с длиной слоя смешения l.

Дифференциальные уравнения преобразуются по методу Кармана — Цзяна, являющегося обобщением преобразования Мизеса. Вводя функцию тока ψ посредством выражений

$$\rho u = \rho_e \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \rho v = -\rho_e \frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{32}$$

полагая

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_y = \frac{\rho u}{\rho_e}\left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)_x, \tag{33}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_y = \frac{\rho v}{\rho_e}\left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)_x + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\psi, \tag{34}$$

$$u_* = u/u_e, \qquad h_* = h/h_e,$$
$$x_* = x/l, \quad \psi_* = \psi/\sqrt{\nu_e u_e l c}, \quad \rho_* = \rho/\rho_e, \tag{35}$$
$$\mu_* = \mu/\mu_e = CT/T_e = CT_*$$

и подставляя эти выражения в уравнения (29) и (31), получаем следующие основные уравнения:

$$\frac{\partial u_*}{\partial x_*} = \frac{\partial}{\partial\psi_*}\left(u_*\frac{\partial u_*}{\partial\psi_*}\right), \tag{36}$$

$$\frac{\partial h_*}{\partial x_*} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial\psi_*}\left(u_*\frac{\partial h_*}{\partial\psi_*}\right) + \frac{u_e^2}{h_e}u_*\left(\frac{\partial u_*}{\partial\psi_*}\right)^2. \tag{37}$$

В этих уравнениях не появляется ни число Маха, ни γ, а только u_e^2/h_e. Сначала решается уравнение количества движения (36), так как оно не зависит от уравнения энергии (37), в то время как последнее зависит от уравнения (36).

5.2.1. Решение уравнения количества движения

Чепмен привел уравнение (36) к обыкновенному

$$-\frac{\zeta}{2}\frac{du_*}{d\zeta}=\frac{d}{d\zeta}\left(u_*\frac{du_*}{d\zeta}\right), \tag{38}$$

где

$$\zeta=\psi_*/\sqrt{x_*} \tag{39}$$

— безразмерная переменная, связанная с потоком массы. Результаты численного решения этого нелинейного дифференциального уравнения с использованием переменной Блазиуса

$$\eta=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{u_*} \tag{40}$$

приведены в табл. 2 [6].

5.2.2. Решение уравнения энергии

С использованием переменной ζ уравнение (37) принимает следующий вид (если $\partial h_*/\partial x_*=0$):

$$u_*\frac{\partial^2 h_*}{\partial\zeta^2}+\left(\mathrm{Pr}\frac{\zeta}{2}+\frac{du_*}{d\zeta}\right)\frac{\partial h_*}{\partial\zeta}=-\mathrm{Pr}\frac{u_e^2}{h_e}u_*\left(\frac{du_*}{d\zeta}\right)^2. \tag{41}$$

Так как уравнение (41) является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка, можно получить его общее решение.

С помощью уравнения (38)

$$u_*u_*''+(u_*')^2+\zeta u_*'/2=0$$

получаем

$$h_*(\zeta)=1+C_1\int\limits_{\zeta}^{\infty}(4u_*u_*')^{\mathrm{Pr}}\frac{d\zeta}{2u_*}+\frac{\mathrm{Pr}\,u_e^2}{4h_e}\int\limits_{\zeta}^{\infty}(4u_*u_*')^{\mathrm{Pr}}G(\zeta)\frac{d\zeta}{2u_*}, \tag{42}$$

где C_1 — постоянная, определяемая из граничных условий, а

$$G(\zeta)=\int\limits_0^{\zeta}(4u_*u_*')^{2-\mathrm{Pr}}\frac{d\zeta}{2u_*}. \tag{43}$$

Если

$$\begin{aligned}F_1(\zeta)&=\int\limits_{\zeta}^{\infty}(4u_*u_*')^{\mathrm{Pr}}\frac{d\zeta}{2u_*},\\ F_2(\zeta)&=\frac{\mathrm{Pr}}{2}\int\limits_{\zeta}^{\infty}(4u_*u_*')^{\mathrm{Pr}}G(\zeta)\frac{d\zeta}{2u_*},\end{aligned} \tag{44}$$

то

$$C_1 = \frac{h_w/h_e - 1 - (u_e^2/2h_e)\,F_2(\zeta_d)}{F_1(\zeta_d)}, \tag{45}$$

причем индекс d относится к застойной зоне, а $F_1(\zeta_d)$ и $F_2(\zeta_d)$ зависят только от числа Pr. Например, для $\mathrm{Pr} = 0{,}72$, $F_1(\zeta_d) = 2{,}58$ и $F_2(\zeta_d) = -0{,}175$.

Распределение энтальпии дается формулой

$$h_* = \frac{h}{h_e} = 1 + \left(\frac{h_w}{h_e} - 1\right) g_1(\zeta) + \frac{u_e^2}{2h_e} g_2(\zeta), \tag{46}$$

где нормализованные функции $g_1(\zeta)$, $g_2(\zeta)$

$$\begin{aligned} g_1(\zeta) &= F_1(\zeta)/F_1(\zeta_d), \\ g_2(\zeta) &= F_2(\zeta) - g_1(\zeta)\,F_2(\zeta_d) \end{aligned} \tag{47}$$

определяются с помощью уравнений (44) и (47) и числовых значений u_*. Они удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} g_1(\zeta_d) &= 1, \quad g_1(\infty) = 0, \\ g_2(\zeta_d) &= 0, \quad g_2(\infty) = 0. \end{aligned}$$

Результаты расчетов в интервале чисел Прандтля от 0,1 до 10 даны в табл. II работы [6].

Если $\mathrm{Pr} = 1$, уравнение (47) сводится к виду

$$(g_1)_{\mathrm{Pr}=1} = 1 - u_*, \quad (g_2)_{\mathrm{Pr}=1} = u_*(1 - u_*),$$

а уравнение (46) к виду

$$\begin{aligned} (h_*)_{\mathrm{Pr}=1} &= 1 + \left(\frac{h_w}{h_e} - 1\right)(1 - u_*) + \frac{u_e^2}{2h_e} u_*(1 - u_*) = \\ &= \frac{h_w}{h_e} - u_*\left(\frac{h_w}{h_e} - 1 - \frac{u_e^2}{2h_e}\right) - u_*^2 \frac{u_e^2}{2h_e}. \end{aligned} \tag{48}$$

Это хорошо известный интеграл Крокко для течения вязкого газа с $\mathrm{Pr} = 1$.

5.2.3. Профили скорости, энтальпии и температуры в физических координатах

Связь ζ и y дается формулой

$$\frac{y}{2}\sqrt{\frac{u_e}{\nu_e x c}} = \int_0^{\zeta} T_* \frac{d\zeta}{2u_*}. \tag{49}$$

Для совершенного газа $p = \rho RT$ и

$$h = c_{p_a} T + h_{\text{вн}}, \text{ где } h_{\text{вн}} = \int_0^T c_{p_{\text{вн}}} dT \tag{50}$$

— энтальпия внутреннего движения молекулы, $c_{p_a} = \gamma_a R/(\gamma_a - 1)$ — постоянная удельная теплоемкость, соответствующая активным степеням свободы (поступательной и вращательной), $c_{p_{\text{вн}}}$ — зависящая от температуры добавочная удельная теплоемкость, соответствующая внутренним степеням свободы (колебательной и возбуждения электронов), R — газовая постоянная.

Для двухатомных молекул $\gamma_a = {}^7/_5$, для газа с многоатомными молекулами $\gamma_a = {}^4/_3$. Полную удельную теплоемкость c_p получим, дифференцируя уравнение (50)

$$c_p = \frac{\gamma_a}{\gamma_a - 1} R + c_{p_{\text{вн}}} = \frac{\gamma_a}{\gamma_a - 1} R + (c_{p_{\text{вибр}}} + c_{p_{\text{электр}}}). \tag{51}$$

Так как

$$T_* = T/T_e = \frac{h_e}{c_{p_a} T_e} (h_* - h_{*_{\text{вн}}}), \tag{52}$$

то с помощью уравнений (49) и (40) получаем

$$\frac{y}{2} \sqrt{\frac{u_e}{\nu_e x c}} = \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a} \frac{h_e}{RT_e} \left\{ \int_0^\zeta h_* \frac{d\zeta}{2u_*} - \int_0^\zeta (h_*)_{\text{вн}} \frac{d\zeta}{2u_*} \right\} =$$

$$= \frac{(\gamma_a - 1)}{\gamma_a R T_e} \left\{ \eta + \left(\frac{h_w}{h_e} - 1 \right) \eta_1 + \frac{u_e^2}{2h_2} \eta_2 - \int_0^\zeta (h_*)_{\text{вн}} \frac{d\zeta}{2u_*} \right\}, \tag{53}$$

где

$$\eta_1(\zeta) = \int_0 g_1(\zeta) \frac{d\zeta}{2u_*}, \quad \eta_2(\zeta) = \int_0^\zeta g_2(\zeta) \frac{d\zeta}{2u_*}. \tag{54}$$

Эти величины приведены в табл. 3 [6]. Профили скорости и энтальпии в зависимости от ζ с помощью уравнения (53) преобразуются в плоскость физических координат (x, y). Для заданного газа профили температуры определяются по профилям энтальпии $h(T)$, а профили числа Маха вычисляются по профилям скорости и температуры.

В частных случаях газа с постоянной удельной теплоемкостью, т. е. при отсутствии колебаний атомов внутри молекул, или газа в определенном интервале температур, в котором энергия колебательных степеней свободы полностью возбуждена, связь y с ζ упрощается. Кроме того, интеграл в уравнении (53) исчезает, так как $h_{\text{вн}} = 0$. В этом случае, поскольку $h = [\gamma/(\gamma - 1)] RT$,

$$\frac{y}{2} \sqrt{\frac{u_e}{\nu_e x c}} = \eta + \left(\frac{T_w}{T_e} - 1 \right) \eta_1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \eta_2 \tag{55}$$

и профиль числа Маха дается формулой

$$\mathrm{M}=\mathrm{M}_e\frac{u_*}{\sqrt{T_*}}=\frac{\mathrm{M}_e u_*}{\sqrt{1+\{(T_w/T_e)-1\}\,g_1+\frac{1}{2}(\gamma-1)\,\mathrm{M}_e^2 g_2}}. \tag{56}$$

Распределение полной энтальпии

$$h_t/h_{t_e}=\left\{h_*+\left(\frac{u_e^2}{2h_e}\,u_*^2\right)\right\}\Big/\left(1-\frac{u_e^2}{2h_e}\right)$$

в этом частном случае будет следующим:

$$\frac{T_t}{T_{t_e}}=\frac{h_t}{h_{t_e}}=\frac{1+\{(T_w/T_e)-1\}\,g_1+\frac{1}{2}(\gamma-1)\,\mathrm{M}_e^2\,(u_*^2+g_2)}{1+\frac{1}{2}(\gamma-1)\,\mathrm{M}_e^2}. \tag{57}$$

5.2.4. Тепловой поток и коэффициент восстановления на стенке

Определим тепловой поток к стенке из закона сохранения энергии для замкнутой контрольной поверхности A с учетом смешения

Поток тепла через поверхность A	=	Увеличение внутренней и кинетической энергии	+	Работа, произведенная давлением на поверхность A	+	Работа, произведенная касательным напряжением на поверхности A.

Для стационарного течения закон энергии записывается в интегральной форме

$$\iint\limits_A \lambda\frac{\partial T}{\partial n}\,dA=\iint\limits_A\left(e+\frac{U^2}{2}\right)\rho V_n\,dA+\iint\limits_A pV_n\,dA+\iint\limits_A \tau V_t\,dA, \tag{58}$$

где $\lambda=c_p\mu/\mathrm{Pr}$ — коэффициент теплопроводности; $e=h-p/\rho$ — удельная внутренняя энергия; V_n — составляющая скорости, нормальная к A (направление из контрольного объема считается положительным); V_t — составляющая скорости, касательная к A (положительное направление выбирается так, чтобы через касательное напряжение определялась работа, производимая газом внутри A); $\tau=|\mu\,\partial u/\partial y|$ — составляющая напряжения, касательная к A.

Так как вдоль линии тока $V_n=0$, а вдоль стенки $V_t=0$, то уравнение сохранения в приложении к замкнутому контуру, образованному разделяющей линией тока SR (обозначена индексом 0) и стенкой RS (фиг. 87), будет следующим:

$$b\int\limits_0^l\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0 dx-Q_w=0+0+b\int\limits_0^l\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0(-u_0)\,dx, \tag{58a}$$

где b — ширина плоского течения, Q_w — тепловой поток к стенке. Так как напряжение τ производит работу над газом, знак u_0 отрицателен. Тогда

$$\frac{Q_w}{b} = h_e \int_0^l \frac{\mu_0}{\mathrm{Pr}} \left(\frac{dh_*}{d\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_0 dx - u_e \int_0^l \mu_0 \left(\frac{du_*}{d\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_0 u_0\, dx. \tag{59}$$

Из уравнения (43) $G(0) = 0$, так что уравнение (44) сводится к следующему:

$$\left(\frac{dh_*}{d\zeta}\right)_0 = -C_1 \frac{(4u_{*_0}u'_{*_0})^{\mathrm{Pr}}}{2u_{*_0}}. \tag{60}$$

Индекс $'$ означает дифференцирование.

Так как

$$\rho u\, dy = \rho_e \sqrt{\nu_e u_e l c}\, \frac{\partial\psi_*}{d\zeta}\, d\zeta = \rho_e \sqrt{\nu_e u_e x c}\, d\zeta,$$

$$\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_0 = \frac{\rho_0 u_0}{\rho_e \sqrt{\nu_e u_e x c}}, \tag{61}$$

интеграл (59) сводится к следующему уравнению:

$$\frac{Q_w}{b} = h_e \sqrt{\rho_e u_e \mu_e l c} \left\{ -C_1 \frac{(4u_{*_0}u'_{*_0})^{\mathrm{Pr}}}{\mathrm{Pr}} + 2\frac{u_e^2}{h_e} u_{*_0}^2 u'_{*_0} \right\}, \tag{62}$$

поскольку $\rho_* u_* = C = \rho_{*_0}\mu_{*_0}$. Это сравнительно простое уравнение, так как $u_{*_0} = u_0/u_e$ и $u'_{*_0} = du_*/d\zeta$ при $\zeta = 0$ постоянные, не зависящие от числа Pr, равные 0,587 и 0,341 соответственно.

Для адиабатического процесса $Q_w = 0$, и, подставляя C_1 в уравнение (62), получим

$$h_{aw_0} = \frac{h_{aw}}{h_e} = 1 + \frac{u_e^2}{2h_e} \left\{ F_2(\zeta_d) + \frac{4\,\mathrm{Pr}\, u_{*_0}^2 u'_{*_0}}{(4u_{*_0}^2 u'_{*_0})\,\mathrm{Pr}} F_1(\zeta_d) \right\}. \tag{63}$$

Коэффициент восстановления r определяется по формуле

$$r = \frac{h_{aw} - h_e}{u_e^2/2} = \frac{h_{aw} - h_e}{h_t - h_e} = F_2(\zeta_d) - \frac{4\,\mathrm{Pr}\, u_{*_0}^2 u'_{*_0}}{(4u_{*_0}u'_{*_0})^{\mathrm{Pr}}} F_1(\zeta_d). \tag{64}$$

Окончательно безразмерная средняя плотность теплового потока $\bar{q}_w = Q_w/bl$ будет равна

$$\frac{\bar{q}_w}{\rho_e u_e (h_{aw} - h_e)} = \sqrt{\frac{C}{\mathrm{Re}}}\, \frac{(4u_{*0}u'_{*_0})^{\mathrm{Pr}}}{\mathrm{Pr}\, F_1(\zeta_d)}. \tag{65}$$

Числовые значения r и $\bar{q}_w$ приведены в табл. IV работы [6].

Из рассмотрения уравнения энергии получается средний тепловой поток $\bar{q}_w$, но не местный.

Средний тепловой поток $(\bar{q}_w)_{bl}$ к пластине при ламинарном пограничном слое и тех же допущениях определен Чепменом и Рубезином [90], а также Блумом [91]

$$\frac{(\bar{q}_w)_{bl}}{\rho_e u_e (h_w - h_{aw})} \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{c}} \approx 0{,}664\,\mathrm{Pr}^{-2/3} \text{ при } \mathrm{Pr} \approx 1.$$

Тепловой поток, вычисленный для оторвавшегося ламинарного слоя воздуха при Pr = 0,72, составляет 0,56 соответствующего значения для присоединенного ламинарного пограничного слоя. Коэффициент восстановления в областях отрыва ламинарного слоя приблизительно равен корню квадратному из числа Прандтля и почти таков же, как для присоединенного ламинарного пограничного слоя.

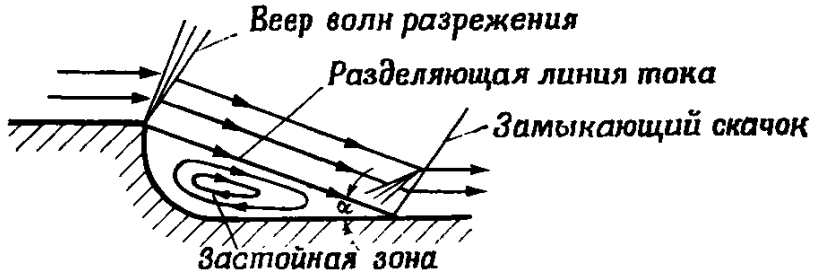
Кёрл [92] теоретически исследовал отрыв «равновесного» ламинарного пограничного слоя, происходящий далеко перед падающим скачком уплотнения или перед уступом, индуцирующим скачок при сверхзвуковых скоростях. Перед отрывом происходит резкое повышение давления, и коэффициент давления в точке отрыва C_p равен

$$C_{p_S} = 0{,}825\,(\mathrm{M}_0^2 - 1)^{-1/4}\,\mathrm{Re}_S^{-1/4},$$

где M_0 — число Маха перед отрывом, Re_S — число Рейнольдса в точке отрыва, вычисленное по расстоянию от передней кромки и характеристикам невозмущенного потока. C_{p_S} не зависит от температуры стенки.

5.3. ИССЛЕДОВАНИЕ КАРЛСОНА ОТРЫВА ЛАМИНАРНОГО СЛОЯ ПРИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ [93]

Карлсон исследовал теплопередачу в ламинарном отрывном течении около тела вращения при гиперзвуковых скоростях, отсутствии химических реакций и подвода массы. Он рассмотрел

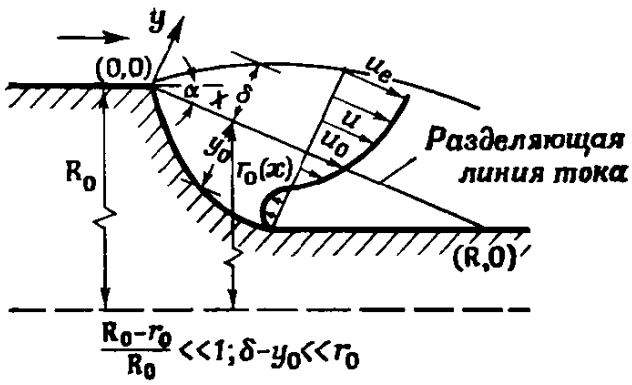


Фиг. 88. Схема теплопередачи за уступом [93].

профиль скорости в области отрыва. В соответствии с его результатами местное число Нуссельта растет приблизительно пропорционально местному числу Рейнольдса, что хорошо согласуется

с экспериментальными данными. Другими исследователями показано, что при приближении к области присоединения тепловой поток возрастает. Схема теплопередачи за уступом на осесимметричном теле, предложенная Карлсоном, представлена на фиг. 88.

В соответствии с экспериментальными результатами Блума и Паллоне [94] статическое давление в области отрыва было принято постоянным, что позволило упростить основные дифференциальные уравнения. Выбранная для расчета система координат показана на фиг. 89. Так как давление принято постоянным, разделяющая линия тока прямая.



Фиг. 89. Система координат [93].

Координата x положительна вдоль разделяющей линии тока в направлении от точки отрыва к точке присоединения, координата y отсчитывается в направлении внешней нормали к x. За ось x принята разделяющая линия тока, а не поверхность тела по следующим соображениям.

а) Разделяющая линия тока прямая и $r_0(x)$ может быть представлена простой функцией.

б) Простое представление профилей скорости и энтальпии.

в) Разделяющая линия тока должна остаться прямой для удовлетворения основных допущений, принятых при выборе схемы расчета, даже если исходные дифференциальные уравнения будут преобразованы в другую систему координат. Если бы координата x отсчитывалась вдоль кривой, например вдоль поверхности тела, то разделяющая линия тока искажалась бы при преобразованиях, применяемых в исследовании Карлсона.

Жидкость не втекает и не вытекает из области отрыва через разделяющую линию тока (фиг. 89), поэтому при установившемся течении энергия, переносимая через эту линию тока, равна подводимой к поверхности тела. В дополнение к обычным предположениям теории пограничного слоя Карлсон [93] предположил, что толщина изолированной области отрыва под разделяющей линией тока является величиной того же порядка, что и толщина слоя смешения над этой линией. Основные уравнения:

неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x}(r\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(r\rho v)=0, \tag{66}$$

количества движения

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{67}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{68}$$

энергии

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\frac{\mathrm{Pr}-1}{\mathrm{Pr}}\right) \mu u \frac{\partial u}{\partial y}\right\}, \tag{69}$$

где H — энтальпия торможения.

В расчете принято, что T_w, Pr, c_p, $\rho\mu$ и ρk — постоянные.

5.3.1. Преобразование и решение дифференциальных уравнений

Для сведения уравнений осесимметричного течения газа к уравнениям плоского течения жидкости применим преобразования Манглера и Дородницына. Введем новую переменную Y

$$Y = \frac{1}{\sqrt{\nu_e}} \int_0^{\bar{y}} \frac{\rho}{\rho_e} d\bar{y}. \tag{70}$$

Черта означает плоское течение.

Введем функцию тока $\bar{\psi}$, удовлетворяющую уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} = u, \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{dX} = -\frac{1}{\sqrt{\nu_e}} \frac{\rho}{\rho_e} \bar{v} = -V, \tag{71}$$

где V — составляющая преобразованной скорости, определяемая уравнением (71).

Уравнения количества движения и энергии сводятся к следующим:

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}\, \partial Y} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial Y^2} = \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial Y^3}, \tag{72}$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial H}{\partial Y} = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} + \left(\frac{\mathrm{Pr}-1}{\mathrm{Pr}}\right) \times$$

$$\times \left\{\left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial Y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial Y^3}\right)\right\}. \tag{73}$$

С помощью уравнения (71) уравнения (72) и (73) принимают вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}, \tag{74}$$

$$u \frac{\partial H}{\partial x} + V \frac{\partial H}{\partial Y} = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} + \left(\frac{\mathrm{Pr}-1}{\mathrm{Pr}}\right) \frac{\partial}{\partial Y}\left(u \frac{\partial u}{\partial Y}\right). \tag{75}$$

Уравнения (74) и (75) интегрируются поперек слоя смешения от поверхности тела $Y_0(x)$ до внешней границы слоя смешения $\Delta(x)$. Производная $Y_0(x)$ в рассматриваемой области конечна и непрерывна.

После интегрирования получаются следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$u_e \frac{d\theta}{d\bar{x}} - \frac{\partial u}{\partial Y}\Big|_{Y_0} = 0, \tag{76}$$

$$u_e H_e \frac{\partial \theta_H}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial H}{\partial Y}\Big|_{Y_0} = 0, \tag{77}$$

где θ_H — толщина потери энергии, определяемая уравнением

$$\theta_H = \int_{Y_0}^{\Delta} \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{H}{H_e}\right) dY = (\Delta - Y_0)\, I_{\theta_H}.$$

Индекс e относится к невязкому течению на границе слоя смешения, I_{θ_H} — интеграл потери энергии, Δ — преобразованная координата внешней границы слоя смешения. Уравнение количества движения (76) решается независимо от уравнения энергии. Профиль скорости и для упрощения профиль статической, а не полной энтальпии представляются в виде полиномов

$$\frac{u}{u_e} = \sum_{i=1}^{6} a_i \alpha^i, \tag{78}$$

$$(h - h_w)/(h_e - h_w) = \sum_{i=1}^{5} b_i \alpha^i, \tag{79}$$

где $\alpha = (Y - Y_0)/(\Delta - Y_0)$, а h — статическая энтальпия. Предполагается, что толщина слоя для профилей скорости и энтальпии одна и та же: $\Delta - Y_0$. Из одиннадцати коэффициентов a_1 и b_1 определяются путем решения уравнения количества движения и энергии, остальные девять из граничных условий как функции a_1 и b_1. Так как при $\alpha = 1$, $u = u_e$ и $h = h_e$, то

$$\partial u/\partial Y = \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial Y^3} = 0,$$

$$\partial h/\partial Y = \frac{\partial^2 h}{\partial Y^2} = 0,$$

а из уравнения количества движения и энергии на стенке

$$\alpha = 0,\ a_2 = 0,\ b_2 = \frac{-u_e^2/2}{h_e - h_w} \mathrm{Pr}\, a_1^2.$$

Тогда

$$\frac{u}{u_e}=a_1\alpha+(-a_1+2)\,\alpha^3+5\,(4a_1-9)\,\alpha^4+3\,(-5a_1+12)\,\alpha^5+$$
$$+2\,(2a_1-5)\,\alpha^6, \tag{80}$$

$$\frac{h-h_w}{h_e-h_w}=b_1\alpha+A_1\alpha^2+(-6b_1-3A_1+10)\,\alpha^3+(8b_1+3A_1-$$
$$-15)\,\alpha^4+(-3b_1-A_1+6)\,\alpha^5, \tag{81}$$

где

$$A_1=-\{(u_e^2/2)/(h_e-h_w)\}\,\mathrm{Pr}\,a_1^2.$$

Теперь интегралы потери количества движения и энергии будут следующими:

$$I_\theta=-\frac{1}{117}\,a_1^2+\frac{131}{6006}\,a_1+\frac{100}{1001}, \tag{82}$$

$$I_{\theta_H}=\left(1-\frac{h_w}{h_e}\right)\left(\frac{1}{14}\,a_1+\frac{4}{7}\right)-\left(\frac{h_e-h_w}{H_e}\right)\left(\frac{1}{90}\,a_1b_1+\frac{17}{924}\,a_1+\right.$$
$$\left.+\frac{7}{165}\,b_1+\frac{395}{924}\right)-\frac{u_e^2/2}{H_e}\left\{\left(\frac{535}{470282}-\frac{7}{3960}\,\mathrm{Pr}\right)a_1^3+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2693}{352116}-\frac{\mathrm{Pr}}{120}\right)a_1^2+\frac{54161}{1293292}\,a_1+\frac{135706}{323323}\right\}. \tag{83}$$

Задача сводится к определению трех неизвестных a_1, b_1 и Δ. Так как уравнения количества движения и энергии дают два решения, третье получается из расчетной схемы. В соответствии с предположением, что жидкость не втекает и не вытекает из области отрыва через разделяющую линию тока, из условия сохранения массы имеем

$$\int\limits_{\bar{y}_0}^{0}\rho u\,d\bar{y}=\rho\sqrt{\nu_e}\int\limits_{Y_0}^{0}u\,dy.$$

Теперь безразмерные уравнения количества движения, энергии и неразрывности для области отрыва будут следующими:

$$\mathrm{Re}_\Delta\frac{d}{d\,\mathrm{Re}_{\bar{x}}}(I_\theta\,\mathrm{Re}_\Delta)-a_1=0, \tag{84}$$

$$\mathrm{Re}_\Delta\frac{d}{d\,\mathrm{Re}_{\bar{x}}}(I_{\theta_H}\mathrm{Re}_\Delta)-\frac{h_e-h_w}{(H_e\,\mathrm{Pr})}\,b_1=0, \tag{85}$$

$$\frac{1}{2}\,a_1\,\mathrm{Re}_\Delta^5-\frac{5}{2}\,(a_1-2)\,\mathrm{Re}_\Delta^3\,\mathrm{Re}_{Y_0}^2-(4a_1-9)\,\mathrm{Re}_\Delta^2\mathrm{Re}_{Y_0}^3-$$
$$-\frac{1}{2}\,(5a_1-12)\,\mathrm{Re}_\Delta\,\mathrm{Re}_{Y_0}^4-\frac{2}{7}\,(2a_1-5)\,\mathrm{Re}_{Y_0}^5=0. \tag{86}$$

Эти уравнения нельзя решить до конца, поэтому решаются совместно уравнения (84) и (86) относительно $a_1(\mathrm{Re}_{\bar{x}})$ и $\mathrm{Re}_\Delta(\mathrm{Re}_{\bar{x}})$. После задания формы тела в безразмерном виде $\mathrm{Re}_{Y_0}(\mathrm{Re}_{\bar{x}})$ величина $b_1(\mathrm{Re}_{\bar{x}})$ определяется из уравнения (85).

Местный коэффициент поверхностного трения и число Нуссельта для плоского течения определяются по формулам

$$c_{f_{\bar{x}}} = \frac{2a_1}{\mathrm{Re}_\Delta \sqrt{1+(d\bar{y}_0/dx)^2}}, \tag{87}$$

$$\mathrm{Nu}_{\bar{x}} = \frac{h_e - h_w}{H_e - h_w} \frac{\mathrm{Re}_{\bar{x}}}{\mathrm{Re}_\Delta} \frac{b_1}{\sqrt{1+(d\bar{y}_0/d\bar{x})}}. \tag{88}$$

Наконец, с помощью преобразования Манглера для осесимметричного течения получаем

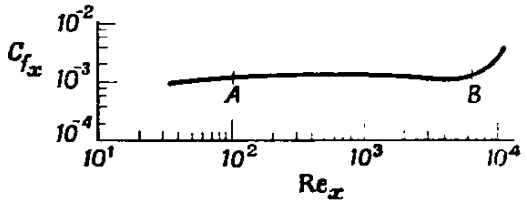
$$c_{f_x} = Lc_{f_{\bar{x}}}, \quad \mathrm{Nu}_x = L\,\mathrm{Nu}_{\bar{x}}, \tag{89}$$

где

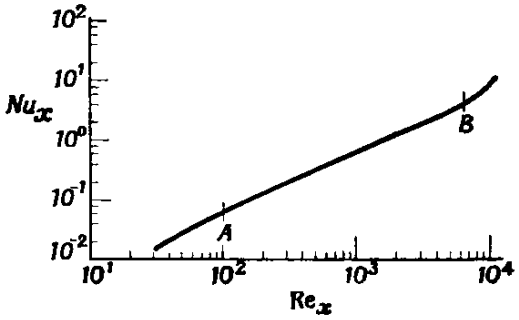
$$L = \left\{3\sin\alpha \frac{(\mathrm{Re}_{R_0} - \mathrm{Re}_x \sin\alpha)^2 \mathrm{Re}_x}{\mathrm{Re}_{R_0}^3 - (\mathrm{Re}_{R_0} - \mathrm{Re}_x \sin\alpha)^3}\right\}^{1/2}$$

и R_0 — радиус тела.

Вычисленные значения c_{f_x} и Nu_x приведены на фиг. 90 и 91. Согласно полученным результатам, в интервале $10^2 < \mathrm{Re}_x < 6{,}5 \cdot 10^4$ величина c_{f_x} практически постоянна, а величина Nu_x



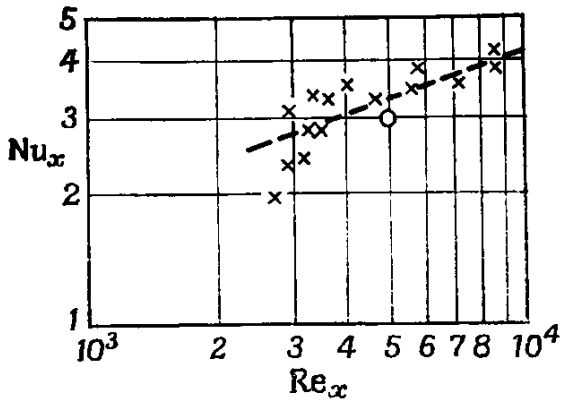
Фиг. 90. Местный коэффициент поверхностного трения в области отрыва [93].



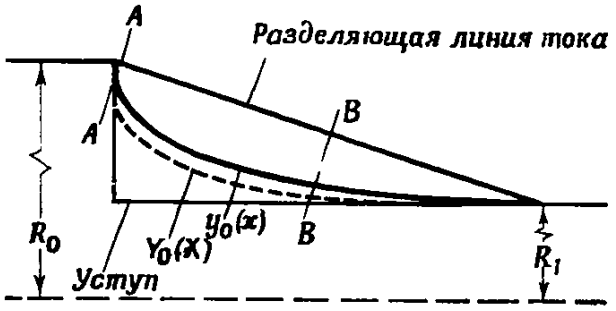
Фиг. 91. Местное число Нуссельта в области отрыва [93].

прямо пропорциональна Re_x, следовательно, тепловой поток постоянен, что согласуется с экспериментами Блума и Паллоне [94]. Из расчетов следует, что теплопередача в области отрыва мала по сравнению с теплопередачей в критической точке и, вероятно, меньше, чем к передней части тела перед отрывом, что объясняется малой плотностью (давлением) за веером волн разрежения, а также небольшим эффектом конвекции вследствие

сравнительно малой скорости течения в области отрыва. Чепмен [95] показал, что при небольших сверхзвуковых скоростях это давление меньше, чем статическое давление в невозмущенном

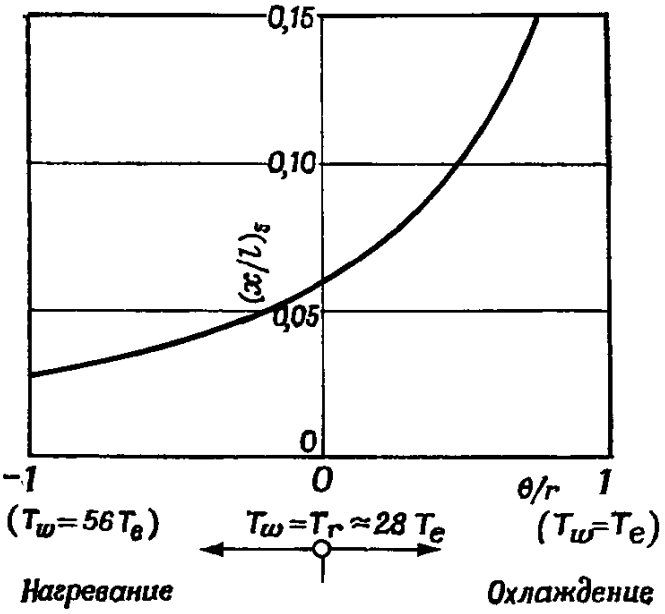


Фиг. 92. Сравнение расчетных и экспериментальных результатов [93].
○ расчет; × эксперимент [83].



Фиг. 93. Контуры области отрыва [93].

потоке. Результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными Пауэрса и др. [83] (фиг. 92). Характеристики



Фиг. 94. Влияние теплопередачи на отрыв турбулентного слоя [96].
$\theta = [(T_r - T_w)/T_e]\,[1/(1/2)(\gamma - 1)\,M_e^2]$; r — коэффициент восстановления.

потока для модели, показанной на фиг. 93, следующие: $M_e = 2{,}57$, $Re/м = 16{,}8 \cdot 10^6$, $Pr = 0{,}7$, $\gamma = 1{,}2$ и $h_e/h_w = 10$.

Наконец, приведем некоторые сведения об отрыве турбулентного слоя. Вальц [96] исследовал влияние теплопередачи на поло-

жение точки отрыва турбулентного слоя для следующего распределения скорости:

$$\frac{u}{u_e} = \frac{M_e^*}{M_\infty^*} = 1 - 10\,(x/l),$$

причем $M_e^* = u_e/a^*$, $M_\infty^* = u_\infty/a^*$, где a^* — критическая скорость звука. Результаты расчетов представлены на фиг. 94. Нагревание приводит к смещению точки отрыва вверх по потоку, охлаждение — вниз по потоку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gadd G. E., Boundary Layer Separation in the Presence of Heat Transfer, AGARD Rept 280, April 1960.
2. Gadd G. E., Attridge J. L., A Note on the Effects of Heat Transfer on the Separation of a laminar Boundary Layer, ARC Current Paper CP, № 509, 1961.
3. Bray K.N.C., Gadd G. E., Woodger M., Some Calculations by the Crocco-Lees and Other Methods of Interactions between Shock Waves and Laminar Boundary Layers including Effects of Heat Transfer and Suctions, ARC Current Paper, CP 556, April 1961.
4. Gadd G. E., Cope W. F., Attridge J. L., Heat-transfer and Skin-friction Measurements at a Mach Number of 2,44 for a Turbulent Boundary Layer on a Flat Surface and in Regions of Separated Flow, ARC R & M 3148, Oct. 1958.
5. Bernard J. J., Siestrunck R., Échanges de chaleur dans les écoulements présentant des décollements, Paper presented at the First International Congress of Aeronautical Sciences, Madrid, Sept. 1958.
6. Chapman D. R., A Theoretical Analysis of Heat Transfer in Regions of Separated Flow, NACA TN 3792, Oct. 1956.
7. Naysmith A., Heat Transfer and Boundary-layer Measurements in a Region of Supersonic Flow Separation and Reattachment, ARC 20, 601, May 1958.
8. Richardson P. D., Estimation of the Heat Transfer from the Rear of an Immersed Body to the Region of Separated Flow, ARL 62 423, Brown University, Jan. 1960.
9. Sogin H. H., Burkhard K., Richardson P. D., Heat Transfer in Separated Flow, Part I: Preliminary Experiments on Heat Transfer from an Infinite Bluff Plate to an Air Stream, ARL 4, Brown University, Jan. 1961.
10. Ryan L. F., Experiments on Aerodynamic Cooling, Mitt. Inst. Aerodyn. Zürich, № 18, Federal Institute of Technology, 1957.
11. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, под ред. С. Гольдштейна, ИЛ, М., 1948.
12. Мак Адамс В. Х., Теплоотдача, Металлургиздат, М., 1961.
13. Kreith F., Principles of Heat Transfer, second ed., International Text Book Co., Scranton, Pa., 1959.
14. Paltz S., Drew T. B., Ryan W. P., The Mechanism of Heat Transmission: Distribution of Heat Flow about the Circumference of a Pipe in a Stream of Fluid, I, *Trans. Am. Inst. Chem. Eng.*, **26**, 118 (1931).
15. Fage A., Falkner V. M., On the Relation between Heat Transfer and Surface Friction for Laminar Flow, ARC R & M 1408, 1931.
16. Small J., The Average and Local Rates of Heat Transfer from the Surface of a Hot Cylinder in a Transverse Stream of Fluid, *Phil. Mag.*, Ser. 7, **49**, 251 (1935).

17. Z a p p G. M., Jr., The Effect of Turbulence on Local Heat Transfer Coefficients Around a Cylinder Normal to an Air Stream, MS thesis, Oregon State College, June 1950.
18. S e b a n R. A., L e v y A. M., The Effect of a Downstream Splitter Plate on the Heat Transfer from a Circular Cylinder Normal to an Air Stream, WADC Tech. Rept 57-479, ASTIA Document № AD 155765, Aug. 1957.
19. К р у ж и л и н Г. Н., Теплоотдача круглого цилиндра в поперечном потоке воздуха в интервале значений числа Рейнольдса от 6000 до 425 000, *ЖТФ*, VIII, вып. 2, стр. 123 (1939).
20. S c h m i d t E., W e n n e r K., Wärmeabgabe eines geheitzten Zylinders, *Forsch. Geb. Ing. Wes.*, **12**, 651—673 (1941); также Heat Transfer over the Circumference of a Heated Cylinder in Transverse Flow, NACA TM 1050, Oct. 1943.
21. G i e d t W. H., Investigation of Variation of Point Unit Heat-transfer Coefficient Around a Cylinder Normal to an Air Stream, *Trans. ASME*, **71**, 375—381 (May 1949).
22. G i e d t W. H., Effect of Turbulent Level of Incident Air Stream on Local Heat Transfer and Skin Friction on a Cylinder, *J. Aeronaut. Sci.*, **18**, № 11, 725—730 (Nov. 1951).
23. K e s t i n J., M a e d e r P. F., Influence Turbulence on Transfer of Heat from Cylinders, NACA TN 4018, Oct. 1957.
24. E c k e r t E.R.G., S o e h n g e n, Distribution of Heat-transfer Coefficients Around Circular Cylinders Cross Flow at Reynolds Numbers from 20 to 500, *Trans. ASME*, **74**, 343—347 (April 1952).
25. М а к А д а м с В. Х., Теплоотдача, Металлургиздат, М., 1961, стр. 364.
26. K n u d s e n J. G., K a t z D. L., Fluid Dynamics and Heat Transfer, McGraw-Hill, N. Y., 1958, p. 323—332.
27. W a l l i s R. P., Photographic Study of Fluid Flow Between Banks of Tubes, *Engineering*, 148, № 3848, 423—425 (Oct. 1939).
28. K l e i n V., Bestimmung der örtlichen Wärmeübergangszahl an Rohren im Kreuzstrom durch Abschmelzversuche, *Arch. Wärmew. Dampfk. Wes.*, **15**, 150 (1934).
29. S m a l l J., The Average and Local Rates of Heat Transfer from the Surface of a Hot Cylinder in a Transverse Stream of Fluid, *Phil. Mag.*, Ser. 7, **19**, 251 (1935).
30. B e r g e l i n O. P., B r o w n G. A., D o b e r s t e i n S. C., Heat Transfer and Fluid Friction During Flow Across Banks of Tubes, *Trans. ASME*, **74**, 953—960 (Aug. 1952).
31. C a r y J. R., The Determination of Local Forced-convection Coefficients for Spheres, *Trans. ASME*, **75**, № 4, 483—487 (May 1953).
32. Ш л и х т и н г Г., Теория пограничного слоя, ИЛ, М., 1956.
33. F l a c h s b a r t O., Neue Untersuchungen über den Luftwiderstand von Kugeln, *Phys. Z.*, 28, 461—469 (1927); также Recent Researches on the Air Resistance of Spheres, NACA TM 495.
34. T o m o t i k a S., The Laminar Boundary Layer on the Surface of a Sphere in a Uniform Stream, ARC R & M, № 1678, 1936.
35. S e b a n R. A., D o u g h e r t y D., Heat Transfer to Laminar and Turbulent Boundary Layers with Constant and Variable Free Stream Velocity, *Univ. of Calif., Inst. of Eng. Res.*, Ser. 41, Issue 13 (1954); также *Trans. ASME*, **78**, № 1 (1956).
36. S e b a n R. A., Heat Transfer and Flow with Separated and Reattached Boundary Layers as Produced by Surface Irregularities, Wright Air Development Center Tech. Rept, 56-217, ASTIA Document № AD 110447, May 1956.
37. S e b a n R. A., E m e r y A., L e v y A., Heat Transfer to Separated and Reattachment Subsonic Turbulent Flows Obtained Downstream of a Surface Step., *J. Aerospace Sci.*, 809—814 (Dec. 1959).

38. Arie M., Rouse M., Experiments on Two-dimensional Flow Over a Normal Wall, *J. Fluid Mech.*, **1** (July 1956).
39. Hsu H., Characteristics of Mean Flow and Turbulence at an Abrupt Two-dimensional Expansion (докторская диссертация), State University of Iowa, 1950.
40. Klebanoff P. S., Diehl R. W., Some Features of Artificially Thickened Fully Developed Turbulent Boundary Layers with Zero Pressure Gradient, NACA TN 2475, 1951.
41. Morduchow M., Grape R. G., Separation, Stability, and Other Properties of Compressible Laminar Boundary Layer with Pressure Gradient and Heat Transfer, NACA TN 3296, May 1955.
42. Libby P. A., Method for Calculation of Compressible Laminar Boundary Layer with Axial Pressure Gradient and Heat Transfer, NACA TN 3157, Jan. 1954.
43. Morduchow M., Clarke J. H., Method for Calculation of Compressible Laminar Boundary Layer Characteristics in Axial Pressure Gradient with Zero Heat Transfer, NACA TN 2784, Sept. 1952.
44. Illingworth C. R., The Effect of Heat Transfer on the Separation of a Compressible Laminar Boundary Layer, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, VII, Oxford, Clarendon Press (1954).
45. Howarth L., On the Solution of Laminar Boundary Layer Equations, *Proc. Roy. Soc.* (*London*), A, **164**, 547—549 (1938).
46. Stewartson K., Correlated Incompressible and Compressible Boundary Layers, *Proc. Roy. Soc.* (*London*), A, 200, № 1060, 84—100 (Dec. 1949).
47. Hiemenz K., Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder (диссертация, Göttingen), *Dinglers Polytech. J.*, **326**, 32 (1911).
48. Gadd G. E., The Numerical Integration of the Laminar Compressible Boundary Layer Equations, with Special Reference to the Position of Separation when the Wall is Cooled, ARC, CP 312, 1957.
49. Lankford J. L., Investigation of the Flow over an Axisymmetric Compression Surface at High Mach Numbers, US Naval Ordnance Laboratory Rept, 6866, April 1960.
50. Lankford J. L., The Effect of Heat Transfer on the Separation of Laminar Flow Over Axisymmetric Compression Surfaces; Preliminary Results at Mach Number 6.78, US Naval Ordnance Laboratory Rept, 7402, March 1961; NOL Preprint, Oct. 1961.
51. Beckwith I. E., Gallagher J. J., Heat Transfer and Recovery Temperature on a Sphere with Laminar, Transitional and Turbulent Boundary Layers at Mach Numbers of 2.00 and 4.15, NACA TN 4125, Dec 1957.
52. Francis W. L., Davey W. T., Base Heating Experiments on Slender Cones in Hypersonic Flow, IAS Paper № 62—179, presented at the IAS National Summer Meeting, Los Angeles, California, June 1962.
53. Thomann H., Measurements of Heat Transfer and Recovery Temperature in Regions of Separated Flow at a Mach Number of 1.8, Flygtekniska Försökanstalten, Stockholm, Rept 82, 1959.
54. Cavén G. R., Measurements of the Heat Transfer Coefficients on a Forward-facing Step at a Mach Number of 1.8, Flygtekniska Försökanstalten, Stockholm, Rept SE, 75 : 3, 1960.
55. Charwat A. F., Dewey C. F., Roos J. N., Hitz J. A., An Investigation of Separated Flows, Part II: Flow in the Cavity and Heat Transfer, *J. Aerospace Sci.*, **28**, № 7, 513—527 (July 1961).
56. Brinich P. F., Recovery Temperature and Heat Transfer Near Two-dimensional Roughness Elements at Mach 3.1, NACA TN 4213, 1958.
57. Naysmith A., Heat Transfer and Boundary Layer Measurements in a Region of Supersonic Flow Separation and Reattachment, Royal Aircraft Establishment, Tech. Note Aero. 2558, May 1958.

58. Naysmith A., Measurements of Heat Transfer in Bubbles of Separated Flow in Supersonic Air Streams, Royal Aircraft Establishment, Tech. Memo Aero. 709, Feb. 1961.
59. McConnell D. G., Free-flight Observation of a Separated Turbulent Flow Including Heat Transfer up to Mach 8,5, NACA D-278, Oct. 1961.
60. Eckert E. R. G., Engineering Relations for Friction and Heat Transfer to Surface in High Velocity Flow, *J. Aeronaut. Sci.*, 22, № 8 (Aug. 1955).
61. Larson H. K., Heat Transfer in Separated Flows, *J. Aerospace Sci.*, 731—738 (Nov. 1959).
62. Becker J. V., Korycinski P. F., Heat Transfer and Pressure Distribution at Mach Number of 6.8 on Bodies with Conical Flares and Extensive Flow Separation, NACA RM L56F22, 1956.
63. Ferguson H., Schaefer J. W., Heat Transfer and Pressure Distribution on Cone-cylinder Flare Configuration with Boundary Layer Separation, NASA TN D-1436, 1962.
64. Roshko E., Simplified Method for Estimating Compressible Laminar Heat Transfer with Pressure Gradient, NACA TN 3888, 1956.
65. Roshko E., Tucker, M., Approximation Calculation of the Compressible Turbulent Boundary Layer with Heat Transfer and Arbitrary Pressure Gradient, NACA TN 4154, 1957.
66. Jack J. R., Wisniewski R. J., Diaconis N. S., Effects of Extensive Surface Cooling on Boundary Layer Transition, NACA TN 4094, Oct. 1957.
67. Diaconis N. S., Wisniewski R. J., Jack J. R., Heat Transfer and Boundary Layer Transition on Two Blunt Bodies at Mach Number 3.12, NACA TN 4099, Oct. 1957.
68. Czarnecki K. R., Sinclair A. R., A Note on the Effect of Heat Transfer on Peak Pressure Rise Associated with Separation of Turbulent Boundary Layer on a Body of Revolution (NACA RM-10) at a Mach Number of 1.61, NACA TN 3997, April 1957.
69. Green L., Jr., Nall K. L., Experiments on Porous-wall Cooling and Flow Separation Control in a Supersonic Nozzle, *J. Aerospace Sci.*, 26, № 11, 689—699 (Nov. 1959).
70. Bloom M. H., Pallone A., Heat Transfer to Surface in the Neighborhood of Protuberances in Hypersonic Flows, Proc. 1957 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute (held at California Institute of Technology on June 1957), 249—278.
71. Thomann H., Measurements of Heat Transfer Recovery, Temperature and Pressure Distribution of Delta Wings at $M = 3$, Flygtekniska Försökanstalten (the Aeronautical Research Institute of Sweden), Rept 93, Dec. 1963.
72. Stainback P. C., Heat-transfer Measurements at a Mach Number of 4.95 on Two 60° Swept Delta Wings with Blunt Leading Edges and Dihedral Angles of 0° and 45°, NASA TN 549, 1961.
73. Gunn C. G., Heat-transfer Measurements on the Apexes of Two 60° Sweptback Delta Wings (Panel Semiapex Angle of 30°) having 0° and 45° Dihedral at a Mach Number of 4.95, NASA TN 550, 1961.
74. O'Neal R. L., Bond A. C., Heat Transfer to 0° and 75° Swept Blunt Leading Edges in Free Flight at Mach Numbers from 1.90 to 3.07, NASA TN D-1256, 1962.
75. Stalder J. R., Nielsen H. V., Heat Transfer from a Hemisphere Cylinder Equipped with Flow-separation Spikes, NACA TN 3287, Sept. 1954.
76. Eggers A. J., Hermach C. A., Initial Experiments on the Aerodynamic Cooling Associated with Large-scale Vortical Motions in Supersonic Flow, NACA RMA54L13, March 1955.
77. Bogdonoff S. M., Vas I. E., Preliminary Investigation of Spiked Bodies at Hypersonic Speeds, *J. Aerospace Sci.* (Feb. 1959); Heat

Transfer and Fluid Mechanics Institute, 1958, and Princeton University, Aero. Eng. Dept. Rept 412, March 1958.
78. Crawford D. H., Investigation of the Flow Over a Spiked-nose Hemisphere-cylinder at a Mach Number of 6.8, NASA TN D-118, Dec. 1959.
79. Wood C. J., A Study of Hypersonic Separated Flows, doctoral thesis, University of London, Oct. 1961.
80. Fage A., Experiments on a Sphere at Critical Reynolds Numbers, ARC R & M, № 1766, 1937.
81. Stine H. A., Wanlass K., Theoretical and Experimental Investigation of Aerodynamic Heating and Isothermal Heat-transfer Parameters on a Hemispherical Nose with Laminar Boundary Layers at Supersonic Mach Numbers, NACA TN 3344, 1954.
82. Cohen N. B., A Method for Computing Turbulent Heat Transfer in the Presence of Streamwise Pressure Gradient for Bodies of High-speed Flow, NASA Memo. 1-2-592, 1959.
83. Powers W. E., Stetson K. F., Adams M. C., A Shock Tube Investigation of Heat Transfer in the Wake of a Hemisphere Cylinder with Application to Hypersonic Flight, AVCO Research Laboratory, Rept 30, Aug. 1958.
84. Rabinowicz J., Measurements of Turbulent Heat Transfer Rates on the Aftportion and Blunt Bodies of Hemisphere Cylinder in the Shock Tube, GALCIT Hypersonic Research Project Memo. 41, 1957.
85. Chung P. M., Viegas J. R., Heat Transfer at the Reattachment Zone of Separated Laminar Boundary Layers, NASA TN D-1072, Sept. 1961.
86. Lees L., Laminar Heat Transfer Over Blunt-nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds, *Jet Propulsion*, **26**, № 4, 259—269, 274 (April 1956).
87. Chapman D. R., Kuehn D. M., Larson H. K., Investigation of Separated Flows in Supersonic and Subsonic Streams with Emphasis on the Effect of Transition, NACA TN 3869, 1957.
88. Николь, Исследование ламинарного гиперзвукового течения в выемке, *Ракетная техника и космонавтика*, № 9, стр. 21 (1964).
89. Chapman D. R., Laminar Mixing of a Compressible Fluid, NACA Rept 958, 1950.
90. Chapman D. R., Rubesin M. W., Temperature and Velocity Profiles in the Compressible Laminar Boundary Layer with Arbitrary Distribution of Surface Temperature, *J. Aeronaut. Sci.*, **16**, № 9, 547—565 (Sept. 1949).
91. Bloom M., Boundary Layers with Variable Heat Capacity on Nonisothermal Surfaces, *J. Aeronaut. Sci.*, **20**, № 10, 719 (Oct. 1953).
92. Curle N., The Effects of Heat Transfer on Laminar Boundary Layer Separation in Supersonic Flow, ARC TM 2956, May 1960.
93. Carlson W. O., Heat Transfer in Laminar Separated and Wake Flow Regions, Paper presented at 1959 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute held at University of California, Los Angeles, Stanford University Press, Stanford, California, June 1959, p. 140—155.
94. Bloom M. H., Pallone A., Shroud Tests of Pressure and Heat Transfer Over Short Afterbodies with Separated Wakes, WADC TN 58-185, Polytechnic Institute of Brooklyn, June 1958.
95. Chapman D. R., An Analysis of Base Pressure at Supersonic Velocities and Comparison with Experiment, NACA TR 1051, 1951.
96. Walz A., Beitrag zur Näherungstheorie kompressibler turbulenter Grenzschichten, DVL Rept, № 84, 1959.

БИБЛИОГРАФИЯ

Batchelor G. K., Heat Transfer by Free Convection across a Closed Cavity between Vertical Boundaries at Different Temperatures, *Quart. Appl. Math.*, **12**, № 3, 209—233 (Oct. 1954).

Burchfield C. G., Hube F. K., Burdette J. E., An Experimental Heat-transfer Investigation in Regions of Flow Separation at Mach Number 8, Tech. Documentary Rept № AEDC-TDR-64-30, Feb. 1964.
Carlson W. O., A Solution for Heat Transfer in Laminar Separated and Wake Flow Regions, R59SD356, ASTIA, 1959.
Chang P. K., Nottage H. B., Prediction of Local Skin-friction Coefficient by Transformation of the Compressible Boundary Layer with Heat Transfer, *J. Franklin Inst.*, 271, № 6 (June 1961).
Cole D., Brainerd J. J., Slender Wings at High Angles of Attack in Hypersonic Flow, American Rocket Society, Air Force Office of Scientific Research, International Hypersonics Conf., Aug. 1961, MIT.
Fand R. M., Roos J., Cheng P., Kaye J., The Local Heat-transfer Coefficient Around a Heated Horizontal Cylinder in an Intense Sound Field, ASME Paper № 61-WA-172.
Filetti E. G., Experimental Investigation of Heat Transfer in the Stall Region Behind a Double Backward Facing Step (диссертация), Nov. 1965.
Fox J., Heat Transfer and Air Flow in a Transverse Rectangular Notch, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 8, № 2, 269—279 (Feb. 1965).
Furey R. J., Heat Transfer in Regions of Separated Flow Induced by Surface Cavities (диссертация), May 1962.
Gadd G. E., An Experimental Investigation of Heat Transfer Effects on Boundary Layer Separation in Supersonic Flow, *J. Fluid Mech.*, 2, 105—122 (1957).
Holloway P. F., Sterrett J. R., Creekmore H. S., An Investigation of Heat Transfer Within Regions of Separated Flow at a Mach Number of 6.0, NASA TN D-3074, Nov. 1965.
Kaufman L. G., II, Meckler L., Pressure and Heat Transfer Measurements at Mach 5 and 8 for Fin-flat Plate Model, Flight Control Lab., Aeronautical Systems Div., Tech. Documentary Rept № ASD-TDR-63-235, April 1963.
Korst H. H., Dynamics and Thermodynamics of Separated-Flows, Paper presented at the Symposium on Single- and Multi-component Flow Processes, Rutgers Engineering Contennial, New Brunswick, NJ, May 1964.
Kuehn D. M., Monson D. J., Attached and Separated Boundary Layers on Highly Cooled, Ablating and Nonablating Models at M=13.8, NASA Tech. Note D-4041, June 1967.
Lankford J. L., Effects of Heat Transfer on Laminar Separation on Axisymmetric Compression Surfaces in Hypersonic Flow, US Naval Ordnance Lab., Silver Spring. Md.
Nicoll K. M., An Experimental Investigation of Laminar Hypersonic Cavity Flows, Part II: Heat-transfer and Recovery Factor Measurements, Aerospace Research Labs., ARL 63—73, Part II, Jan. 1964.
Николь, Применение нестационарного метода «тонкой стенки» для измерения тепловых потоков в гиперзвуковых течениях с отрывом, *Ракетная техника и космонавтика*, № 4 (1963).
Savage S.G.B., The Effect of Heat Transfer on Separation of Laminar Compressible Boundary Layers, Firestone Flight Sciences, Lab., Separated Flows Project, Tech. Rept № 2, June 1962.
Smith C. G., Heat-flux Distribution Over Hemispherical Nosed Bodies in Hypersonic Flight, *J. Aerospace Sci.*, 69—71 (Jan. 1961).
Sulzmann K.G.P., Radiation Overshoots Caused by Temperature Decreases in the Wake of Reentry Vehicles, Space Science Lab., General Dynamics Astronautics, AE62-0814, Sept. 1962.

Глава XII

УПРАВЛЕНИЕ ОТРЫВОМ ПОТОКА

Обозначения

b — ширина пластины;
C_m — коэффициент продольного момента;
C_Q — объемный коэффициент расхода;
C_μ — коэффициент импульса;
E — эффективность диффузора;
h — удельная энтальпия;
$K = \int\limits_0^A qu\, dA$;
$k = \Delta p/q$;
l — длина пластины; длина свободного слоя смешения;
$m = \beta_0/(2 - \beta_0)$;
$P = \int\limits_0^A pu\, dA$;
Δp — перепад статического давления на перегородке;
Q — количество отсасываемой жидкости;
q_m — расход вдуваемой массы;
R — радиус цилиндра;
r — коэффициент восстановления;
S — коэффициент;
V_j — скорость струи;
v_0 — скорость отсоса;
β — коэффициент формы передней кромки;
Γ — циркуляция;
$\zeta = \psi\sqrt{x}$ — толщина потери импульса пограничного слоя;
$\lambda = (\delta^2/\nu)\,(du_e/dx)$;
σ — коэффициент.

Индексы

aw — теплоизолированная стенка;
L — длина;
s — отсос;
t — полное значение параметра;
w — стенка или след;
$*$ — преобразованный параметр;
1, 2 — сечения диффузора.

Управление отрывом потока производится с целью повышения эффективности или усовершенствования характеристик летательных аппаратов и машин. Описание многочисленных практических приложений выходит за рамки данной главы. Автор собирается посвятить проблеме управления отрывом потока отдельную монографию. Здесь предпринята попытка рассмотреть основные принципы управления отрывом и соответствующие примеры. Управление отрывом возможно либо в виде предотвращения или замедления начала отрыва с ликвидацией или уменьшением областей отрывного течения, либо в виде принудительного создания местного отрыва потока с использованием характеристик отрывного течения.

1. ПРЕДОТВРАЩЕНИЕ ИЛИ ЗАМЕДЛЕНИЕ ОТРЫВА ПОТОКА

Так как двумя факторами, определяющими отрыв потока, являются положительный градиент давления и вязкость, отрывом можно управлять путем изменения или сохранения структуры вязкого течения, чтобы эти два определяющих фактора предотвращали или замедляли отрыв. Существуют два метода управления: требующий и не требующий подвода энергии. Например, отрывом можно управлять путем соответствующего выбора формы поверхности тела. С другой стороны, для предотвращения отрыва можно применить отсасывание пограничного слоя.

1.1. ПРЕДОТВРАЩЕНИЕ ИЛИ ЗАМЕДЛЕНИЕ ОТРЫВА ПУТЕМ ВЫБОРА ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

Под формой поверхности тела здесь подразумевается не только форма поверхности основного тела, но и такие средства, как щели, генераторы вихрей, утолщение передней кромки, вырезы и т. д., соответствующим образом расположенные на основном теле. Чтобы управлять отрывом потока путем выбора формы основного тела, необходимо знать методы расчета распределения давления потенциального течения, пограничного слоя, а также критерий отрыва. Для трехмерных тел, с которыми приходится иметь дело на практике, не всегда имеются такие методы расчета, так что если выбор формы основного тела не обеспечивает управления отрывом, применяются дополнительные изменения формы, такие, как щели, генераторы вихрей и т. д.

В прошлом было достаточно широко исследовано теоретически обтекание крыльев. Недавно Линдфельд и др. [1] опубликовали приближенный метод расчета трехмерного пограничного слоя на крыльях. Боллей [2] выполнил строгое исследование обтекания прямоугольной пластины при дозвуковых скоростях с отрывом от боковых кромок; он решил интегральное уравнение для

нагрузки и вычислил нормальную силу и угол схода вихрей, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными до угла атаки 40°. Эта теория применима для малых удлинений и больших углов атаки. Герстен распространил расчет на прямоугольное крыло в сжимаемой среде [3, 4] и получил хорошее соответствие результатов при умеренных углах атаки. Ченг выполнил расчет для прямоугольной пластины со сходом вихрей при сверхзвуковых скоростях [5].

Расчет обтекания треугольных крыльев малого удлинения с отрывом потока, включая стреловидные крылья при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях, приводится в работах [6—15]. Эти методы расчета являются приближенными и основаны на линейной теории; влияние угла атаки, кривизны, толщины рассчитываются в отдельности и затем суммируются. Несмотря на большой угол схода вихрей, при соответствующем его выборе расчетные значения нормальной составляющей силы и положение центра давления для треугольных крыльев с удлинением 1—4 хорошо согласуются с экспериментом.

Спенглер и др. [16] вычислили нагрузку, действующую на корпус высокоскоростной подводной лодки при отрывном его обтекании вследствие большого угла атаки.

На основании допущений теории тонкого тела установившееся трехмерное вихревое течение у подветренной стороны тела под углом атаки заменяется неустановившимся двумерным вихревым течением.

1.1.1. Управление отрывом на крыловых профилях и крыльях при дозвуковых скоростях

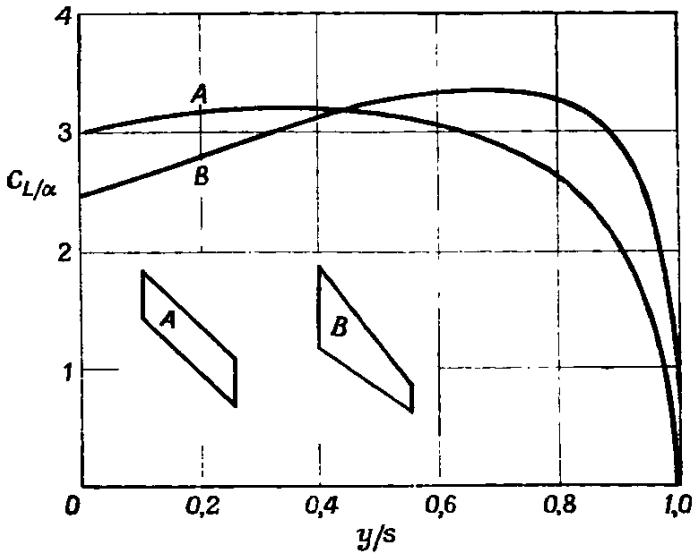
В случае прямого крыла большого удлинения, распределение давления на котором зависит от толщины, кривизны и угла атаки, может быть с успехом применена теория двумерного течения с соответствующим критерием отрыва. При малых углах атаки положительный градиент давления на верхней стороне обычно умеренный и распространяется на $^2/_3$ хорды от задней кромки, поэтому отрыв возможен около задней кромки. Следует ожидать, однако, раннего отрыва. Хороший обзор проблемы управления потоком на дозвуковых крыльях сделан Куком и Бребнером [17].

В большинстве практических случаев толщина крыльев большого удлинения достигает более 10% длины хорды. Отрыв на таких крыльях имеет место только в концевой части, где пограничный слой турбулентный. Если удлинение прямого крыла мало и не превышает 4, а толщина профиля составляет около 4% длины хорды, то при большой дозвуковой скорости отрыв ламинарного пограничного слоя происходит у передней кромки при малой величине C_L. Поэтому, если поток не присоединяется с образованием «пузыря»,

для обеспечения требуемых характеристик при больших скоростях необходимо устранить отрыв. Для управления отрывом вместо изменения формы сечения крыла можно использовать носовой щиток, при этом пик разрежения у передней кромки смещается вниз по потоку к шарниру щитка и градиент давления уменьшается.

В случае умеренно стреловидного крыла течение трехмерное. Распределение коэффициента подъемной силы по размаху такого крыла представлено на фиг. 1.

Если форма профилей незакрученного стреловидного крыла постоянна по размаху, то распределение давления изменяется



Фиг. 1. Распределение C_L по размаху двух стреловидных крыльев [17]. Удлинение 3, угол стреловидности по линии середины хорд 45°.

от центрального к концевому сечениям, так как величина пика разрежения зависит не только от угла стреловидности, но и от изменения C_L по размаху. Большое значение C_L на внешней части суживающегося к концу крыла вместе с изменением вдоль размаха распределения нагрузки по хорде делают особенно вероятным отрыв на внешних частях суживающихся крыльев. Таким образом, попытки модификации формы должны быть направлены на уменьшение пика разрежения, что связано с изменениями формы в плане и нарастанием положительной кривизны от середины полуразмаха к концу крыла. Другая попытка получить тот же прирост подъемной силы в центральной области путем увеличения отрицательной кривизны в направлении к центру может привести к увеличению разрежения вблизи передней кромки без отрыва. Влиянию стреловидности на распределение давления, обусловленное толщиной, также можно противодействовать, изменяя толщину по размаху. Положение максимальной толщины должно быть сдвинуто по хорде вперед в центральной

и назад в концевой части крыла, чтобы распределение давления и нагрузки было одинаковым во всех сечениях при расчетном значении C_L.

Если местные значения C_L во всех сечениях между центральной частью и концом крыла одинаковы, то одинаковы и распределения давления и нагрузки по хорде. Хотя распределение кривизны или крутки удовлетворяет заданным требованиям только при одном значении C_L, модификация формы в плане теоретически эффективна для всех значений C_L. Так как отрыв может произойти на всем крыле одновременно, если только форма центрального сечения крыла не изменена, чтобы обеспечить меньший пик разрежения, отрыв нельзя задержать. Соответствующие модификации формы других сечений по размаху привели бы к дальнейшим изменениям в распределении кривизны и крутки, так как свойства заданной средней линии профилей изменяются вдоль размаха стреловидного крыла [15]. С учетом поведения пограничного слоя оптимальную форму будет иметь крыловой профиль с увеличенным участком хорды, на котором градиент давления отрицателен, и уменьшенным участком хорды, на котором градиент давления положителен. Путем увеличения радиуса скругления передней кромки можно получить большой благоприятный градиент давления на первых нескольких процентах хорды профиля и избежать отрыва, максимально сократив участок с положительным градиентом давления, на котором напряжение трения равно нулю или близко к нулевому значению; можно избежать также перехода и получить наиболее эффективный профиль для заданных условий [18]. Вортман снизил сопротивление на 20% по сравнению с существующими профилями с малым сопротивлением [19].

Близкое к нулю напряжение трения означает, что пограничный слой, оставаясь присоединенным к поверхности, находится на грани отрыва. Так как конвективная теплоотдача тесно связана с поверхностным трением, в этих условиях можно ожидать очень низкого теплового потока из пограничного слоя. Создавая такой специфический пограничный слой в устройствах типа диффузора, можно при заданном начальном пограничном слое и заданном коэффициенте восстановления давления максимально сократить длину диффузора. Стрэтфорд спроектировал диффузор аэродинамической трубы с контуром, удовлетворяющим условию нулевого напряжения трения [18]. Как уже упоминалось в гл. IX, форма передней кромки крылового профиля очень важна: так, благодаря отгибу вниз носка можно предотвратить или затянуть отрыв ламинарного слоя от передней кромки при соответствующем отклонении закрылка. Если предотвращение или затягивание отрыва является главной целью, то желателен переход ламинарного течения в турбулентное, так как турбулентный

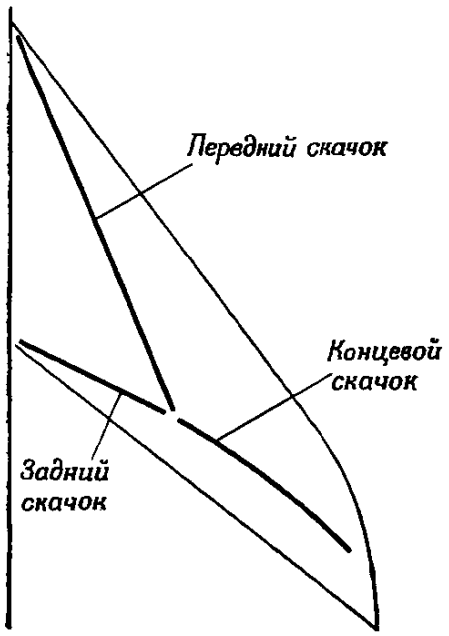
поток легче преодолевает положительный градиент давления, хотя трение при турбулентном режиме больше, чем при ламинарном. При сверхзвуковых скоростях попытка снижения сопротивления трения путем управления пограничным слоем может привести к преждевременному отрыву, вызываемому скачком уплотнения, так что при некоторых условиях предотвращение отрыва может оказаться более важным, чем сохранение ламинарного слоя.

1.1.2. Управление отрывом на крыловых профилях и крыльях при сверхзвуковых скоростях

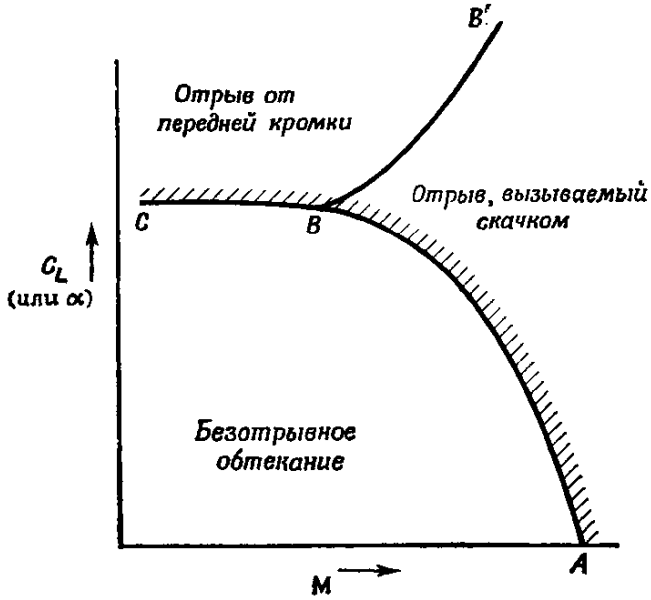
Подробные исследования отрыва на сверхзвуковом крыле провел Пирси [20]. С точки зрения отрыва на крыле, вызываемого скачком уплотнения, основной характеристикой формы сечения является изменение наклона верхней поверхности. Для определения начала отрыва при больших числах Маха очень важна также форма задней кромки. Часто отрыв возникает сначала на части размаха вследствие большой локальной нагрузки, и его развитие может быть задержано модификацией формы в плане, приводящей к снижению пиков нагрузки, например изменением формы передней кромки. Причиной отрыва, вызванного скачками, часто является интерференция полей течения от соседних поверхностей. Скачок от передней кромки крыла может вызвать отрыв пограничного слоя на фюзеляже, а этот отрыв в свою очередь может привести к появлению вихрей, возмущающих поле течения около крыла. Система скачков уплотнения на стреловидном крыле довольно сложна (фиг. 2): она состоит из переднего, заднего и концевого скачков, причем последний образуется не на всех крыльях. На внешней части крыла преобладает течение, близкое к обтеканию крыла с углом скольжения и, по-видимому, прежде всего появляется отрыв, связанный с концевым скачком. Два внутренних скачка (передний и задний) являются трехмерными и не так важны для крыльев умеренных удлинений при расчетном режиме, но они важны для нестреловидных крыльев малых удлинений, работающих при достаточно больших коэффициентах подъемной силы. На эти два внутренних скачка сильное влияние оказывает обтекание корневой части крыла; частично это влияние передается концевому скачку через точку пересечения. Поэтому изменение геометрии в окрестности корневой части крыла, например формы фюзеляжа, является мощным средством улучшения обтекания больших участков крыльев.

Границей отрыва, вызываемого скачками уплотнения, является кривая AB (фиг. 3). В точке A, соответствующей нулевой подъемной силе, скачок расположен у задней кромки, в точке B он сдвинут к передней кромке. Точка B смещена влево, чтобы ука-

зать возникновение отрывов, типичных для малых скоростей. Линия BB' отделяет отрыв на передней кромке от отрыва, вызываемого скачком. Для предотвращения отрыва, вызываемого скачком, необходимо сдвинуть границу AB вверх и вправо с целью расширения диапазона условий полета. Малые удлинения и стре-



Ф и г. 2. Типичная система скачков уплотнения на стреловидном крыле [20].



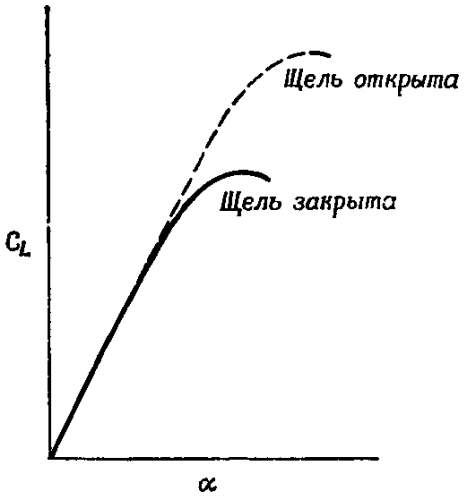
Ф и г. 3. Границы отрывов различных видов [20].

ловидность являются мощными средствами предотвращения отрыва, вызываемого скачком. Малое удлинение уменьшает сближение линий тока в области местной скорости звука и замедляет развитие областей сверхзвукового течения на поверхности крыла. Стреловидность смягчает влияние скачков уплотнения вследствие уменьшения составляющей скорости, нормальной к изобарам на крыле, и замедляет появление отрыва [20].

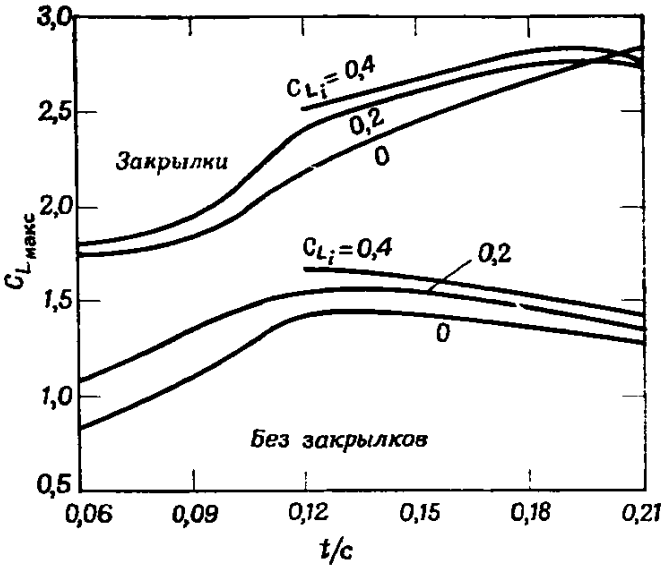
1.2. ПРЕДОТВРАЩЕНИЕ ИЛИ ЗАМЕДЛЕНИЕ ОТРЫВА С ПОМОЩЬЮ ЩЕЛЕЙ, ГЕНЕРАТОРОВ ВИХРЕЙ, ВЫРЕЗОВ И ДРУГИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ

1.2.1. Щели

Щелевое крыло, предложенное независимо Хендли — Пейджем и Лахманом, позволяет повысить энергию течения за счет вдува воздуха через щель и является мощным средством предотвращения потери устойчивости полета, входа в штопор. Щель на передней части крыла снижает пик разрежения, и нарастание пограничного слоя становится незначительным. В результате расширяется рабочий интервал углов атаки, и при дозвуковых скоростях полета и больших углах атаки достигается большой коэффи-

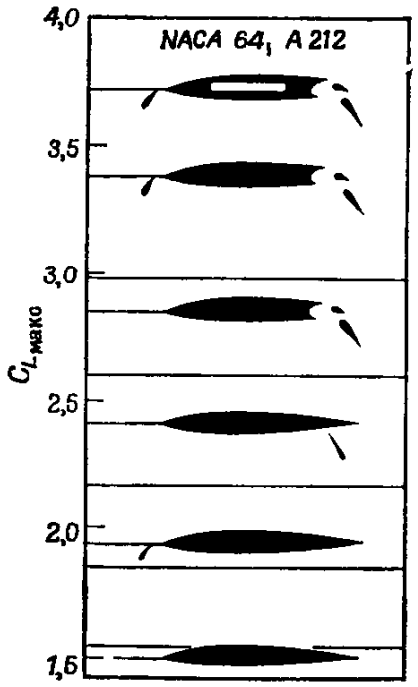


Ф и г. 4. Влияние щели на подъемную силу типичного крыла [22].

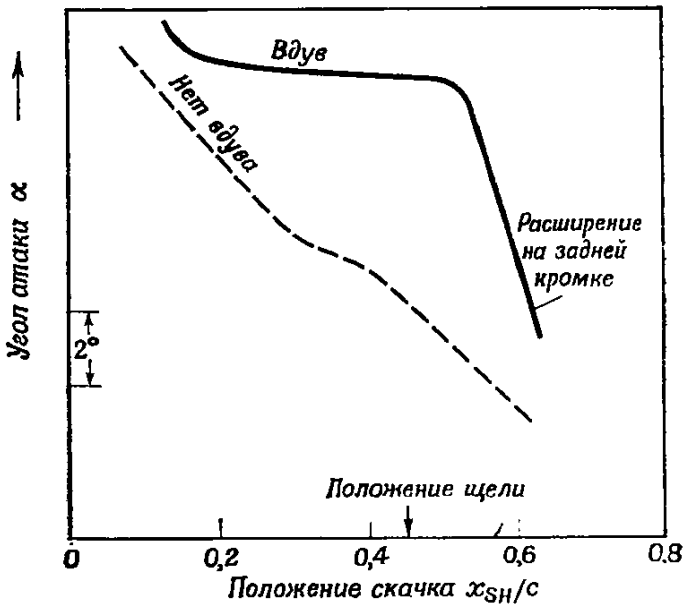


Ф и г. 5. Коэффициент максимальной подъемной силы $CL_{макс}$ в зависимости от относительной толщины t/c профилей без закрылков и с закрылками (NACA) [21].

Закрылки расположены на 0,2 с и отклонены на 60°. Серия профилей NACA64. Индекс i означает индуцированный.



Ф и г. 6. Коэффициент максимальной подъемной силы профиля с различными средствами регулирования подъемной силы (NACA) [21].



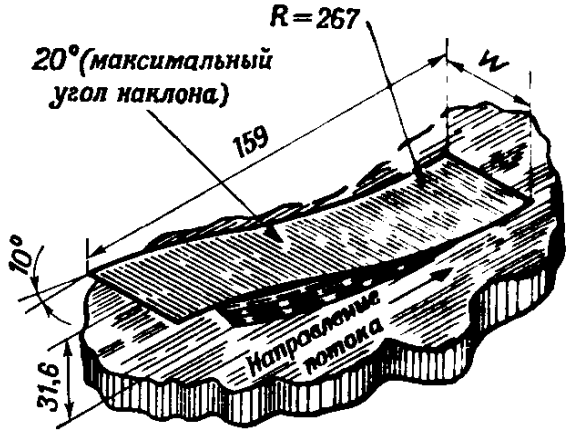
Ф и г. 7. Замедление смещения вперед скачка уплотнения на стреловидном крыле посредством вдува, ослабляющее эффект отрыва до расширения на задней кромке [20].

циент подъемной силы крыла (фиг. 4). Аналогично подъемную силу можно существенно увеличить путем применения щелевых закрылков вместо обычных профилированных закрылков (фиг. 5 и 6 [21]), поскольку щель между закрылком и основным крылом предотвращает отрыв потока от поверхности закрылка при больших углах его отклонения. После предотвращения отрыва подъемная сила продолжает расти (хотя и не так быстро) вследствие дополнительной циркуляции, вызываемой струей; струя может создавать и небольшое падение подъемной силы в связи с тем, что ее тяга направлена вниз. Увеличение сопротивления за счет применения щелевого закрылка при малых углах отклонения мало по сравнению с обычным щитком при той же подъемной силе (фиг. 5—6 [21]), поэтому щелевой закрылок очень полезен при взлете и посадке. На практике применяется много различных типов щелевых крыльев и щитков. Этому вопросу посвящено много работ [22]. На сверхзвуковом крыле узкая щель вдоль размаха, через которую вытекает тангенциальная струя, предотвращает отрыв турбулентного слоя при малых скоростях, а также расширяет рабочий интервал углов атаки (фиг. 7).

Струя, вытекающая через щель, создает вблизи поверхности тонкий слой воздуха с большой энергией, благодаря чему поток остается присоединенным к поверхности при большом положительном градиенте давления; перепад давления в скачке уплотнения при этом почти достигает полной величины перепада в прямом скачке.

1.2.2. Генераторы вихрей

Генератор вихря подводит энергию из внешнего течения в пограничный слой и применяется главным образом для управления уже оторвавшимся потоком на крыльях, в диффузорах и коленах труб при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях, а не для предотвращения отрыва. При заданном восстановлении давления применение генератора вихря приводит к уменьшению длины стенок. Например, при коэффициенте восстановления давления 0,67 и дозвуковой скорости можно сократить длину диффузора приблизительно на 60% [23]. Применяются генераторы вихрей различной формы: про-



Фиг. 8. Простой «плуг» [23].

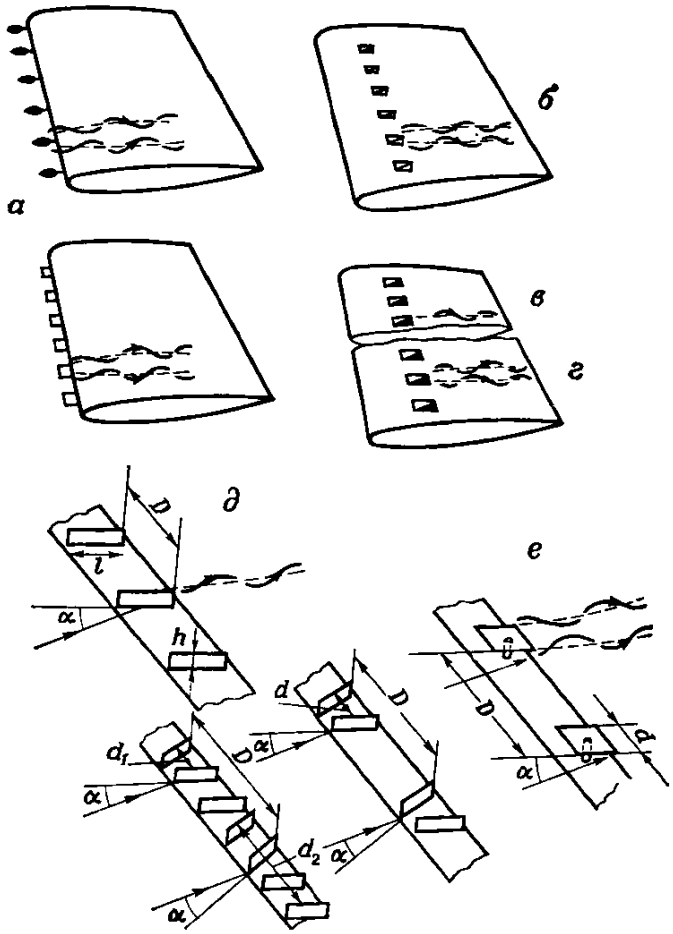
№	1	2	3	4
W, мм	9,5	19	38	75

Примечание. Все размеры даны в миллиметрах.

стой «плуг», экранированный «плуг», треугольный «плуг», ковшик, выступ, завихритель, купол, клин, лопатки, крылышко, перегородки, обтекатели, продольные ребра и т. п. Простой «плуг» и другие генераторы вихрей на крыльях показаны на фиг. 8—10.

Шубауэр и Шпангенберг показали, что принудительное перемешивание потока с помощью генераторов вихрей оказывает на пограничный слой такой же эффект, как и уменьшение градиента давления или уменьшение формпараметра $H = \delta^*/\theta$ (фиг. 11 [23]).

Крупномасштабное перемешивание с помощью сравнительно больших и далеко разнесенных генераторов вихрей значительно

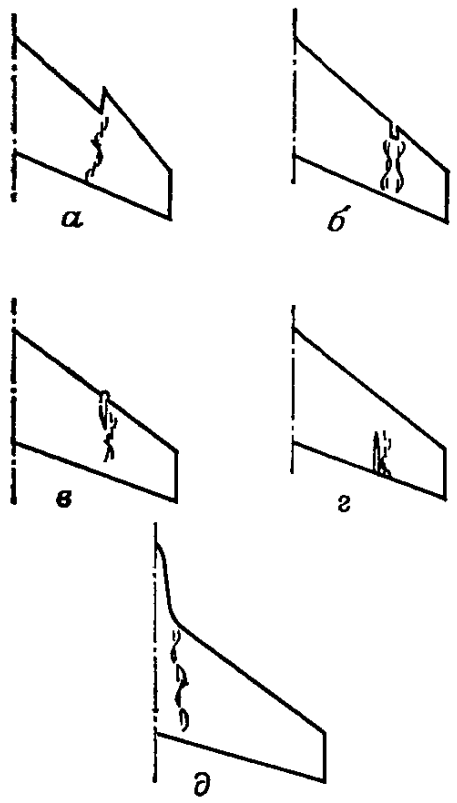


Фиг. 9. Типы генераторов вихрей и обозначения [20].

а — на передней кромке; *б* — выступы; *в* — односторонние клинья; *г* — двусторонние клинья; *д* — лопатки; *е* — крылышки.

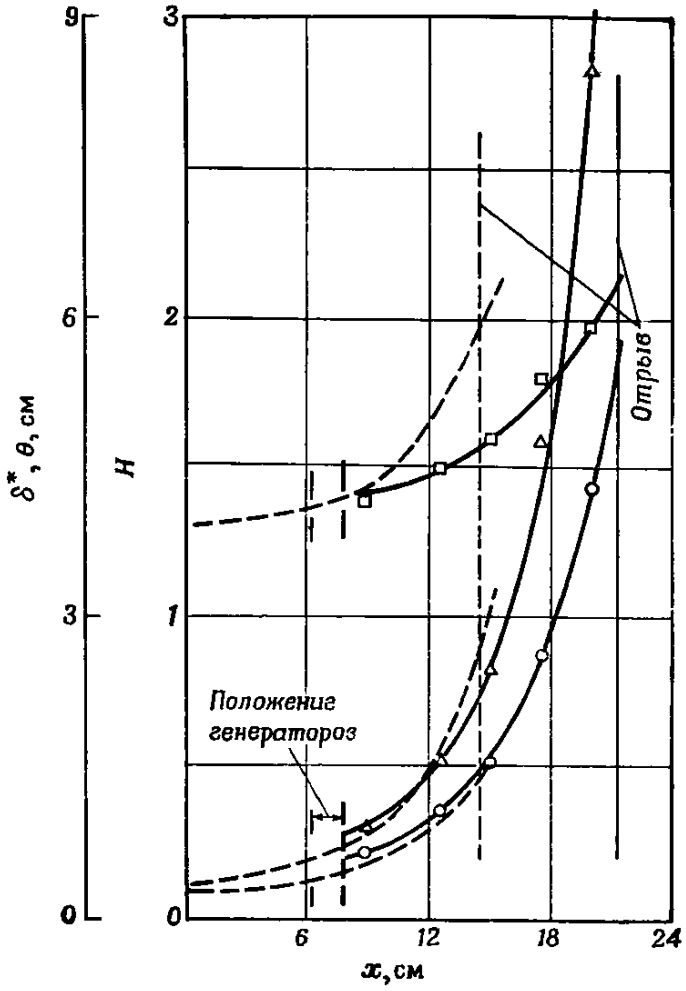
эффективнее, чем мелкомасштабное перемешивание. Таким образом, многорядные генераторы менее эффективны, чем однорядные генераторы, размещенные соответствующим образом. Успешное применение генератора вихрей для предотвращения развития отрыва пограничного слоя в большей степени зависит от интенсивности и расположения отдельных вихрей в области положительного градиента давления, чем от профиля пограничного слоя ниже по потоку.

Генератор вихря увеличивает подъемную силу крыла. На фиг. 12 показаны результаты опытов Маккаллоха и др. [24], расположивших клинья по размаху на расстоянии 0,1c от передней кромки крылового профиля NACA 63_3-018 под углами



Фиг. 10. Приспособления, вызывающие образование вихрей [20].

а — разрыв передней кромки; *б* — вырез в передней кромке; *в* — перегородка на передней кромке; *г* — перегородка на задней кромке; *д* — наплыв на передней кромке или продольная перегородка.



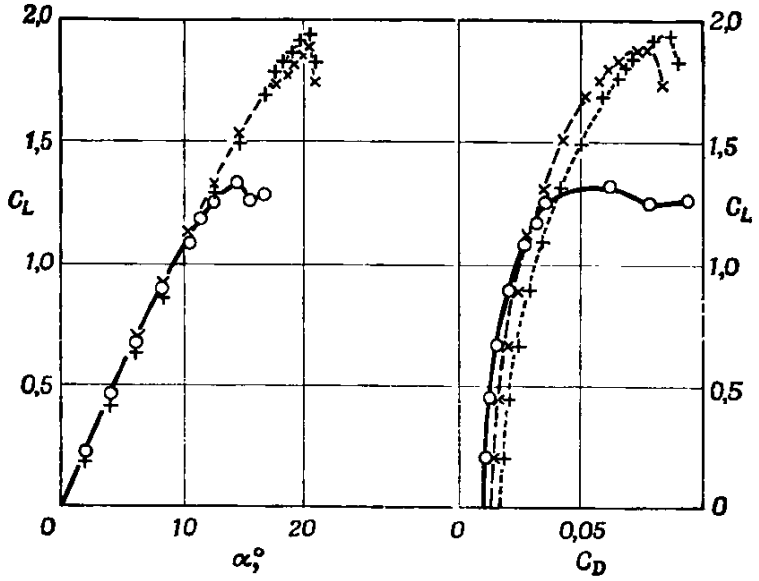
Фиг. 11. Влияние принудительного перемешивания на отрыв и осредненные толщину и формпараметр [23].

δ^* и θ — величины, полученные осреднением локальных значений по размаху для обеспечения соответствия двумерному течению; ——— простой «плуг»; ——— без генераторов; Δ δ^* ○ θ; □ $H = \delta^*/\theta$.

атаки $\pm 22{,}5°$, чтобы получить систему вихрей с противоположными знаками.

Клин вызывает турбулентное перемешивание, пограничный слой разрезается клиньями и частично отводится в основной поток. Благодаря применению клиньев увеличивается линейный участок кривой подъемной силы, угол атаки, соответствующий максимальной подъемной силе, возрастает от 14 до 20°, а величина коэффициента максимальной подъемной силы от 1,33 до 1,89.

Сопротивление крыла с этими генераторами вихрей при $C_L > 1{,}1$ меньше, чем гладкого профиля, но величина крейсерского C_D с генераторами вихрей несколько больше (примерно на 0,002). Клиновидные генераторы вихрей дают несколько большую подъемную силу по сравнению с генераторами — крылышками (фиг. 12),



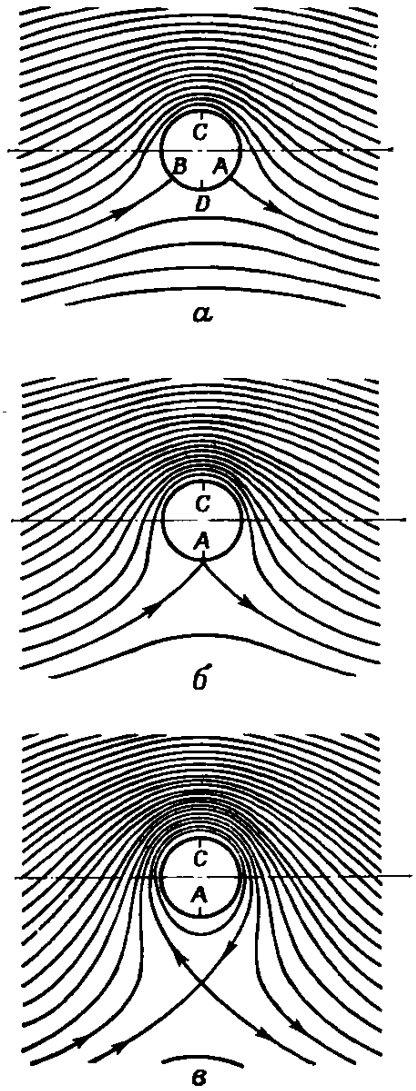
Фиг. 12. Влияние генераторов вихрей (крылышек и клиньев) на подъемную силу и сопротивление крылового профиля NACA 63_3-018 [25].
—○— исходный профиль; ——×—— с генераторами — крылышками; ——+—— с клиньями в пограничном слое.

но при малых углах атаки сопротивление клиньев в 2—3 раза больше сопротивления генераторов — крылышек [25]. Более подробные сведения о генераторах вихрей разных типов можно получить в работах [20, 23].

1.2.3. Подвижные поверхности

Как показал Прандтль [26], отрыв пограничного слоя можно предотвратить, если перемещать поверхность в направлении течения с достаточной скоростью, но такой способ управления обтеканием крыльев труден для реализации на практике. Флетнер заменил парус на лодке вращающимся цилиндром и использовал эффект Магнуса, но это оказалось неэкономичным [27]. Рассмотрим круговой цилиндр диаметром d, помещенный в однородный поток, движущийся со скоростью u_∞, с тремя различными величинами циркуляции скорости вокруг цилиндра (фиг. 13) [25]. Когда циркуляция $\Gamma < 2\pi u_\infty d$ направлена по часовой стрелке (фиг. 13, *а*), отрыв происходит в точке A и $C_L < 4\pi$, но при циркуляции $\Gamma = 2\pi u_\infty d$ отрыва не происходит и C_L достигает максимальной величины 4π.

При дальнейшем увеличении циркуляции возможно течение типа, показанного на фиг. 13, *в*. В этом случае $C_L < 4\pi$.



Фиг. 13. Обтекание кругового цилиндра потенциальным потоком при различных величинах циркуляции Г [25].
а — $\Gamma < 2\pi u_\infty d$, $C_L < 4\pi$;
б — $\Gamma = 2\pi u_\infty d$, $C_L = 4\pi$;
в — $\Gamma > 2\pi u_\infty d$, $C_L < 4\pi$.

Хотя, согласно Прандтлю, подъемная сила не может превзойти определенной величины [26], из анализа Глауэрта [28] следует, что подъемную силу можно неограниченно увеличить путем увеличения скорости вращения.

Эксперименты показали, что на воздушном винте вращение сдвигает отрыв в сторону бо́льших значений коэффициента подъемной силы, чем следовало бы ожидать на основании характеристик профилей сечений лопасти [29] [1]). Гэдд теоретически показал, что вращение может привести к запаздыванию и иногда к предотвращению отрыва ламинарного слоя [30].

1.2.4. Сетки

При дозвуковых скоростях сетка является полезным средством предотвращения отрыва, присоединения оторвавшегося потока или усиления стабилизирующего эффекта, если в первую очередь требуется подавление отрыва или стабилизация потока, а эффективность имеет второстепенное значение. Применение сеток не обеспечивает высокой эффективности. Сетка часто применяется в диффузоре. Эффективность диффузора можно характеризовать величиной

$$E_{1,2} = \frac{P_2 - P_1}{K_1 - K_2},$$

где $E_{1,2}$ — эффективность диффузора на участке между сечениями 1 и 2,

$$P_2 = \int_0^{A_2} p_2 u_2 \, dA, \quad P_1 = \int_0^{A_1} p_1 u_1 \, dA$$

— суммарные расходы потенциальной энергии (давление) через

[1]) В действительности вращение не оказывает существенного влияния на начало отрыва на лопастях винта, а рост величины Г по линейному закону объясняется расширением области большого разрежения на значительную часть хорды лопасти. — *Прим. ред.*.

сечение 1 и 2 диффузора, p — статическое давление,

$$K_1 = \int_0^{A_1} q_1 u_1 \, dA, \quad K_2 = \int_0^{A_2} q_2 u_2 \, dA$$

— суммарные расходы кинетической энергии через сечения 1 и 2 диффузора, q — скоростной напор.

Так называемый эффект заполнения сетки достаточен для предотвращения отрыва или же присоединения оторвавшегося потока даже в случае сильно развитого отрыва потока в диффузоре. «Заполнение» подразумевает использование всего объема диффузора либо вследствие выбора формы диффузора, либо благодаря действию сетки. В этом смысле заполнение означает отсутствие отрыва, поэтому условие заполнения можно определить как подобие распределения скорости в каждом сечении диффузора ее распределению на входе. Согласно исследованию Шубауэра и Шпангенберга [31], при дозвуковых скоростях отклонение потока сетками к стенкам сопровождается увеличением градиента скорости и напряжения трения на стенке. Процесс обтекания сетки тесно связан с процессами в турбулентном пограничном слое, и сетка может предотвратить отрыв либо за счет увеличения градиента скорости по нормали к стенке, либо за счет уменьшения градиента давления вдоль стенки, либо за счет этих обоих эффектов.

Эффект заполнения зависит главным образом от расположения сетки и коэффициента перепада давления на ней $k = \Delta p/q$, причем Δp — разность статических давлений по обе стороны сетки. Когда сетка максимально сдвинута вперед, отрыв может быть устранен путем увеличения k и оптимального заполнения диффузора выше по потоку, однако ниже по потоку отрыв может сохраниться. Когда сетка расположена ниже по потоку, участок заполнения диффузора также находится ниже по потоку. Так как при заданном k потеря эффективности минимальна, если сетка расположена в конце диффузора с малым углом раскрытия, то угол непосредственно перед сеткой может быть увеличен и увеличено отношение площадей. Таким образом, при заданном отношении площадей и значении k наиболее эффективная форма диффузора с сеткой должна иметь малый угол раскрытия, переходящий в большой. Что касается заполнения и отрыва, то несколько сеток в диффузоре любой формы столь же эффективны, как и одна сетка в диффузоре специальной формы. Поэтому при соответствующем числе и положении сеток легче спроектировать диффузор простой формы, чем специальной формы [31] [1]).

[1]) Оригинальным средством предотвращения отрыва от стенок диффузоров с большими углами раскрытия, повышения их эффективности и однородности потока является перемещение отрыва к оси диффузора с помощью радиальных перегородок и поперечного диска, расположенного в области горловины диффузора. — *Прим. ред.*

1.2.5. Разделяющая пластина

Как указано в гл. VIII, разделяющая пластина, расположенная за телом, может предотвратить периодические пульсации следа, если длина пластины достигает около пяти диаметров, а также может снизить сопротивление. Например, разделяющая пластина за круговым цилиндром при дозвуковых скоростях снижает коэффициент сопротивления от 1,1 до 0,7 [32].

1.3. ПРЕДОТВРАЩЕНИЕ ИЛИ ЗАМЕДЛЕНИЕ ОТРЫВА ПУТЕМ ОТСОСА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Отсос пограничного слоя исключает или уменьшает влияние вязкости на отрыв и неизбежно связан с затратами мощности. В гл. I упоминался классический эксперимент по предотвращению отрыва в дозвуковом диффузоре путем отсоса пограничного слоя. Среди различных способов управления отрывом чаще всего применяется отсос через щель, поэтому этот способ будет более подробно рассмотрен в данном разделе.

Путем отсоса из пограничного слоя удаляются заторможенные частицы, прежде чем произойдет отрыв, чтобы заново образующийся пограничный слой мог преодолеть положительный градиент давления. Предотвращение отрыва путем отсоса приводит к уменьшению сопротивления, увеличению подъемной силы, а также смещению точки перехода вниз по потоку, однако для достижения этой цели необходим вспомогательный источник мощности. Отсос пограничного слоя исследовался как теоретически, так и экспериментально.

1.3.1. Расчет отсоса пограничного слоя

Рассмотрим отсос ламинарного пограничного слоя при дозвуковых скоростях. Возможен как равномерный отсос с поверхности тела, так и по произвольному закону.

Равномерный отсос по длине пластины

Простейшим способом равномерного отсоса ламинарного пограничного слоя при нулевом угле атаки и дозвуковых скоростях является отсос через пористую стенку (фиг. 14) [33].

Вследствие малой скорости отсоса $v_0 < 0$ в пределах $|v_0/u_\infty|$ от 0,0001 до 0,001, направленной противоположно оси y, отсасываются только частицы жидкости, находящейся в непосредственной близости к стенке.

Удаляемое количество жидкости равно $Q = C_Q A u_\infty$, где C_Q — безразмерный коэффициент объемного расхода, A — площадь

омываемой поверхности. Так как для плоской пластины

$$Q = b \int_0^l \{-v_0(x)\}\, dx \tag{1}$$

и $A = bl$, причем l — длина, b — ширина пластины, то

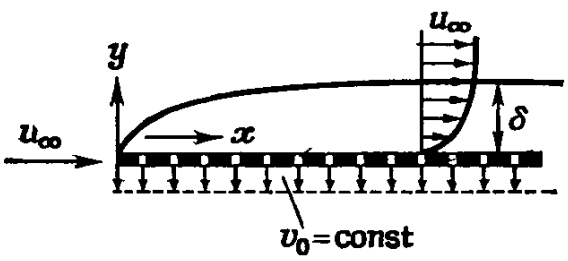
$$C_Q = \frac{1}{lu_\infty} \int_0^l \{-v_0(x)\}\, dx. \tag{2}$$

При равномерном отсосе $v_0 = \text{const}$ и

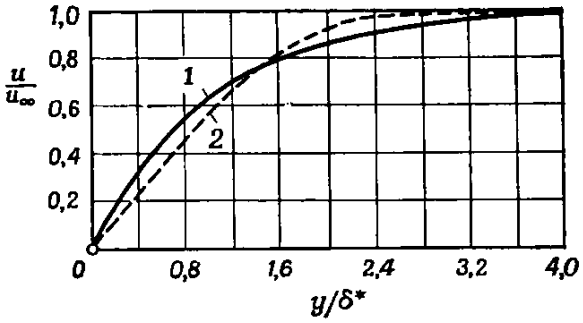
$$C_Q = -v_0/u_\infty. \tag{3}$$

Общие уравнения ламинарного пограничного слоя

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4}$$



Фиг. 14. Плоская пластина с равномерным отсосом при нулевом угле атаки [33].



Фиг. 15. Распределение скорости в пограничном слое на пластине при нулевом угле атаки [33].

1 — равномерный отсос, асимптотический профиль; 2 — без отсоса, профиль Блазиуса.

и

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5}$$

с граничными условиями

$$y = 0, \qquad u = 0, \qquad v = v_0(x),$$

$$y = \infty, \qquad u = u_e$$

и на стенке

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \quad \text{(для ламинарного течения)}$$

имеют частное решение, в котором скорость не зависит от расстояния x. Считая $\partial u/\partial x = 0$, из уравнения неразрывности получаем

$$v(x, y) = v_0 = \text{const},$$

а уравнение количества движения принимает вид

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

его решение

$$u(y) = u_\infty \{1 - \exp(v_0 y/\nu)\}. \tag{6}$$

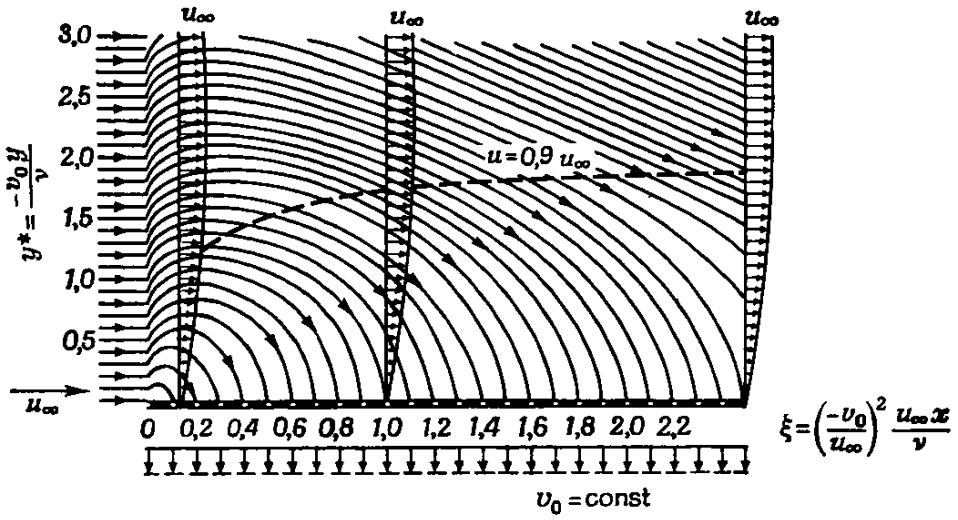
Толщины вытеснения и потери импульса, а также напряжение трения на стенке равны соответственно

$$\delta^* = \frac{\nu}{(-v_0)}, \quad \theta = \frac{1}{2}\frac{\nu}{(-v_0)}, \quad \tau_w = \rho(-v_0) u_\infty$$

или

$$c_\infty = \frac{\tau_w}{{}^1/_2 \rho u_\infty^2} = 2\left(-\frac{v_0}{u_\infty}\right) = 2C_Q,$$

т. е. напряжение трения не зависит от вязкости.



Фиг. 16. Линии тока при обтекании пластины с равномерным отсосом [33].

На фиг. 15 профиль скорости, вычисленный по формуле (6), сравнивается с профилем Блазиуса, соответствующим течению без отсоса.

Вследствие отсоса скорость у стенки увеличивается, благодаря чему повышается способность течения преодолевать положительный градиент давления. Профиль скорости, определенный по формуле (6), асимптотически достигается на расстоянии, приблизительно равном [34]

$$\left(\frac{-v_0}{u_\infty}\right)^2 \frac{u_\infty x}{\nu} = 4 \quad \text{или} \quad C_Q \sqrt{\mathrm{Re}_x} = 2. \tag{34}$$

Поэтому этот профиль называется асимптотическим профилем пограничного слоя с отсосом на произвольном цилиндрическом теле [35].

Картина линий тока при отсосе представлена на фиг. 16.

Общее решение для отсоса по произвольному закону

Для общего случая отсоса по произвольному закону на теле произвольной формы можно получить приближенное решение с помощью интегрального уравнения количества движения

$$u_e^2 \frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^*) u_e \frac{du_e}{dx} - v_0 u_e = \frac{\tau_w}{\rho}. \tag{7}$$

Прандтль [36] оценил скорость отсоса, необходимую для предотвращения отрыва, в предположении, что профиль скорости на всей длине такой же, как и в точке отрыва, в которой

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,$$

что соответствует параметру Польгаузена

$$\Omega = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx} = -12.$$

Задавая профиль скорости в виде

$$u = u_e \left\{ 6 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - 8 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + 3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 \right\} \tag{8}$$

и учитывая, что $\delta^*/\delta = (^3/_{10}) - \Omega/120 = {}^2/_5$, и следовательно, $\theta/\delta = {}^4/_{35}$,

приведем уравнение количества движения к виду

$$\delta^* + 2\theta = \frac{22}{35}\delta.$$

Если эту величину подставить в уравнение (8) и предположить, что толщина пограничного слоя постоянна или $d\theta/dx = 0$, то

$$v_0 = \frac{22}{35} \delta \frac{du_e}{dx}. \tag{9}$$

Из уравнения (5) при $y = 0$

$$v_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0}. \tag{10}$$

Так как

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = 12 \frac{u_e}{\delta^2},$$

то из уравнения (10) имеем

$$\delta = \sqrt{\frac{12}{(-du_e/dx)}}. \tag{11}$$

Из уравнений (9) и (11) получаем скорость отсоса, необходимую для предотвращения отрыва

$$v_0 = -2{,}18\sqrt{-\nu\frac{du_e}{dx}}. \tag{12}$$

Так как для кругового цилиндра радиусом R

$$\frac{du_e}{dx} = -2\frac{u_\infty}{R},$$

то из уравнения (12) находим следующее выражение для коэффициента объемного расхода, необходимого для предотвращения отрыва,

$$C_Q\sqrt{\frac{u_\infty R}{\nu}} = 2{,}18\sqrt{2} = 3{,}08.$$

Упомянем следующие аналитические решения задачи отсоса. Применяя интегральное уравнение количества движения и метод, подобный методу Кармана — Польгаузена, Шлихтинг [37, 38] разработал метод расчета пограничного слоя на теле произвольной формы с произвольной скоростью отсоса $v_0(x)$, а Торда [39, 40] усовершенствовал этот метод. Хед [41] рассмотрел различные приближенные решения уравнений двумерного пограничного слоя с отсосом при дозвуковых скоростях и произвольном распределении давления. Триллинг [42], Твейтс [44] и Ринглеб [45] исследовали отсос с произвольной скоростью, а Вигардт [46] распространил расчет на случай осевой симметрии. Трукенбродт [47] предложил очень простое решение как для двумерного, так и для осесимметричного течений, сведя задачу к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Строгое решение Гёртлера уравнений ламинарного пограничного слоя, в котором использован новый ряд [48] (гл. II), можно применить для решения задач отсоса или вдува через пористую поверхность, если принять распределение скорости потенциального течения в виде [49]

$$u_e(x) = x^m\{S_0 + S_1x^{m+1} + S_2x^{2(m+1)} + \ldots\},$$

а распределение скорости отсоса в виде

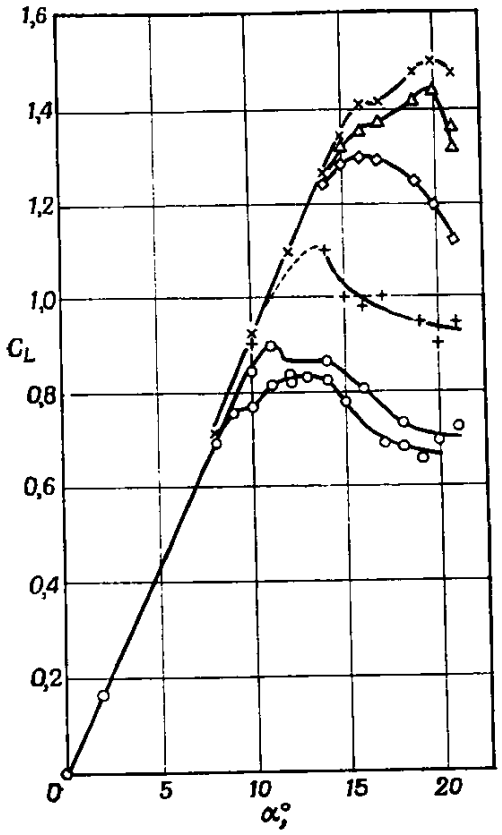
$$v_0(x) = x^{1/2(m-1)}\{\sigma_0 + \sigma_1x^{m+1} + \sigma_2x^{2(m+1)} + \ldots\},$$

где $m = \beta_0/(2-\beta_0)$, $\beta_0 = 0$ для острой передней кромки, $\beta_0 = 1$ для тупой носовой части S_0, S_1, ..., σ_0, σ_1, σ_2 ... — коэффициенты.

Для расчета ламинарного пограничного слоя с отсосом, кроме упомянутых в гл. II таблиц [50], необходимы дополнительные таблицы.

1.3.2. Экспериментальные исследования отсоса пограничного слоя

Экспериментальные исследования отсоса пограничного слоя в двумерном потоке широко проводились с целью разработки методов отсоса для практических приложений, однако подробное описание этих экспериментов выходит за рамки настоящей книги, поэтому приведены только некоторые примеры.



Фиг. 17. Экспериментальные значения подъемной силы профиля NACA 63A009 с пористой передней кромкой [25].

Обозначения	$(w_w/u_\infty)\sqrt{\mathrm{Re}}$	$C_Q\sqrt{\mathrm{Re}}$	C_Q
×	100	3,61	0,0034
△	80	2,89	0,0027
◇	60	2,16	0,0020
+	40	1,44	0,0013
○	0	0	0

w_w — скорость отсоса по нормали к поверхности крыла.

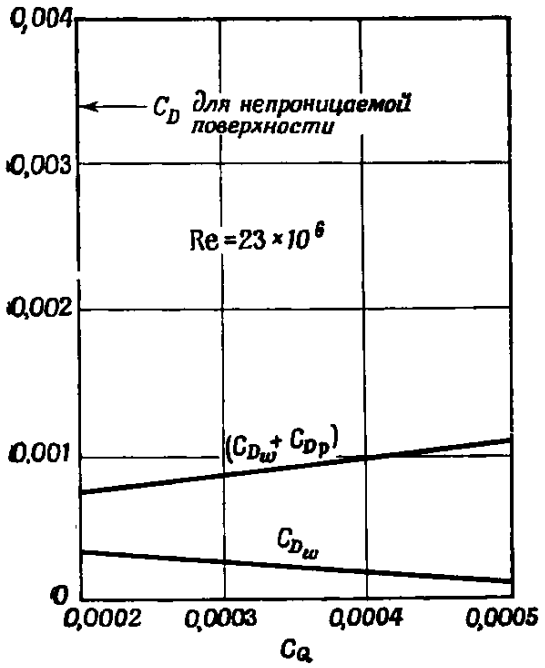
При отсосе на передней кромке обыкновенного крыла отрыв при больших углах атаки может быть предотвращен или задержан при сравнительно небольших расходах отсасываемого газа. При некотором значении коэффициента подъемной силы отсос может производиться на части поверхности, на которой градиент скорости в первом приближении больше, чем максимальный градиент на крыловом профиле при максимальной подъемной силе без отсоса [51].

Выигрыш в подъемной силе и уменьшение сопротивления благодаря отсосу при дозвуковых скоростях показаны на фиг. 17 и 18. Увеличение C_Q при постоянном угле атаки может привести к увеличению C_L, но лишь до тех пор, пока полностью не исчезнет отрыв; при дальнейшем увеличении C_Q рост подъемной силы незначителен или же прекращается совсем.

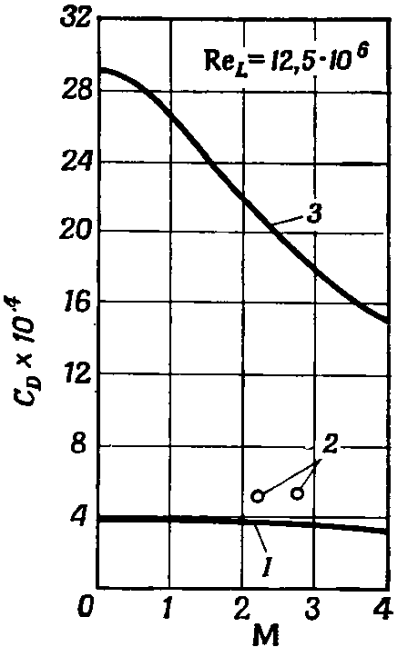
На фиг. 18 представлены коэффициент сопротивления крыла C_{D_w} и сумма коэффициентов сопротивления крыла и эквивалентного сопротивления мощности, требуемой для отсоса, $(C_{D_w} + C_{D_p})$, вычисленные для истребителя «Вампир». С увеличением C_Q уменьшается C_{D_w}, но величина $C_{D_w} + C_{D_p}$ возрастает, поэтому необходимо оценивать эффективность отсоса. При заданном коэффициенте подъемной силы изменение толщины пористого материала вдоль хорды на чет-

верть снижает мощность, требуемую для отсоса на профиле NACA 0010·51, следовательно, снижается и расход отсасываемого газа [51].

На дозвуковом крыле с удлинением 4,6 и углом стреловидности 40° Поплтон [52] получил увеличение коэффициента подъемной силы C_L с 0,94 до максимальной величины 1,18 при коэффициенте расхода отсасываемого газа $C_Q = 0{,}0013$, хотя при



Фиг. 18. Изменение C_D в зависимости от C_Q для крыла с пористой поверхностью (самолет «Вампир») [25].



Фиг. 19. Сравнение оптимального коэффициента сопротивления профиля с отсосом с коэффициентом трения на пластине при ламинарном и турбулентном пограничных слоях [53].

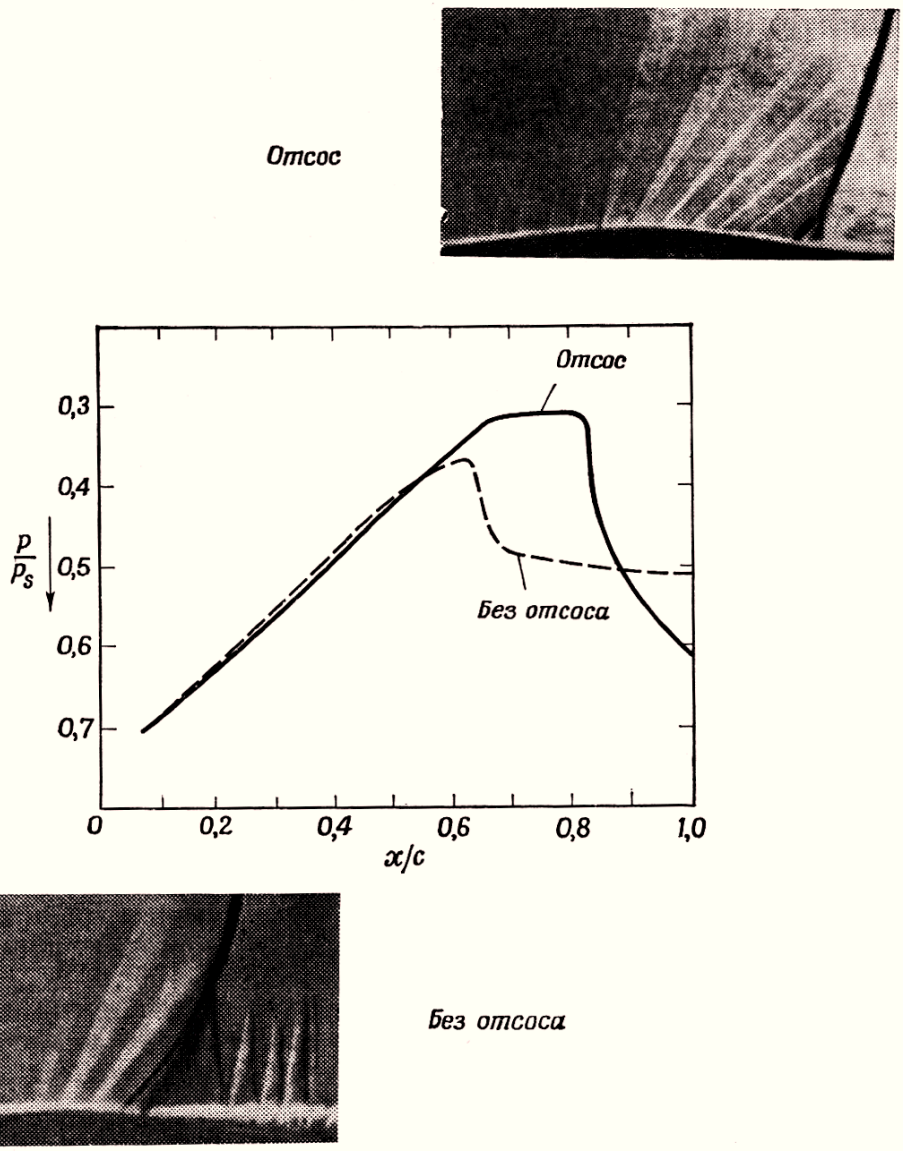
1 — ламинарный слой; *2* — профиль с отсосом; *3* — турбулентный слой.

изменении угла атаки наблюдался значительный гистерезис. Это увеличение коэффициента подъемной силы сравнимо с соответствующим увеличением для профиля.

Отсос пограничного слоя является также очень полезным средством улучшения характеристик сверхзвукового крыла. Опыты Грота [53] с двояковыпуклым крыловым профилем толщиной 5% при числе Рейнольдса, вычисленном по длине хорды, $12{,}5\cdot10^6$, и числах Маха 2,23 и 2,77 показали, что можно получить увеличение подъемной силы при малом сопротивлении.

Путем отсоса пограничного слоя на теле вращения (оживало — цилиндр) можно сохранить ламинарный пограничный слой при числе Рейнольдса, вычисленном по длине, $4{,}7\cdot10^6$—$10{,}7\cdot10^6$, и числах Маха 2,5—3,5. В процессе испытаний температура поверхности модели была равна равновесной температуре тепло-

изолированной стенки, так что стабилизирующее (дестабилизирующее) влияние охлаждения (нагревания) стенки не накладывалось на влияние отсоса пограничного слоя. На поверхность



Фиг. 20. Применение распределенного отсоса при фиксированном числе Маха [20].

p_s — полное давление в невозмущенном потоке.

отсоса не падали ударные волны, благодаря чему удавалось избежать их взаимодействия с ламинарным пограничным слоем.

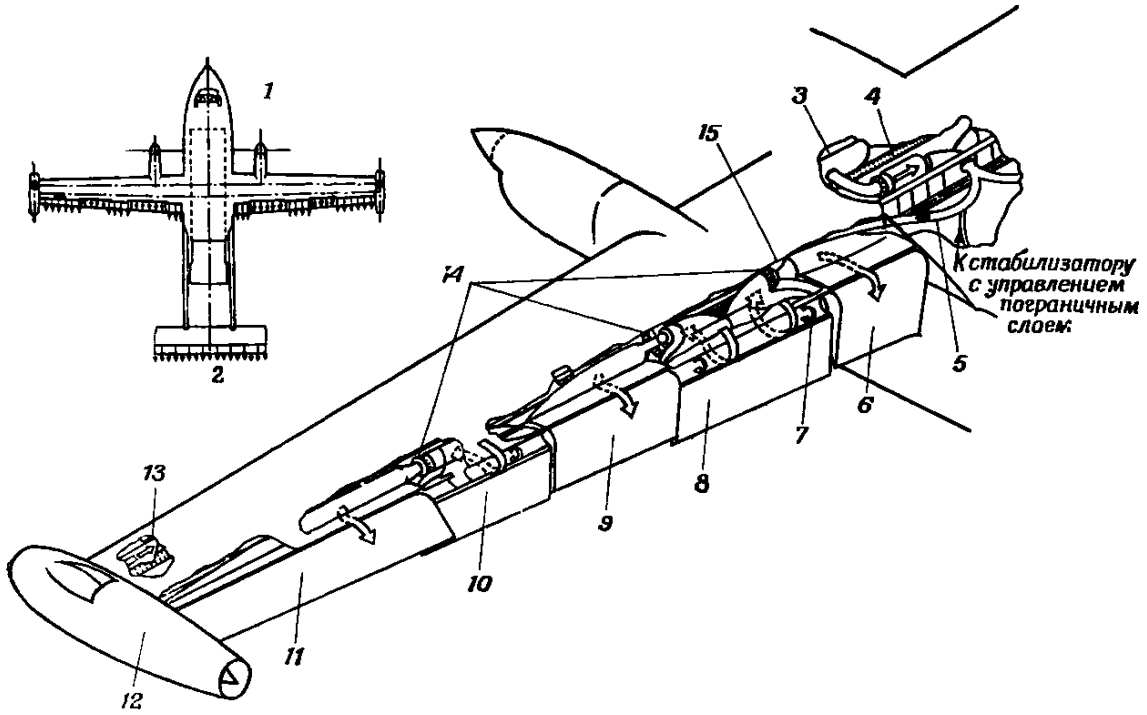
Уменьшение сопротивления при сверхзвуковых скоростях вследствие отсоса пограничного слоя наглядно видно на фиг. 19.

Коэффициент сопротивления по результатам измерений на крыле с отсосом при $Re_L = 12{,}5 \cdot 10^6$ в 1,5 раза больше коэффициента сопротивления трения при ламинарном режиме течения в пограничном слое и составляет только около 27% соответствующего

коэффициента при турбулентном режиме течения. Картина скачков при отсосе представлена на фиг. 20.

Слабые скачки отходят от каждой щели, и если замыкающий скачок перемещается назад, протяженность области отрыва уменьшается. Скачки усиливаются при более интенсивном отсосе и частично исчезают, когда отсос ослабляется.

Наклон скачков хорошо согласуется с местными числами Маха, а влияние скачков на сопротивление давления оценивается прира-



Фиг. 21. Пример комбинированного отсоса и вдува (самолет «Фейрчайлд») [54].

1 — комбинированная система отсоса и вдува; *2* — стабилизатор с управлением пограничного слоя; *3* — камера со сжатым воздухом; *4* — камера сгорания; *5* — горячий газ к струйному насосу; *6* — закрылок со вдувом; *7* — щель для отсоса на кромке; *8* — закрылок с отсосом; *9* — закрылок или элерон со вдувом; *10* — закрылок с отсосом; *11* — элерон со вдувом; *12* — турбокомпрессор; *13* — трубопровод сжатого воздуха; *14* — струйные насосы; *15* — многосопловой струйный насос.

щением сопротивления отсоса на 10—15%. Как видно из фиг. 20, статическое давление на верхней стороне профиля уменьшается, следовательно, подъемная сила сверхзвукового крыла увеличивается за счет отсоса пограничного слоя.

Так как устранение пограничного слоя из пристенной области путем отсоса и увеличение его энергии путем вдува являются эффективными средствами управления отрывом, комбинация этих двух средств является практическим решением проблемы улучшения характеристик крыла самолета, в особенности при посадке и взлете. Немецкие самолеты «Арадо-232» и «Дорнье-24» были снабжены указанными двумя системами управления обтеканием крыла (в области за задним лонжероном). Позднее на самолете

XC-123D был получен $C_{L_{макс}} = 4{,}8$. На легком самолете «Цессна», построенном в США, были осуществлены отсос и вдув. Для такого способа управления пограничным слоем нет удовлетворительного метода расчета, поэтому проектирование было основано на экспериментальных данных.

Крылья имеют верхнее положение, так как влияние земли уменьшает приращение подъемной силы при интенсивном отсосе и вдуве. Отсос и вдув могут быть распределены по размаху или по хорде, но распределение по размаху эффективнее других способов, во всяком случае, для дозвукового транспортного самолета. Пример комбинированной системы вдува и отсоса показан на фиг. 21. Увеличение $C_{L_{макс}}$ путем управления пограничным слоем позволяет выбирать оптимальную площадь крыла для крейсерского режима при соответствующем увеличении скорости и дальности, однако, эти преимущества утрачивают смысл, если мощность, требуемая для отсоса, слишком велика. Для этой цели подходит струйный насос, а ротационные насосы непригодны. Воздух, отсасываемый в одном месте по размаху, вдувается в другом месте. Согласование расходов отсасываемого и вдуваемого воздуха достигается соответствующим выбором ширины щелей для вдува и отношения площадей отсоса и вдува [54].

1.4. СНИЖЕНИЕ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ОБЛАСТЯХ ОТРЫВА И ЗАДЕРЖИВАНИЕ ОТРЫВА ОХЛАЖДЕНИЕМ

Путем вдува газа в область отрыва ламинарного течения можно уменьшить теплопередачу. Так как при этом требуется умеренный расход газа, такой способ имеет практическое значение.

Чепмен [55] вычислил коэффициент восстановления в отрывном течении как функцию массы вдуваемого газа при значениях числа Прандтля Pr = 1; 0,72 и 0,5 (фиг. 22).

Безразмерный расход массы определяется в виде

$$\zeta = \psi_*/\sqrt{x_*},$$

где ψ_* — преобразованная функция тока

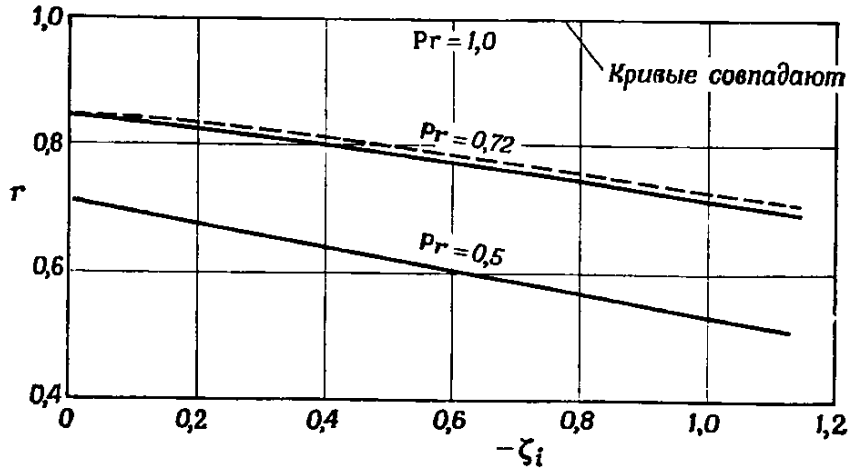
$$\psi_* = \psi/\sqrt{\nu_e u_e l C};$$

$$\rho u = \rho_e\,(\partial\psi/\partial y),$$

$$\rho v = -\,\rho_e\,(\partial\psi/\partial x),$$

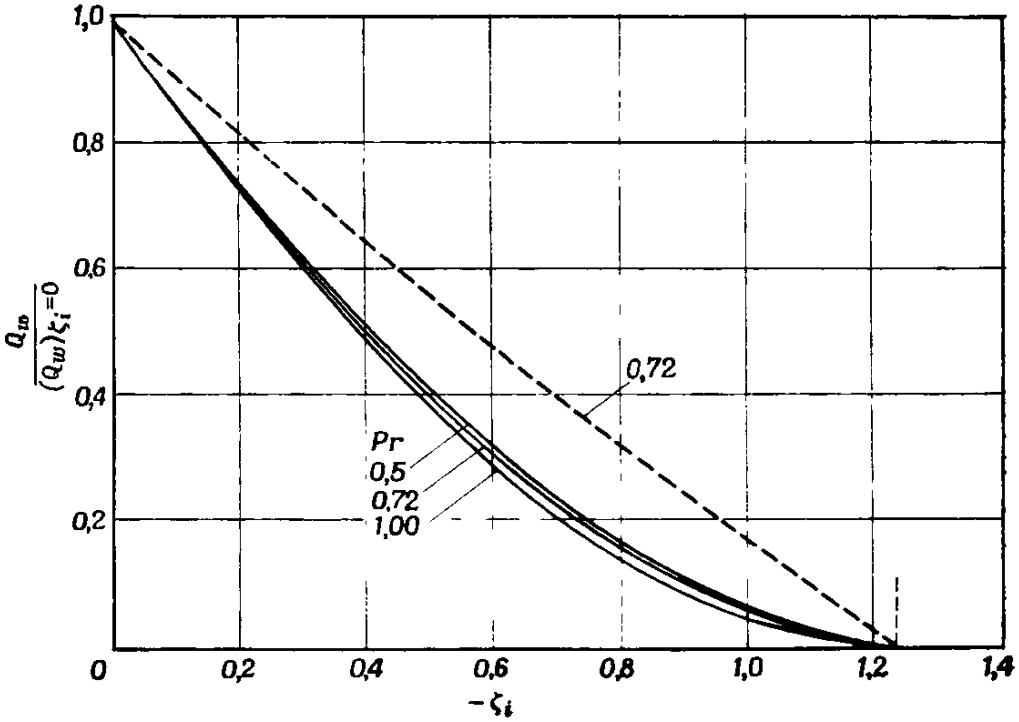
$x_* = x/l$, x — координата, параллельная разделяющей линии тока $\psi = 0$ в слое смешения.

Из фиг. 22 видно, что при Pr = 1 вдув не влияет на коэффициент восстановления, который одинаков как для свободного слоя смешения, так и для ламинарного пограничного слоя. При



Фиг. 22. Влияние вдува на коэффициент восстановления [55].

——— свободный слой смешения; — — — пограничный слой [56]; $-\zeta_i = (m_i/\rho_e u_e bl)\sqrt{\mathrm{Re}/C}$ безразмерный расход вдуваемого газа; m_i — расход вдуваемого газа (плотность × скорость × площадь); b — ширина двумерного течения; l — длина свободного слоя смешения; C — коэффициент пропорциональности между вязкостью и температурой; $r = (h_{aw} - h_e)(u_e^2/2)$ — коэффициент восстановления, где h_{aw} — удельная энтальпия для теплоизолированной стенки.



Фиг. 23. Влияние вдува на теплопередачу в случае $h_w = h_e = 1$ (в случае $M_\infty \to 1$ значение h_w может быть любым) [55].

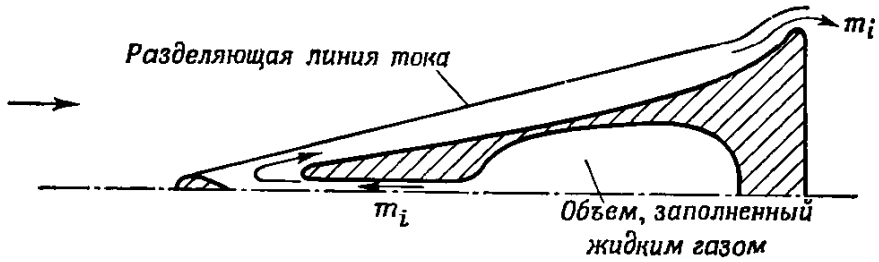
$\frac{(Q_w)}{(Q_w)_{\zeta_i=0}} = \frac{\text{тепловой поток}}{\text{тепловой поток при отсутствии вдува}}$; Q_w — суммарный тепловой поток в стенке между точками отрыва и присоединения; $-\zeta_i = (m_i/\rho_e u_e bl)\sqrt{\mathrm{Re}/C}$ — безразмерный расход вдуваемого газа.

$Pr < 1$ вдув вызывает уменьшение коэффициента восстановления как для слоя смешения, так и для пограничного слоя. Пунктирной кривой на фиг. 22 представлены значения r, вычисленные Лоу [56].

Если в область отрыва вдувается газ с расходом

$$\int_{-\infty}^{0} \rho u dy = \sqrt{\rho_e u_e \mu_e l C} \int_{\xi_d}^{0} d\zeta = -\zeta_d \sqrt{\rho_e u_e \mu_e l C},$$

(индекс d относится к застойной области), то в области присоединения не происходит возвратного течения и тепловой поток равен нулю (фиг. 23) [55].



Фиг. 24. Конус со вдувом [55].

Чтобы оценить требуемый расход вдуваемого газа m_i, рассмотрим конус с углом при вершине 30° (фиг. 24), радиусом основания 0,3 м, движущийся со скоростью, соответствующей числу Маха 20, на высоте 30 км; одна треть объема конуса первоначально занята жидким воздухом или жидким водородом. Конус пролетит с постоянной скоростью расстояние около $1{,}4 \cdot 10^6$ диаметров, или 800 км, при нулевом теплообмене до полного расхода запаса жидкого газа. Практический эффект зависит от числа Рейнольдса, до которого свободный слой смешения может остаться ламинарным. Влияние вдува газа на поверхностное трение по существу такое же, как и влияние на тепловой поток [56].

Как уже было указано в гл. I и XI, при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях теплопередача влияет на положение отрыва и протяженность области отрыва. При охлаждении поверхности тела градиент давления увеличивается, а протяженность области отрыва уменьшается. В случае равномерно замедляющегося течения повышение температуры стенки от комнатной до точки кипения может привести к сокращению длины области отрыва ламинарного слоя на 16% [57].

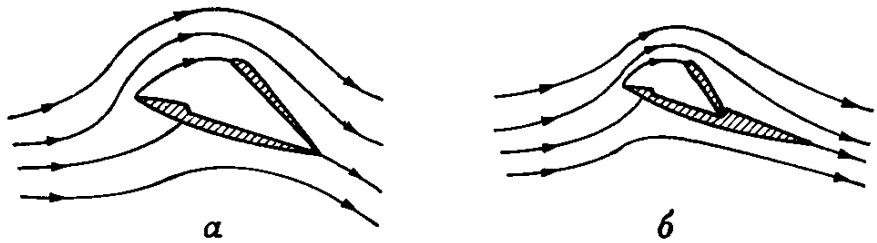
При сверхзвуковых скоростях благодаря охлаждению модели в виде цилиндра с коническим расширением протяженность области отрыва ламинарного слоя уменьшается, а градиент давления увеличивается, что аналогично случаю меньших скоростей; эффективность конического расширения иногда возрастает [58].

2. УПРАВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЕМ С ПОМОЩЬЮ ОТРЫВА

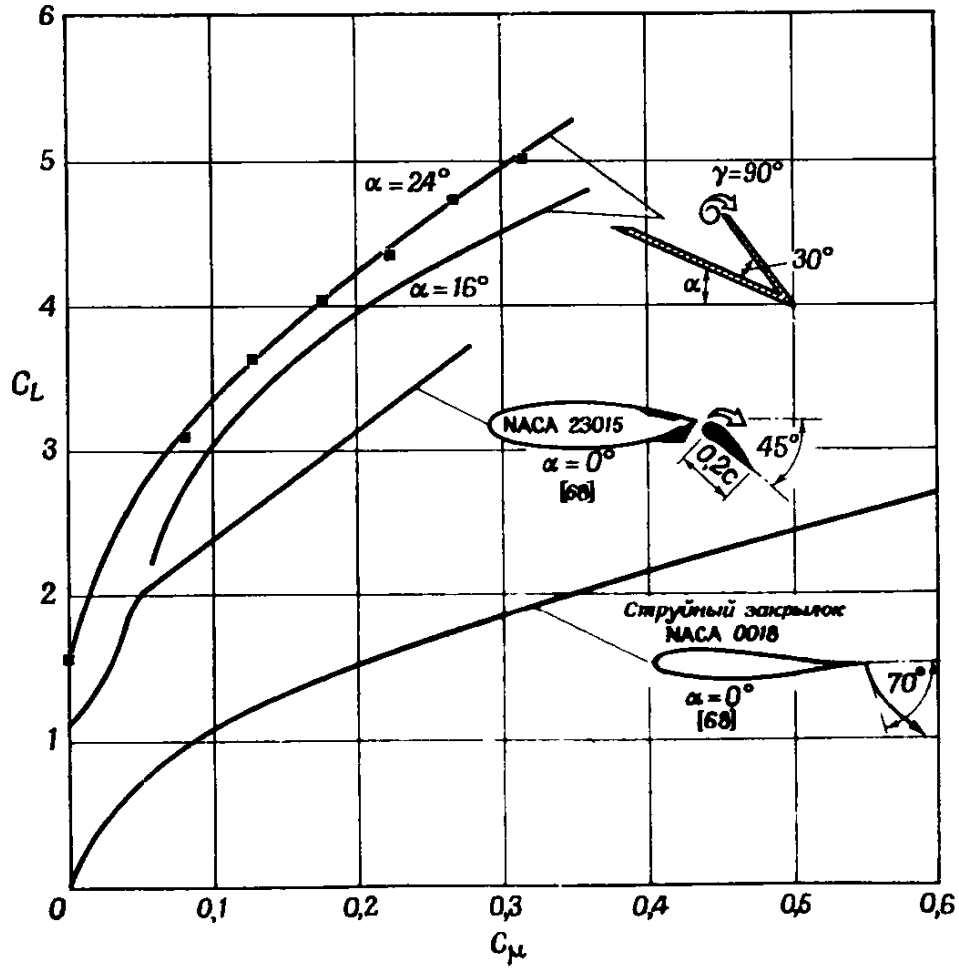
В гл. I и XI упоминалось, что отрыв от передней кромки при некоторых условиях может скорее привести к увеличению эффективности, чем предотвращение отрыва.

2.1. УПРАВЛЕНИЕ ОБТЕКАНИЕМ КРЫЛА ПРИ ДОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ С ПОМОЩЬЮ ОТРЫВА

Для обеспечения эффективных характеристик на крейсерском режиме при сверхзвуковой скорости применяется тонкий остроносый профиль, но при посадке и взлете с малыми скоростями



Фиг. 25. Возможные формы щитков со свободной линией тока [43].



Фиг. 26. Сравнение величин C_L, полученных различными способами [43].

этот профиль невыгоден, так как подъемная сила мала, сопротивление велико, управляемость плохая и на переднюю кромку вследствие отрыва действуют переменные нагрузки. Таким образом, для улучшения характеристик при малых скоростях желателен более толстый профиль, который может быть получен, как указано на фиг. 25.

Обеспечивая отрыв на передней кромке нижней части и присоединение на передней кромке верхней части профиля, можно получить приблизительно постоянное давление на линии тока, соединяющей передние кромки обеих частей. Положительный градиент давления на верхней части профиля может стать большим, поэтому для предотвращения отрыва скругляется передняя кромка верхней части и делается щель для обеспечения энергичного вдува и присоединения потока.

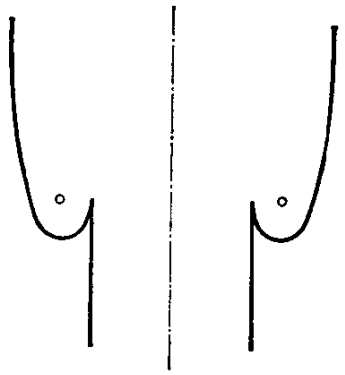
Такой способ управления потоком выгодно отличается от других способов увеличения подъемной силы (фиг. 26) при одинаковых коэффициентах импульса вдуваемой струи

$$C_\mu = q_m V_j \Big/ \left(\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 A\right),$$

где q_m — массовый расход вдуваемого воздуха, V_j — скорость струи, A — площадь щели. Однако при одинаковых углах атаки сравнение менее выгодно.

2.2. УПРАВЛЕНИЕ ОТРЫВНЫМ ТЕЧЕНИЕМ С ПОМОЩЬЮ СТОЯЧИХ ВИХРЕЙ

Управление течением с помощью стоячих вихрей предпринимается с целью изменения установившегося потенциального течения путем изменения площади потока. Если этот способ управления недостаточно эффективен, можно дополнительно применить другие методы, например отсасывание. Этот принцип управления потоком был применен к классическому крыловому профилю с острой задней кромкой, а недавно Ринглеб [59, 60] применил его к диффузору с внезапным расширением (фиг. 27). Визуальное наблюдение течения, осуществленное Фреем [61], показало, что стоячие вихри образуются в соответствии с теорией вихрей. Стационарные стоячие вихри не являются вихрями потенциального типа, так как в диффузоре с расширением они разрушаются. Для усовершенствования такого диффузора необходимы дальнейшие исследования. По крайней мере теоретически этот тип диффузора рассматривается как возможный способ обеспечения плавного расширения потока с высокой эффективностью. Форма диффузора с вне-

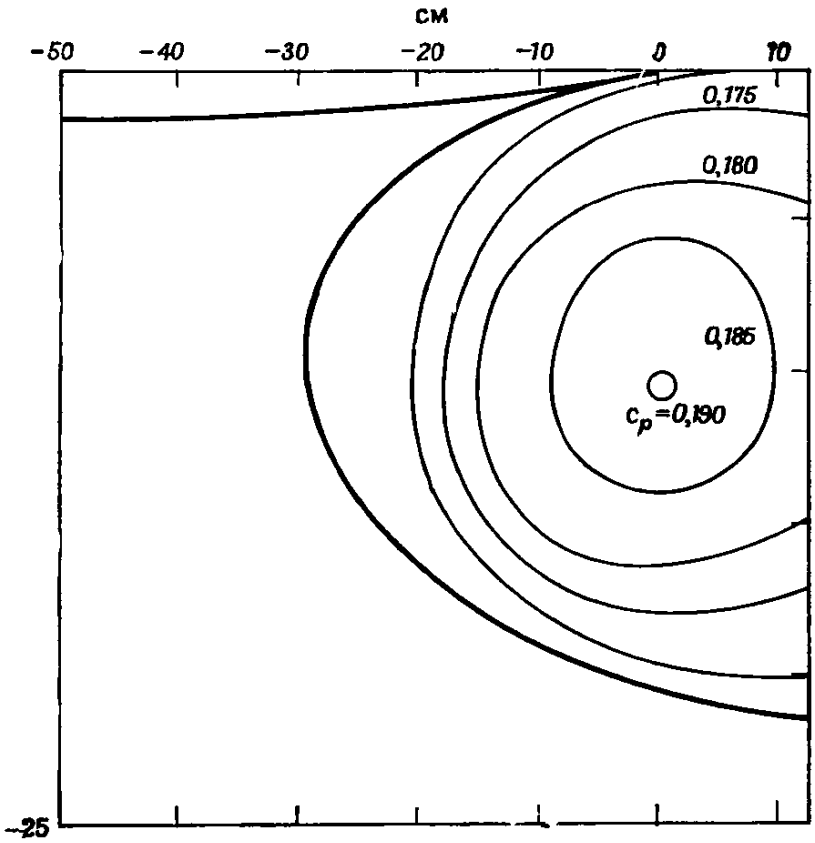


Фиг. 27. Диффузор с внезапным расширением [59].

запным расширением может быть получена соответствующим конформным отображением области вне круга

$$|\zeta_1| = |\xi + i\eta| > 1,$$

где ξ, η — прямоугольные координаты в преобразованной плоскости [62]. Так как для стабилизации вихрей важно, чтобы



Фиг. 28. Распределение давления около стоячего вихря в диффузоре с внезапным расширением [59].

направление касательной к острию совпадало с направлением течения и так как наклон острия к стенке неэффективен, то наиболее выгодна конфигурация острия, показанная на фиг. 28.

Направление касательной должно быть таким, чтобы до острия течение было безотрывным. Возможность создания аналогичного осесимметричного диффузора была продемонстрирована Липпишем в дымовой трубе.

2.3. УПРАВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЕМ С ПОМОЩЬЮ ОТРЫВА ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ И ГИПЕРЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

В гл. IX был рассмотрен отрыв потока от иглы, установленной перед тупым телом при сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростях, и упомянут ряд работ, в том числе [63—65]. С помощью иглы можно уменьшить донное сопротивление и тепловой поток,

если ламинарное течение не переходит в турбулентное. Такая игла может быть использована для увеличения подъемной силы и управления обтеканием путем изменения ее длины.

Для выяснения вопроса о применимости иглы на сверхзвуковом крыле Хартли [66] провел экспериментальное исследование крыла NACA 0012 с относительной толщиной 12% при числах Маха 1,56—1,88 и числах Рейнольдса $2{,}25 \times 10^6$—$3{,}02 \cdot 10^6$. На передней кромке этого крыла были установлены иглы. Для сравнения с аэродинамическими характеристиками сверхзвукового крыла был испытан также профиль NACA 65-006 с относительной толщиной 6%.

Таблица 1

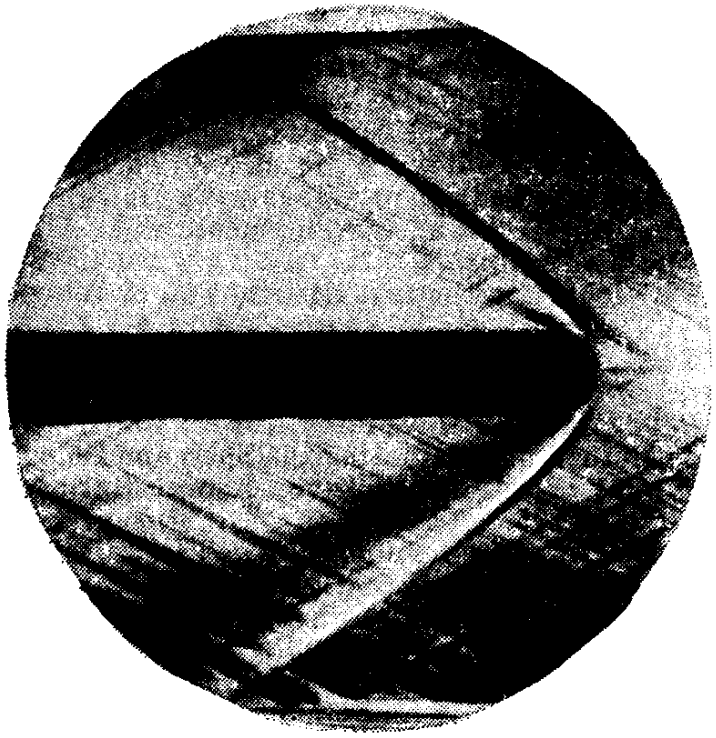
Характеристика	Профиль	
	NACA 0012 с иглами	NACA 65-006 без игл
$C_{D_{мин}}$ (M = 1,88)	0,079	0,031
$C_{L_{макс}}$ (M $\ll$ 1)	0,85	0,65
$C_{L_{макс}}/C_{D_{мин}}$	10,8	21,0

Благодаря иглам течение превращается в трехмерное и неосесимметричное, в то время как без игл обтекание передней кромки крыла (за исключением конца) двумерное. Однако механизм отрыва потока от иглы, образование конической области отрыва и снижение сопротивления по существу такие же, как и при осесимметричном течении, рассмотренном в гл. IX. Применение игл для снижения сопротивления более тонкого крыла менее эффективно. Хотя благодаря применению игл длиной, равной десяти радиусам передней кромки, расположенных с шагом в 5% хорды, удалось снизить сопротивление на 20% по сравнению с исходным крылом, этого оказалось недостаточно по сравнению с тонким крылом, как видно из табл. 1 [66].

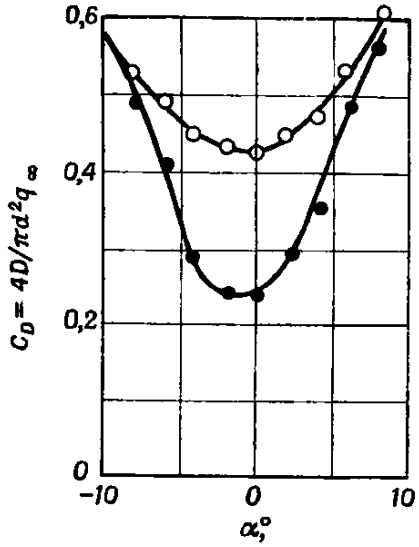
Однако путем соответствующей комбинации профилей, игл и средств увеличения подъемной силы, по-видимому, можно получить толстое крыло с лучшими аэродинамическими характеристиками, чем у тонкого крыла.

При сверхзвуковых скоростях струя воздуха, вытекающая из вершины тупоносого тела навстречу потоку (аэродинамическая игла), приводит к образованию конической области отрыва перед телом, как перед твердой иглой (фиг. 29). Эксперименты [67] показали, что при малых углах атаки аэродинамическая игла вызывает снижение сопротивления, но при больших углах атаки коническая область отрыва почти полностью исчезает и сопротивление снижается очень незначительно (фиг. 30); не наблюдается также существенных изменений подъемной силы и продольного момента по сравнению с телом без иглы.

Полная температура струи была такая же, как и в невозмущенном потоке. Аэродинамическая игла вызывала увеличение теплового потока к поверхности независимо от начального охлаждения или нагревания модели, поскольку вследствие вдува воздуха расход массы в пограничном слое возрастал и происходило



Фиг. 29. Аэродинамическая игла, $M = 2{,}16$, $\alpha = 0°$ [67].



Фиг. 30. Коэффициент сопротивления C_D в зависимости от α [67].

$M_\infty = 1{,}87$, $M_{струи} = 2{,}0$, $Re_d = 6{,}2\ 10^5$, d — максимальный диаметр головной части; $q_\infty = \gamma p_\infty M_\infty^2)/2$; ○ полусферическая головная часть; ● полусферическая головная часть с аэродинамической иглой.

турбулентное перемешивание [67]. Аэродинамическая игла с воздухом более низкой температуры может уменьшить тепловой поток.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lindfield A. W., Pinsent H. G., Pinsent P. A., Approximate Methods for Calculating Three-dimensional Boundary Layer Flow on Wings, Boundary Layer and Flow Control, ed. G. V. Lachmann, Pergamon Press, N. Y., Vol. 2, 1961.
2. Bollay W., A Non-linear Wing Theory and its Application to Rectangular Wings of Small Aspect Ratio, *Z. angew. Math. Mech.*, 19, № 1, (Feb. 1939).
3. Gersten K., Non-linear Airfoil Theory for Rectangular Wings in Compressible Flow, NASA RE 3-2-59W, Feb. 1959.
4. Gersten K., Nichtlineare Tragflügel mit kleinem Seitenverhältnis, *Ing.-Archiv.*, 30, № 6, 431—452 (1961).
5. Cheng H. K., Aerodynamics of a Rectangular Plate with Vortex Separation in Supersonic Flow, *J. Aeronaut. Sci.*, 22, № 4 (April 1955).
6. Brown C. E., Michael W. H., On Slender Delta Wings with Leading-edge Separation, NACA TN 3430, April 1955.

7. Adams M. C., Leading-edge Separation from Delta Wing at Supersonic Speeds, Readers' Forum, *J. Aeronaut. Sci.*, **20**, № 6, 430 (June 1953).
8. Edwards R. H., Leading-edge Separation from Slender Delta Wing, Readers' Forum, *J. Aeronaut. Sci.*, **21**, № 2, 134—135 (Feb. 1954).
9. Mangler K. W., Smith J.H.B., Calculations of the Flow Past Slender Delta Wings with Leading-edge Separation, RAE Rept, № Aero. 2593, May 1957.
10. Pappas C. E., Kunen A. E., An Investigation of the Aerodynamics of Sharp Leading-edge Swept Wings at Low Speeds, *J. Aeronaut. Sci.*, **21**, № 10 (Oct. 1954).
11. Bergensen A. J., Porter J. D., An Investigation of the Flow Around Slender Delta Wings with Leading-edge Separation, Princeton University, Dept. of Aero Engineering, Rept № 510, May 1960.
12. Sacks A. H., Nielsen J. N., Goodwin F. K., A Theory of the Low -speed Aerodynamics of Straight and Swept Wings with Flow Separation, Vidya Rept, № 91, Vidya Research and Development, Palo Alto, Calif., March 1963.
13. Multhopp H., Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings, ARC R & M 2884, 1955.
14. Sacks A. H., Burnell J. A., On the Use of Impact Theory of Slender Configurations Exhibiting Flow Separation, Vidya Rept, № 91, Vidya Research and Development, Palo Alto, Calif., March 1963.
15. Küchemann D., A Simple Method of Calculating the Span and Chordwise Loading on Straight and Swept Wings of any given Aspect Ratio at Subsonic Speeds, ARC R & M 2884, 1955.
16. Spangler S. B., Sacks A. H., Nielsen J. N., The Effect of Flow Separation from the Hull on the Stability of a High-speed Submarine, Part I: Theory, Vidya Rept, № 107, Vidya Research and Development, Aug. 1963.
17. Cooke J. C., Brebner G. G., The Nature of Separation and Its Prevention by Geometric Design in a Wholly Subsonic Flow, Boundary Layer and Flow Control, Vol. 1, ed. by G. V. Lachmann, Pergamon Press, N. Y., 1961, p. 144—185.
18. Stratford B. S., An Experimental Flow with Zero Skin Friction Throughout its Region of Pressure Rise, *J. Fluid Mech.*, 5, 17 (1959).
19. Wortmann F. X., Experimentelle Untersuchungen an neuen Laminarprofilen für Segelflugzeuge und Hubschrauber, *Z. Wiss.*, 5, № 8, 228—243 (Aug. 1957); также British MOS translation TIL/T, A 906.
20. Pearcey H. H., Shock-induced Separation and its Prevention by Design and Boundary Layer Control, Boundary Layer and Flow Control, Vol. 2, ed. by G. V. Lachmann, Pergamon Press, N. Y., 1961.
21. Kuethe A. M., Schetzer J. D., Foundations of Aerodynamics, Wiley, N.Y., sec. ed., 1959.
22. Lindfield A. W., Brief Review of Theoretical Interpretations of the Slot Effect, Boundary Layer and Flow Control, Vol. 1, ed. by G.V. Lachmann, Pergamon Press, N.Y., 1961, p. 186—195.
23. Schubauer G. B., Spangenberg W. G., Forced Mixing in Boundary Layers, *J. Fluid Mech.*, 8, Part 1, 10—32 (1960).
24. McCullough G. B., Nitzberg G. E., Kelly J. A., Preliminary Investigation of the Delay of Turbulent Flow Separation by Means of Wedge-shaped Bodies, NACA R & M A 50L12.
25. Incompressible Aerodynamics, Fluid Motion Memoirs, ed. by B. Thwaites, Oxford, at the Clarendon Press, 1960, p. 210—213, 223.
26. Prandtl L., Magnuseffekt und Windkraftschiff, *Naturwissenschaften*, **13**, № 93 (1925).
27. Flettner A., Die Anwendung der Erkenntnisse der Aerodynamik zum Windantrieb von Schiffen, *Jb. schiffbautech. Ges.*, **25**, № 222 (1924).

28. Glauert M. B., The Flow Past a Rapidly Rotating Circular Cylinder, *Proc. Roy. Soc.*, A, **242**, 108 (217) (1959).
29. Himmelskamp H., Profiluntersuchungen an einem umlaufenden Propeller, Mitt. Max-Planck-Inst. StrömForsch., vol. 2 (1950).
30. Бэнкс, Гэдд, Задерживающее влияние вращения на ламинарный отрыв, *Ракетная техника и космонавтика*, № 4 (1963).
31. Schubauer G. B., Spangenberg W. G., Effect of Screens in Wide-angle Diffusers, NACA Rept, 949, 1949.
32. Roshko A., On the Drag and Shedding Frequency of Bluff Bodies, NACA TN 3169, July 1954.
33. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, ИЛ, М., 1956.
34. Iglisch R., Exakte Berechnung der laminaren Reibungschicht an der längsangeströmten ebenen Platte mit homogener Absaugung, *Sch. dt. Akad. Luft. Forsch.*, 8, № 1, (1944); также NACA TM 1205, 1949.
35. Wuest W., Entwicklung einer laminaren Grenzschicht hinter einer Absaugstelle, *Ing.-Archiv*, **17**, № 199 (1949).
36. Прандтль Л., Механика вязких жидкостей, сб. «Аэродинамика», т. 3, под ред. Дюренда В. Ф., М.— Л., 1939.
37. Schlichting H., Die Grenzschicht an der ebenen Platte mit Absaugung und Ausblasen, *Luftfahrtforschung*, **19**, 293 (1942).
38. Schlichting H., Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung, *Ing.-Archiv*, **16**, 201—220 (1948); также NACA TN 1216, 1949.
39. Torda T. P., Boundary-layer Control by Continuous Surface Suction or Injection, *J. Math. Phys.*, **31**, № 3, 206—213 (1952).
40. Torda T. P., Boundary-layer Control by Distributed Surface Suction or Injection, Bi-parametric General Solution, *J. Math. Phys.*, **32**, № 4, 312—314 (1954).
41. Head M. R., Approximate Methods of Calculating the Two-dimensional Laminar Boundary Layer with Suction, Boundary Layer and Flow Control, vol. 2, ed. by G. V. Lachmann, Pergamon Press, N.Y., 1961.
42. Trilling L., The Compressible Boundary Layer with Pressure Gradient and Suction, *J. Aeronaut Sci.*, **17**, 335—341 (1950).
43. Hurley D. G., The Use of Boundary-layer Control to Establish Free Stream-line Flows, Boundary Layer and Flow Control, Vol. 1, ed. by G.V., Lachmann, Pergamon Press, N.Y., 1961.
44. Thwaites B., On the Momentum Equation in Laminar Boundary-layer Flow — A New Method of Uniparametric Calculation, ARC R & M 2587, 1952.
45. Ringleb L., Computation of the Laminar Boundary Layer with Suction, *J. Aeronaut. Sci.*, **19**, 48 (1952).
46. Wieghardt K., Für Berechnung ebener und drehsymmetrischer Absaugung, *Ing.-Archiv*, **22**, 147—157 (1956).
47. Truckenbrodt E., Ein einfaches Näherungsverfahren zum Berechnung der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung, *Forsch. Ing.-Wes.*, **22**, 147—157 (1956).
48. Görtler H., On the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows, *J. Math. Mech.*, **6**, 1 (1957).
49. Görtler H., On the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows with Continuous Suction, *J. Mech.*, **6**, № 3 (1957).
50. Görtler H., Zahlentafeln universeller Funktionen zur neuen Reihe für die Berechnung laminaren Grenzschichten, Bericht № 34 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, 1957.
51. Thwaites B., A Theoretical Discussion of High-lift Aerofoils with Leading-edge Porous Suction, ARC R & M 2242, London, 1946.
52. Poppleton E. D., Boundary-layer Control for High Lift by Suction at the Leading Edge of a 40° Sweep-back Wing, ARC R & M 2897, London, 1951.

53. Groth E. E., Boundary Layer Suction Experiments at Supersonic Speeds, Boundary Layer and Flow Control, Vol. 2, ed. by G. V. Lachmann, Pergamon Press, N.Y., 1961.
54. Wagner F. G., Design and Engineering Features for Flap Suction and Combined Blowing and Suction, Boundary Layer and Flow Control, Vol. 1, ed. by G. V., Lachmann, Pergamonn Press, N.Y., 1961.
55. Chapman D. R., A Theoretical Analysis of Heat Transfer in Regions of Separated Flow, NACA TN 3792, Oct. 1956.
56. Low G. M., The Compressible Laminar Boundary Layer with Fluid Injection, NACA TN 3404, 1955.
57. Illingworth C. R., The Effect of Heat Transfer on the Separation of a Compressible Laminar Boundary Layer, Quart. *J. Mech. Appl. Math.*, 3, Oxford at Clarendon Press (1954).
58. Abbott D. E., Holt M., Nielsen J. N., Investigations of Hypersonic Flow Separation and its Effects on Aerodynamic Control Characteristics, Technical Documentary Report ASD-TDR-62-963, Itek Corporation, Vidya Division, Palo Alto, Calif., Nov. 1962.
59. Ringleb F. O., Separation Control by Trapped Vortices, Boundary Layer and Flow Control, Vol. 1, ed. by G. V. Lachmann, Pergamon Press, N.Y., 1961, p. 265—295.
60. Ringleb F. O., Discussion of Problems Associated with Standing Vortices and Their Applications, Paper presented at the ASME Fluid Engineering Division Conference, Philadelphia, May 1964.
61. Frey K. P. H., Vasuki N. C., Tests on Flow Development in Diffusers, Paper presented at the ASME Fluid Engineering Division Conference, Philadelphia, May 1964.
62. Ringleb F. O., Two-dimensional Flow with Standing Vortices in Ducts and Diffusers, *J. Appl. Mech.*, 1960.
63. Mair W. A., Experiments on Separation of Boundary Layers on Probes in Front of Blunt-nosed Bodies in a Supersonic Air Stream, *Phil. Mag.* **43**, seventh ser. (July 1952).
64. Hunt G. K. Supersonic Wind-tunnel Study of Reducing the Drag of a Bluff Body at Incidence by Means of a Spike, Royal Aircraft Establishment Rept Aero. 2606, May 1958.
65. Album H. H., Spiked Blunt Bodies in Supersonic Flow, Air Force Office of Scientific Research, Waschington, DC, Rept, AFOSR 307, June 1961.
66. Hartley R. M., Leading-edge Spikes to Reduce the Drag of Wings at Supersonic Air Speeds, the David Taylor Model Basin Aero. Rept, 925, Sept. 1957.
67. Brindle C. C., Malia M. J., Longitudinal Aerodynamic and Heat-transfer Characteristics of a Hemisphere-cylinder Missile Configuration with an Aerodynamic Spike, the David Taylor Model Basin Aero. Rept, 1061, July 1963.
68. Abbott, Doenhoff, Theory of Wing Sections, McGraw Hill Book Co.

БИБЛИОГРАФИЯ

Black J. Sarnecki A. J., The Turbulent Boundary Layer with Suction or Injection, Fluid Motion Sub-Committee, Aeronautical Research Council, ARC 20, 501, FM 2745, Oct. 1958.

Carrow D. D., A Note on the Boundary Layer and Stalling Characteristics of Aerofoils, Performance Sub-Committee, ARC, Perf. 697, S & C 2435, Oct. 1950.

Chang P. K., Drag Reduction of an Airfoil by Injection of Sound Energy, *J. Aerospace Sci.* (Sept. 1961).

Faulders C. R., An Aerodynamic Investigation of Vaned Diffusers for Centrifugal Compressors, Gas Turbine Lab., MIT, Jan. 1954.

Goldstein R. J., Tsou F. K., Eckert E. R. G., Film Cooling in Supersonic Flow, Heat Transfer Lab., Univ. of Minnesota, Institute of Technology, Minneapolis, Minn., HTL-TR, № 54, Dec. 1963.

Goldstein S., Low-drag and Suction Airfoils, *J. Aeronaut. Sci.*, **15**, № 4, 189—220 (April 1948).

Green L., Jr., Nall K. L., Experiments on Porous-wall Cooling and Flow Separation Control in a Supersonic Nozzle, *J. Aerospace Sci.*, **26**, № 11, 689—697 (Nov. 1959).

Gregory N., Pankhurst R. C., Walkor W. S., Wind Tunnel Tests on the Prevention of Boundary Layer Separation by Distributed Suction at the Rear of a Thick Airfoil, ASTIA.

Hartley R. M., Furey R. J., Letendre R. P., Jr., Leading-edge Wedges to Reduce the Drag of Thick Wings at Supersonic Speeds and to Increase Lift at Low Speeds, Department of the Navy, the David Taylor Model Basin, Aerodynamics Lab., Research and Development Rept, № 2102, Aug. 1965.

Hartofilis S. A., Pressure Measurement at Mach 19 for a Winged Reentry Configuration: Part of an Investigation of Hypersonic Flow Separation and Control Characteristics, Flight Control Div., Aeronautical Systems Div., Tech. Documentary Rept, № ASD-TDR-63-319, May 1963.

Хартуниан, Спенсер, Результаты экспериментального исследования интенсивного вдува, *Ракетная техника и космонавтика*, № 8 (1967)

Henghan D. M., Note on the Comparison of a «Wake Brake» and a Parachute for Landing of Aeroplanes, *J. Roy. Aeronaut. Soc.*, pp. 201—205, March 1954.

Holder D. W., Pearcey H. H., A Method for Providing Warning of the Onset of Buffeting, Stalling and Other Undesirable Effects of Flow Separation, *J. Roy. Aeronaut. Soc.*, p. 674 (Sept. 1958).

Hoskin N. E., The Laminar Boundary Layer on a Rotating Sphere, Fifty Years of Boundary Layer Research, Braunschweig, 1955, p. 127—131.

Jackson S. B., Gunstone G. L., Henghan D. M., The Comparison of a «Wake Brake» and a Parachute for Landing of Aeroplanes, *J. Roy. Aeronaut. Soc.*, pp. 371—372 (May 1954).

Jones R. T., Effects of Sweepback on Boundary Layer and Separation, NACA Rept., № 884, 1947.

Kaufman L. G., II, Pressure Measurements for Mach Five Flows Over a Blunt Pyramidal Configuration with Aerodynamic Controls: Part of an Investigation of Hypersonic Flow Separation and Control Characteristics, Air Force Flight Dynamics Lab., Research and Techn. Div., Rept., № RTD-TDR-63-4239, Jan. 1964.

King H. H., The Diffusion of Injected Gas in Separated Flow, *J. Aerospace Sci.* (April 1962).

King H. H., Baum E., Effect of Base Bleed on the Laminar Base Flow, Electro-optical Systems, Inc., Research Note 10, May 1963.

Ludwig G. R., An Experimental Investigation of Laminar Separation from a Moving Wall, AIAA 1st Aerospace Sciences Meeting, NY, Preprint № 64-6, Jan. 1964.

ПРИЛОЖЕНИЕ

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

А. И. Голубинский, Г. И. Майкапар, В. Я. Нейланд

Многообразие форм отрывных течений, часто трехмерных и нестационарных, зависящих от характера течения в пограничном слое и слое смешения, затрудняет их теоретический анализ и расчет. За последние годы экспериментально обнаружены ранее неизвестные свойства отрывных течений. Вследствие накопления экспериментального материала и расширения возможностей расчета (применение машин) в последнее время произошли существенные сдвиги в расчете отрывных течений, что совсем не отражено или недостаточно отражено в книге Чжена.

Прежде всего следует упомянуть расчет отрывных течений путем решения уравнений Навье — Стокса с помощью численных методов. К сожалению, такие решения пока удается получить для сравнительно небольших чисел Рейнольдса.

При больших числах Рейнольдса представляют интерес течения невязкой жидкости с постулированными на основании опыта тангенциальными (вихревыми) поверхностями разрыва скорости, которые можно рассматривать как отрывные течения при числе Рейнольдса, равном бесконечности. Весьма важные результаты получены с помощью асимптотических методов решения уравнений Навье — Стокса при числе Рейнольдса, стремящемся к бесконечности, которые являются развитием классической теории пограничного слоя Прандтля. Эти методы применяются в тех случаях, когда нарушаются основные предположения теории пограничного слоя, например вследствие изменения граничных условий. К таким случаям относятся и характерные области отрывных течений (отрыва и присоединения). При отрыве сверхзвукового потока эти области могут приобретать общие «локальные» свойства, не зависящие от конкретного вида отрывного течения, что способствовало дальнейшему развитию теории сверхзвуковых отрывных течений и стимулировало пересмотр представлений об отрыве при малых скоростях. Хотя при достаточно больших числах Рейнольдса течение в пограничном слое становится турбулентным, интервал больших докритических чисел Рейнольдса представляет практический интерес, а результаты, получаемые с помощью асимптотических методов, позволяют осуществить общий анализ отрывных течений, определить критерии подобия и, несомненно,

будут полезны для решения полных уравнений Навье — Стокса. Поскольку асимптотические методы недостаточно широко известны, в списке литературы к третьему разделу приложения указаны работы [2—17, 64], в которых излагаются эти методы.

Среди свойств отрывных течений, обнаруженных экспериментально, очень важны для практики особенности аэродинамического нагрева при сверхзвуковых скоростях, связанные с появлением узких областей («пиков») теплового потока в местах присоединения.

Информация о перечисленных выше результатах теоретических и экспериментальных исследований отрывных течений имеется только в статьях, опубликованных после издания монографии Чжена. Работы, выполненные в Советском Союзе, в книге отражены недостаточно. Настоящее приложение не является обзором литературы по отрывным течениям за 1966—1972 гг., а предназначено для ознакомления читателя с существенно важными новыми результатами, перечисленными выше.

Разделы 1, 2 написаны А. И. Голубинским, разделы 3, 4 — В. Я. Нейландом, разделы 5, 6 — Г. И. Майкапаром.

1. РАСЧЕТ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

В связи с быстрым усовершенствованием вычислительных машин в последнее время появилось много работ, в которых задачи о течении вязкой жидкости и газа при наличии отрывов и зон с возвратно-циркуляционными течениями решаются численными методами. В этих работах система уравнений Навье — Стокса аппроксимируется конечно-разностной системой первого или второго порядка точности, которая решается затем каким-либо итерационным методом.

Из довольно большого числа работ, посвященных численным решениям уравнений Навье — Стокса для жидкости и газа, рассмотрим несколько опубликованных в последнее время работ, в которых были получены и исследованы течения с развитыми зонами отрыва.

В работах [1, 2] исследовалось течение вязкой несжимаемой жидкости в расширяющемся двумерном канале, стенки которого становятся параллельными на большом расстоянии вверх и вниз по потоку (ширина канала на выходе в два раза превосходила ширину на входе). Для расчетов использовался численный метод, основанный на введении в уравнения малого параметра, сводящего численную процедуру в конечном счете к решению систем линейных алгебраических уравнений на каждом шаге итерации. Расчеты показали, что при числе Рейнольдса Re, вычисленном по ширине входной части и равном 8π, возникают возвратные течения небольшой

протяженности, при Re = 32л наблюдалась хорошо выраженная застойная зона с установившимся возвратно-циркуляционным течением, а при Re > 200л процесс итераций не сходится и последовательные приближения колеблются, не стремясь ни к каким пределам.

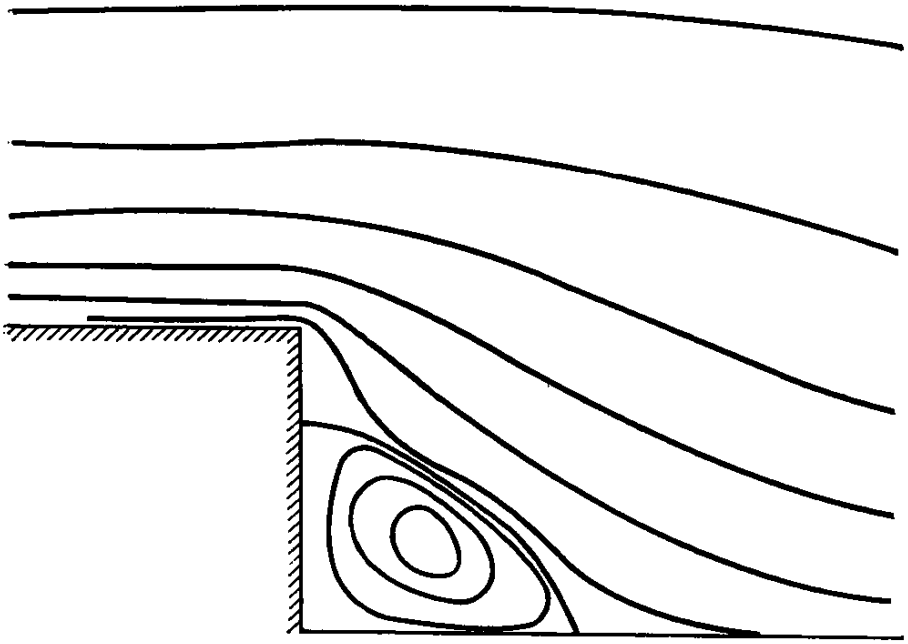
Течение в канале с прямоугольным вырезом рассматривалось в работах [3, 4] при числах Re порядка 100. Удалось наблюдать структуру отрывного течения в вырезе с образованием вторичных вихрей в углах выреза, а также форму разделяющей линии тока, оказавшейся вогнутой при малых и выпуклой при больших числах Рейнольдса.

Обтекание вязкой жидкостью тел цилиндрической формы рассчитывалось в ряде работ, большинство из которых имело скорее методический или поисковый характер из-за трудностей достаточно точной аппроксимации уравнений Навье — Стокса и граничных условий для внешней задачи обтекания. В некоторых работах, например [5—7], были получены стационарные отрывные области за телами как при малых числах Рейнольдса, так и при довольно значительных (до нескольких сотен), хотя известно из экспериментов, что при числах Рейнольдса, больших ~40, течение за телом становится неустойчивым и возникают вихревые дорожки Кáрмана. Этот факт некоторые исследователи связывают с различной природой физической и математической неустойчивости течения в отрывной области, однако строгого и убедительного подтверждения такого мнения еще нет. Численные решения подобного рода при достаточно высоких числах Рейнольдса можно рассматривать как численные эксперименты, полезные для понимания свойств решений уравнений Навье — Стокса.

Из работ, посвященных интегрированию нестационарных уравнений Навье — Стокса, отметим недавно опубликованные работы [8, 9], где применялась неявная схема, в которой предполагалось, что величина вихря в какой-либо точке поля зависит от значений функции тока и вихря в соседних точках в тот же момент времени. В отличие от явных схем, применяемых в более ранних работах, неявная схема позволяет достаточно точно учесть нелинейные эффекты и, что не менее важно, избавиться от искусственной неустойчивости, вносимой явной схемой. Путем расчетов удалось проследить за образованием вихревых дорожек за телами прямоугольной формы при Re до 650. Сравнение с экспериментом показало общее сходство картин течения, однако наблюдались значительные расхождения в частоте отрыва вихрей [9].

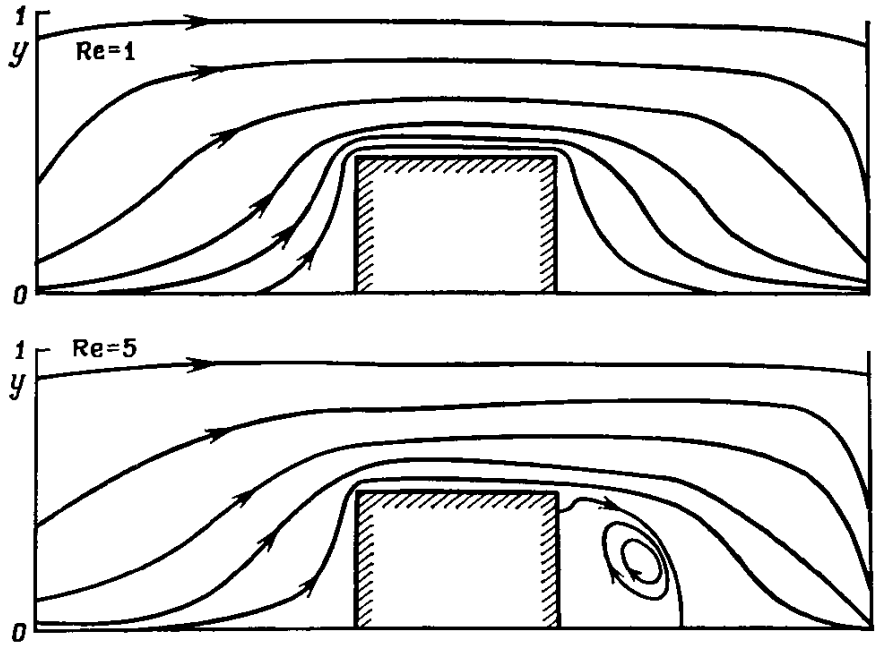
В немногочисленных исследованиях отрывных течений вязкого газа численными методами, например [10—13], выполненных для малых и умеренных значений Re (до нескольких сотен) и сверхзвуковых чисел Маха (до 3—5), в основном подтверждаются схематические представления о картине течения в области отрыва

(фиг. 1, 2). В работе [13], в частности, качественно подтверждается наличие вязкого слоя смешения, образующегося в угловой точке донного среза тела и окруженного почти невязким потоком. Расчеты течения за донным срезом были выполнены до $Re = 4 \cdot 10^3$, уравнения Навье — Стокса аппроксимировались с помощью явной схемы с пересчетом, обеспечивающим второй порядок точности относительно пространственных шагов расчетной сетки.

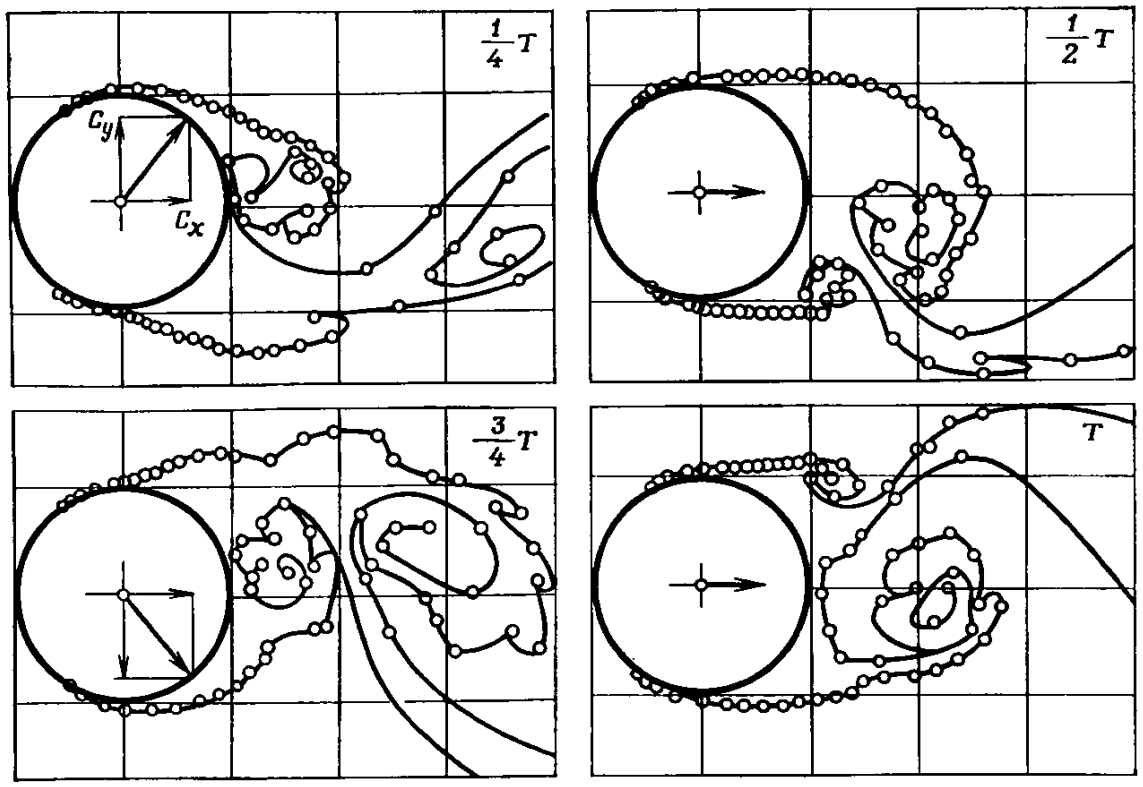


Фиг. 1. Пример расчета отрывного течения за донным срезом. Картина линий тока при $M = 5$, числе Рейнольдса $Re = 800$ [13].

В последнее время были проведены некоторые расчеты отрывных нестационарных течений идеальной (невязкой) жидкости, в которых заранее постулировалось наличие тангенциальных разрывов, начинающихся на поверхности тела [14, 15]. Возможно, что такие течения отражают в основных чертах истинное течение при очень больших числах Рейнольдса, хотя полной ясности в этом вопросе еще не достигнуто. Одним из важных вопросов является в этом случае определение положения точки отрыва в каждый момент времени. В случае обтекания пластины с острыми кромками под большим углом атаки, когда положение точек отрыва на кромках можно постулировать заранее, расчеты показывают довольно правдоподобную картину нестационарного отрывного течения со сходом вихрей с кромок пластины. При нестационарном обтекании гладких тел (например, цилиндра) точка отрыва перемещается по поверхности тела и ее положение заранее неизвестно. В работе [14] предполагается, что в этой точке тангенциальный отрыв направлен по касательной к поверхности тела. В рамках численной схемы расчета с применением дискретных вихрей, распределенных по тан-



Ф и г. 2. Пример расчета отрывного обтекания прямоугольника. Картина линий тока при M = 0,3 и различных числах Рейнольдса Re [12].



Ф и г. 3. Пример расчета отрывного обтекания цилиндра идеальной жидкостью. Вихревая пелена в различные моменты времени в пределах одного периода T [14].

генциальному разрыву, этого предположения оказалось достаточно для однозначного решения задачи в каждый момент времени. Известно, однако, что при $\mathrm{Re} \to \infty$ как в стационарном, так и в нестационарном случае необходимо удовлетворить еще условию конечного градиента давления в окрестности точки отрыва, что эквивалентно требованию конечной и непрерывной кривизны тангенциального разрыва в точке отрыва. В работе [14] это условие, по-видимому, удовлетворяется автоматически за счет сглаживания функций при численном счете. Конкретные расчеты обтекания цилиндра с заранее внесенной начальной асимметрией течения показывают, что течение довольно быстро принимает периодический характер независимо от вида начальной асимметрии (фиг. 3) с периодом схода вихрей с тела порядка (9—10) r_0/V_∞ (r_0 — радиус цилиндра, V_∞ — скорость набегающего потока), что довольно хорошо согласуется с экспериментальными результатами.

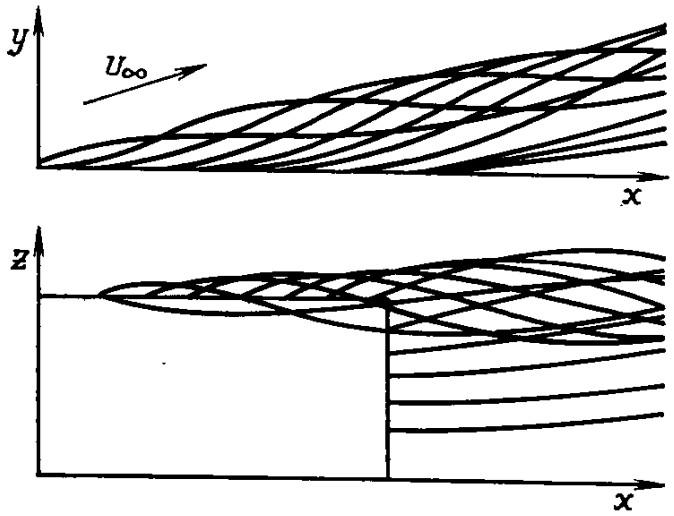
ЛИТЕРАТУРА

1. Дородницын А. А., Меллер Н. А., О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье — Стокса, *ЖВМ* и *МФ*, 8, № 2 (1968).
2. Дородницын А. А., Меллер Н. А., Применение метода малого параметра к решению уравнений Навье — Стокса, Труды II республиканской конференции по аэрогидромеханике, теплообмену и массообмену, издание Киевского гос. ун-та, 1971.
3. Симуни Л. М., Численное решение задачи движения жидкости в прямоугольной яме, *ПМТФ*, № 6 (1965).
4. Мета, Лаван, Течение в двумерном канале при наличии впадины прямоугольной формы, *Труды американского общества инженеров-механиков*, сер. Е, *Прикладная механика*, № 4 (1969).
5. Keller H. B., Takami H., Numerical studies of steady viscous flow about cylinder. Numerical solutions of nonlinear differential equations, New York — London — Sydney, 1966.
6. Son J. S., Hanratty T. J., Numerical solution for the flow around a cylinder of Reynolds numbers of 40, 200 and 500, *J. Fluid Mechanics*, 35, № 2 (1969).
7. Бабенко К. И., Введенская Н. Д., Орлова М. Г., Результаты расчета обтекания бесконечного цилиндра вязкой жидкостью, Препринт ин-та Прикл. матем. АН СССР, 1971.
8. Tompson J. F., Computer experimentation with an implicit numerical solution of the Navier — Stokes equations for an oscillating body, AIAA Paper № 69-185, 1969.
9. Takamatsu Y., A comparative study of the flow field about an oscillating flat plate with the numerical solution of the Navier — Stokes equations, AIAA Paper № 69-226, 1969.
10. Мышенков В. И., Дозвуковое и трансзвуковое течение вязкого газа в следе плоского тела, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 2 (1970).
11. Мышенков В. И., Численное исследование течений вязкого газа в следе плоского тела, *ЖВМ* и *МФ*, № 3 (1972).
12. Мышенков В. И., Численное решение уравнений Навье — Стокса для задачи обтекания прямоугольника потоком газа, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 4 (1972).

13. Браиловская И. Ю., Явные разностные методы для расчета отрывных течений вязкого сжимаемого газа, сб. «Некоторые применения метода сеток в газовой динамике», вып. IV, Изд-во МГУ, 1971.
14. Ильичев К. П., Постоловский С. Н., Расчет нестационарного отрывного обтекания тел плоским потоком невязкой жидкости, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 2 (1972).
15. Белоцерковский С. М., Ништ М. И., К расчету срывного нестационарного обтекания тонкого профиля, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 3 (1972).

2. ОТРЫВ ПОТОКА С КРОМОК КРЫЛА

Обтекание крыла конечного размаха с отрывом потока с боковых и передних кромок при умеренных и больших углах атаки привлекает все большее внимание исследователей в связи с возра-



Фиг. 4. Пример расчета вихревой пелены около прямоугольного крыла, обтекаемого несжимаемой жидкостью под углом атаки 15° [2].
а — вид сбоку; *б* — вид сверху.

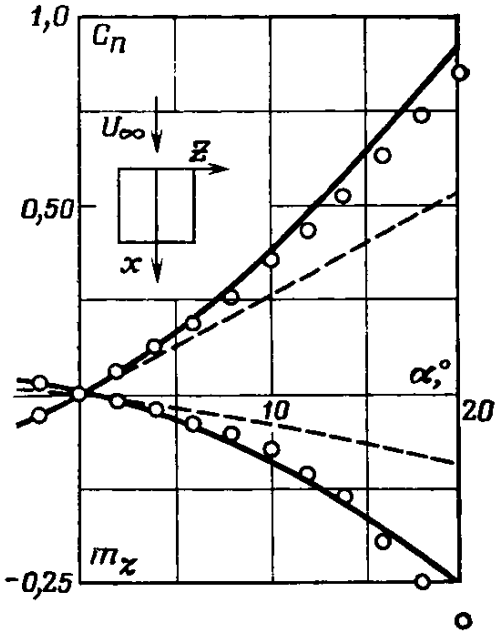
стающей практической важностью этого вопроса. В дополнение к краткому изложению в книге Чжена приведем некоторые интересные результаты, полученные в последнее время.

На основе общепринятой и оправдавшей себя на практике схемы расчета, в которой жидкость считается невязкой, но постулируется наличие вихревых пелен (тангенциальных разрывов), сходящих не только с задней кромки (постулат Жуковского), но с боковых и передних кромок крыла при достаточно больших углах атаки, были получены новые аналитические результаты и выполнены конкретные расчеты, хорошо согласующиеся с экспериментом.

В работе [1] на основе факта, что к крыльям предельно малого удлинения приложим закон плоских сечений, сводящий пространственную задачу вихревого обтекания к задаче двумерного нестационарного обтекания пластины, были выведены законы подобия.

В частности, дополнительная подъемная сила прямоугольного крыла, обусловленная отрывом потока с боковых кромок, пропорциональна углу атаки в степени $^5/_3$ и удлинению в степени $^1/_3$, что согласуется с результатами работ [5—8] гл. XII.

Известный численный метод расчета тонкого крыла конечного размаха в несжимаемом потоке с заменой вихревой пелены дискретными подковообразными вихрями был обобщен для расчета нелинейной задачи обтекания крыла с учетом схода вихревой пелены не только с задней, но также с боковых и передних кромок крыла [2]. Выполненные расчеты обтекания крыльев при умеренных и больших углах атаки хорошо совпадают с экспериментальными данными (фиг. 4,5), а также качественно подтверждают закон подобия.



Фиг. 5. Сравнение расчетных и экспериментальных значений аэродинамических коэффициентов прямоугольного крыла с удлинением 1 [2].
○ эксперимент; ---- линейная теория.

При расчете обтекания крыльев конечной толщины с острыми кромками важно знать направление схода вихревой пелены. Из анализа условий схода вихревой пелены с заостренной под конечным углом кромки было показано [3], что пелена сходит по касательной к верхней или нижней поверхностям крыла в зависимости от направления течения около кромки крыла, а также от знака завихренности. Лишь в отдельных точках, где завихренность или средняя скорость течения обращаются в нуль, пелена может сходить под углом как к нижней, так и к верхней поверхностям.

Расчеты обтекания треугольного крыла (ромбовидного поперечного сечения) [4] были выполнены при допущении о справедливости закона плоских сечений для крыльев предельного малого удлинения и при замене вихревой пелены дискретными вихрями. Как показало сравнение с экспериментом, результаты расчетов с качественной стороны правильно отражают влияние толщины крыла на характеристики обтекания. В этом случае вихревая пелена сходила с кромки крыла по касательной к нижней поверхности крыла (при положительных углах атаки).

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский А. А., Законы подобия для трехмерного стационарного отрывного обтекания тел жидкостью и газом, *Ученые записки ЦАГИ*, № 1 (1970).

2. Белоцерковский С. М., Расчет обтекания крыльев произвольной формы в плане в широком диапазоне углов атаки, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 4 (1968).
3. Mangler K. W., Smith J. H. B., Behaviour of the vortex sheet at the trailing edge of a lifting wing, *Aeronautical J.*, (Nov. 1970).
4. Smith J. H. B., Calculations of the flow over thick conical, slender wings with leading-edge separation, ARC R & M, № 3694, 1972.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С НЕВЯЗКИМ ПОТОКОМ

При обтекании тел сверхзвуковым потоком и больших значениях числа Re отрыв часто происходит с гладкого участка контура тела, на котором, согласно теории безотрывного обтекания невязким газом, градиент давления равен нулю или даже отрицателен. Следовательно, в реальном течении перед точкой отрыва должно возникать такое взаимодействие пограничного слоя со сверхзвуковым потоком, которое индуцирует большие положительные градиенты давления. Чепмен дал качественное объяснение механизма взаимодействия и назвал течение перед точкой отрыва течением со свободным взаимодействием.

В работах [18—19] для этого течения найдено асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса при $\mathrm{Re} \to \infty$. Это решение по виду существенно отличается от решения, получаемого в классической теории пограничного слоя. Напомним, что в теории пограничного слоя [1] для построения равномерного асимптотического приближения приходится рассматривать две области течения с продольной координатой порядка длины тела. Течение в одной из них (с поперечным размером того же порядка) описывается уравнениями Эйлера, которые при $M > 1$ относятся к гиперболическому типу. Другая область — вязкий пограничный слой — имеет толщину, в $\mathrm{Re}^{-1/2}$ раз меньшую, а соответствующие уравнения относятся к параболическому типу. Таким образом, возможность передачи информации (возмущений) вверх по потоку, которая соответствует полным уравнениям Навье — Стокса, исключена.

Согласно результатам [18—19], асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса различно в трех областях, расположенных около точки отрыва и имеющих малую длину порядка $\mathrm{Re}^{-3/8}$. Внешняя область имеет поперечный размер, соизмеримый с ее длиной, а течение в ней описывается в первом приближении линейной теорией сверхзвуковых течений. Вторая область имеет поперечный размер $\sim\mathrm{Re}^{-1/2}$, профили скорости в ней в первом приближении совпадают с профилями в невозмущенном пограничном слое перед областью свободного взаимодействия. Возмущения малы и в первом приближении не влияют на распределение давления. Третья область — пристеночный слой вязкого течения толщиной $\sim\mathrm{Re}^{-5/8}$.

Изменение его толщины индуцирует во внешнем сверхзвуковом потоке градиент давления, вызывающий отрыв. Течение описывается уравнениями обычного пограничного слоя несжимаемой жидкости, но в этих уравнениях градиент давления не задан заранее, а должен определяться в процессе решения из условий совместности с внешним сверхзвуковым потоком. Это условие и известная формула Аккерета линейной теории сверхзвуковых течений позволяют выразить градиент давления через вторую производную от толщины вытеснения вязкой области течения. Таким образом, в уравнениях пограничного слоя появляется старшая (вторая) производная по продольной переменной от неизвестной функции — толщины вытеснения. Это делает необходимым задание еще одного дополнительного краевого условия, кроме начальных и граничных условий на поверхности тела и на внешней границе пограничного слоя. Поскольку появляется не частная, а полная производная по продольной переменной, то достаточно задать не функцию, а лишь одну константу, в данном случае — положение точки отрыва.

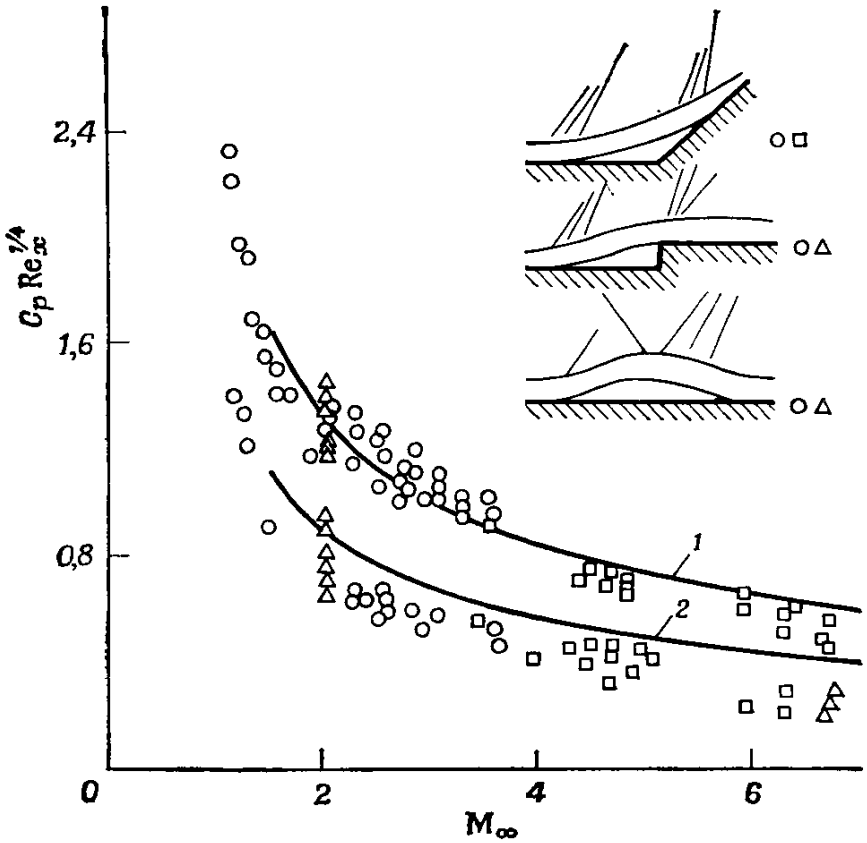
Положение точки отрыва зависит от граничных условий, заданных вниз по течению. Таким образом, в решении конкретной задачи сказываются свойства исходных уравнений Навье — Стокса (эллиптического типа).

Уже первое асимптотическое приближение дает неплохое совпадение с экспериментальными данными для значений коэффициента давления в точке отрыва и в области «плато» давления, появляющейся при переходе в развитую зону отрыва [20] (фиг. 6).

Вследствие локального характера асимптотического течения из уравнений, записанных в безразмерных переменных, можно исключить все параметры: Re, M, температурный фактор. Таким образом, полученное универсальное решение описывает все течения, а формулы перехода к физическим переменным устанавливают закон подобия для этих течений. Второе приближение показывает, что для более точного описания необходимо учитывать перепад давления в поперечном направлении [18]. Таким образом, все приближенные подходы, основанные на использовании уравнений пограничного слоя (например, описанные Чженом интегральные методы), не могут в принципе дать более точные результаты, чем теория первого приближения.

Асимптотическая теория течений около точек отрыва, развитая в работах [18—19], может быть использована для широкого класса задач, в которых влияние малых, но быстрых изменений краевых условий передается вверх по течению за счет локального взаимодействия пограничного слоя (а точнее, медленного вязкого течения в нижней части пограничного слоя) с невязким сверхзвуковым потоком. Так как механизм передачи возмущений вверх по потоку для всех течений этого типа одинаков, то уместно распространить

на все эти случаи понятие «течения со свободным взаимодействием». В работах [21—23] показано, что краевая задача для течений сжатия [18—19], сформулированная в безразмерных переменных, имеет также семейство решений, описывающих течения разрежения.

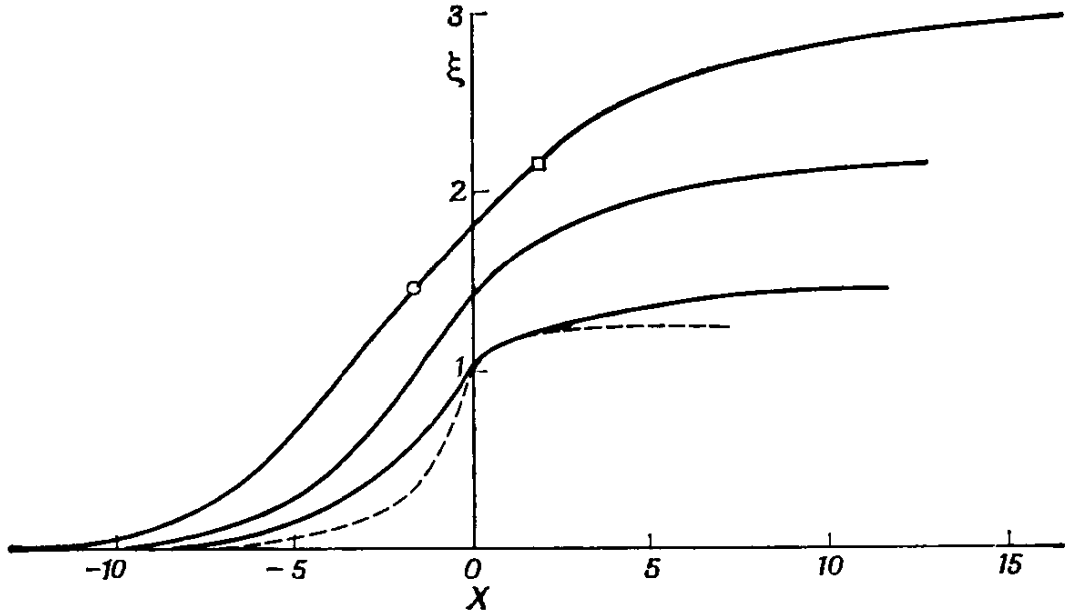


Фиг. 6. Сравнение теоретических и экспериментальных значений коэффициента давления в точке отрыва и в области «плато» развитой отрывной зоны. ——— расчет [18, 20], экспериментальные данные, приведенные в работе [62]: ○ Чепмен, Кун, Ларсон (1958); □ Стеррет, Эмори (1960); △ Хаккинен, Гребер, Триллинг, Абарбанел (1959). *1*—область «плато», *2*—точка отрыва.

Если в течениях сжатия градиент давления достигает максимальной величины около точки отрыва и затем падает, а трение убывает и за точкой отрыва достигает минимума [20], то в течениях разрежения градиент давления непрерывно возрастает (по модулю) и при некотором конечном значении продольной координаты обращается в бесконечность. В этой точке решение имеет особенность для напряжения трения и теплового потока к телу.

В работе [21] эти решения используются для описания течения перед донным срезом на расстояниях порядка $Re^{-3/8}$ от него. Безразмерный перепад давлений (отнесенный к скоростному напору), передаваемый от донной области отрыва вверх по потоку, имеет порядок $Re^{-1/4}$, который характерен для всех течений со свободным взаимодействием. Особая точка решения показы-

вает, что на меньших расстояниях аналитическая природа асимптотического решения и характер течения изменяются. Подробнее эта часть течения с $\Delta p \sim O(1)$ будет рассмотрена ниже. Согласно результатам работы [21], вблизи донного среза возможно резкое увеличение теплового потока и напряжения трения. В работах



Фиг. 7. Распределение давления при обтекании угловых точек контура тела сверхзвуковым потоком вязкого газа [24].

$$\xi = 2C_p \operatorname{Re}^{1/2} \left[\frac{2B\mu_\infty}{a\mu_w} \right]^{1/2},$$

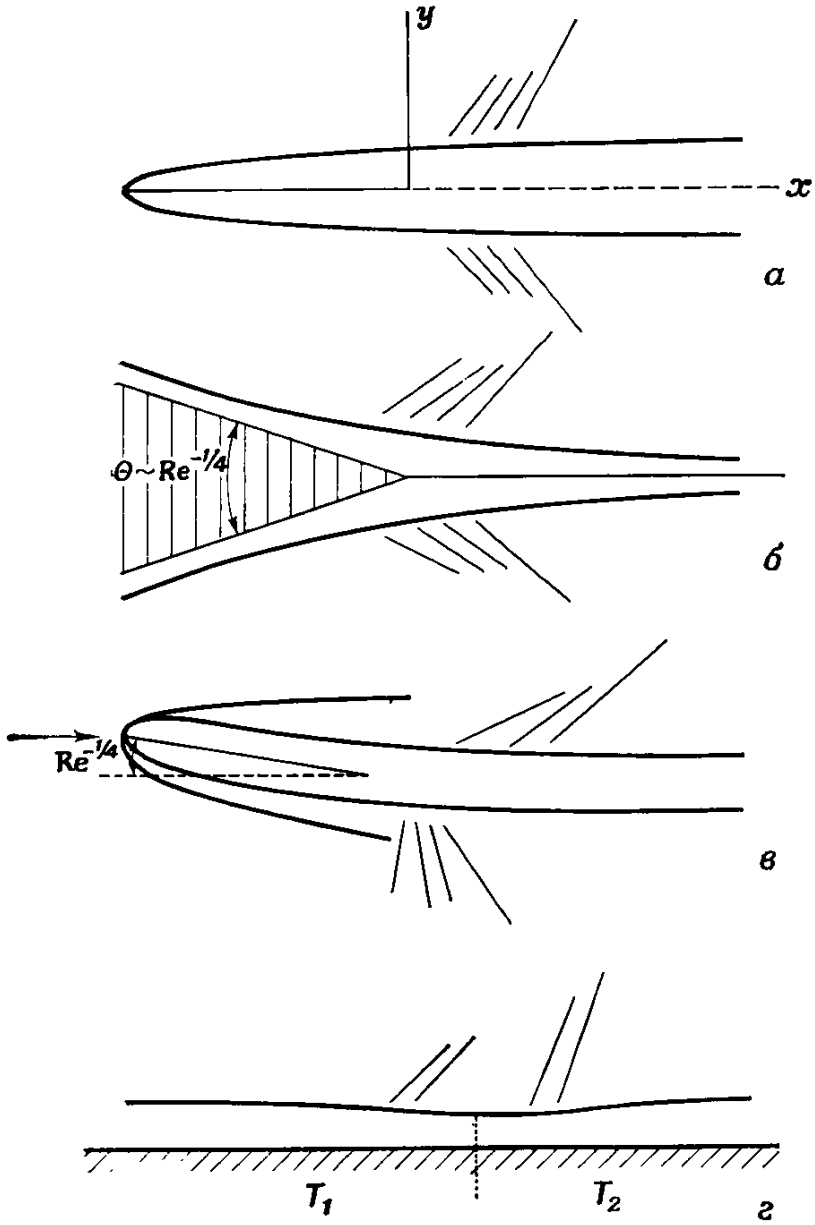
$$B = (M_\infty^2 - 1)^{1/2},$$

$$X = \frac{x\operatorname{Re}^{3/8}}{l} \left[8B^3 \left(\frac{\rho_w}{\rho_\infty} \right)^2 a^5 \frac{\mu_w}{\mu_\infty} \right]^{1/4},$$

$a = (\partial u/\partial y)_w\, l \operatorname{Re}^{-1/2}/u_\infty$ — градиент давления, вычисленный в невозмущенном пограничном слое перед областью взаимодействия.

[22, 23] теория течений со свободным взаимодействием используется для изучения течений разрежения, возникающих при обтекании сверхзвуковым потоком угловых точек контура тела, если углы поворота малы ($\sim \operatorname{Re}^{-1/4}$). В работе [22] дано линеаризованное решение задачи, справедливое для углов поворота $\alpha \ll \operatorname{Re}^{-1/4}$. Некоторые численные решения для $\alpha \sim \operatorname{Re}^{-1/4}$ приведены в работах [23, 24]. В последней работе в рамках теории течений со свободным взаимодействием исследованы также течения сжатия около угловых точек и при падении на пограничные слои слабых ударных волн, имеющих перепады давлений порядка $\operatorname{Re}^{-1/4}$. Показано, что в первом приближении краевые задачи для этих двух типов течений совпадают всюду вне области длиной $\sim \operatorname{Re}^{-1/8}$ при соответствующем подборе амплитуды падающей ударной волны и угла отклонения стенки. Вычислен критический перепад

давления, приводящий к появлению отрыва пограничного слоя [24]. Законы подобия обобщены и для этих течений. Получены численные решения для ряда течений, в том числе для течений,



Фиг. 8. Схемы сверхзвуковых течений, описываемых теорией свободного взаимодействия.

включающих зоны отрыва длиной $\sim Re^{-3/8}$. Некоторые результаты в переменных подобия показаны на фиг. 7.

Достаточно общая и простая форма закона подобия для течений со свободным взаимодействием, относительно простой вид уравнений и краевых условий и, наконец, тот факт, что полученные результаты уже в первом приближении имеют удовлетворительную точность при не слишком больших амплитудах возму-

щений, являются точными в пределе и приводят к четкому представлению о вкладе различных физических эффектов — все это стимулирует развитие приложений теории к более широкому классу течений.

На фиг. 8 показаны примеры таких сверхзвуковых течений. Первый пример (фиг. 8, *а*) — обтекание кормовой части пластины конечной длины. В области $x > 0$ условие прилипания $u(x, 0) = 0$ заменяется условием симметрии $u_y(x, 0) = 0$. Следуя [18], оценим амплитуды возмущений и размеры областей, на которые оно распространяется. Исчезновение напряжения трения на оси течения приводит к разгону струек тока, проходящих вблизи плоскости симметрии. Это вызывает быстрое изменение толщины вытеснения и индуцирует градиент давления. Простые оценки на основе уравнений неразрывности, импульса и линейной теории сверхзвуковых течений показывают, что вблизи конца пластины образуется локальная область течения со свободным взаимодействием, для которой перепад давления (отнесенный к $\rho_\infty u_\infty^2$) $\Delta p \sim \mathrm{Re}^{-1/4}$, $\Delta x \sim \mathrm{Re}^{-3/8}$. Перед концом пластины индуцируется отрицательный градиент давления, а в следе давление восстанавливается. При $(\Delta x/\mathrm{Re}^{-3/8}) \to \infty$ градиент давления исчезает. Аналогичное рассмотрение справедливо и для течения при малых углах атаки $\alpha \sim \mathrm{Re}^{-1/4}$ (фиг. 8, *в*) [25]. В этом случае перед концом пластины на ее верхней и нижней сторонах поток поворачивает на угол $\pm\alpha$. Поворот на угол $+\alpha$ при достаточной величине α должен приводить к отрыву пограничного слоя. Критический перепад давления, вызывающий отрыв, несколько больше, чем в случае обтекания угла, образованного двумя стенками. Это объясняется наложением отрицательного градиента давления, вызываемого сходом потока с пластины, как при $\alpha = 0$.

Аналогичные результаты можно получить для обтекания хвостовой части профиля (фиг. 8, *б*). Наконец, приведем интересный пример течения (фиг. 8, *г*). Здесь перепады давления $\Delta p \sim \mathrm{Re}^{-1/4}$ индуцированы на длине $\Delta x \sim \mathrm{Re}^{-3/8}$ по обе стороны точки, в которой температура поверхности тела претерпевает разрыв. На этой длине в слое толщиной $\mathrm{Re}^{-5/8}$, как это следует из уравнения энергии, температура, плотность и, следовательно, толщина струек тока меняются на порядок. При этом, согласно линейной теории сверхзвуковых течений, индуцируется перепад давления $\Delta p \sim \mathrm{Re}^{-1/4}$. В свою очередь Δp оказывает влияние на течение в пристеночном слое уже в первом приближении. Основная часть пограничного слоя под действием $\Delta p \sim \mathrm{Re}^{-1/4}$ меняет толщину вытеснения лишь на величину порядка $\mathrm{Re}^{-3/4}$, что учитывается лишь во втором приближении. Так как толщина $\sim\varepsilon$ прогревается лишь на длинах $\Delta x \sim 1$, что вызывает $\Delta p \sim \varepsilon$, прогрев струек тока основной части пограничного слоя является несущественным и оказывает влияние лишь во втором приближении.

Существенный интерес представляют приложения теории свободного взаимодействия к течениям жидкости. В работах [25—29] эта теория была применена к исследованию течения вблизи кормовой части пластины и профиля. В работах [27, 28] рассматривалось симметричное обтекание пластины. Как и для сверхзвуковых течений вблизи задней кромки, оказалось необходимым рассматривать три области: узкий слой вязкого течения толщиной $\sim \mathrm{Re}^{-5/8}$, невязкое завихренное течение в области той же толщины, что и невозмущенный пограничный слой на пластине, и слабо возмущенный внешний потенциальный поток. Решение вверху по течению сращивалось с решением Блазиуса, а внизу по течению — с известным решением задачи для ламинарного следа [29].

В работе [25] сделана попытка распространить решения на случай обтекания плоской пластины под малыми углами атаки с целью оценки влияния сил вязкости на величину циркуляции, которая для невязкого течения определяется условием Жуковского, а также исследовать возникновение отрыва на задней кромке пластины. Из-за наличия угла атаки перед задней кромкой пластины на верхней стороне индуцируется неблагоприятный (положительный) градиент давления. Вместе с тем на расстояниях свободного взаимодействия индуцируется благоприятный (отрицательный) градиент давления. Оба эффекта имеют одинаковые по порядку величины при углах атаки $\alpha \sim \mathrm{Re}^{-1/16}$. Поэтому можно ожидать, что критическое значение угла атаки, при котором возникает отрыв пограничного слоя на верхней стороне пластины, $\alpha \sim \mathrm{Re}^{-1/16}$. Полное решение задачи из-за трудностей вычислений в работе [25] не получено.

Симметричное обтекание потоком жидкости задней кромки профиля конечной толщины рассмотрено в работе [26] с целью установления угла раствора, при котором вблизи задней кромки начинает развиваться отрыв. Показано, что критическая величина угла имеет порядок $\mathrm{Re}^{-1/4}$.

Существенный интерес представляет работа [30]. В ней рассматривался общий случай отрыва потока несжимаемой жидкости на гладком участке контура обтекаемого тела. Исследование особенности, возникающей в решении уравнений пограничного слоя при заданном распределении давления около точки отрыва, ранее проводилось в работах [31, 32] и др. Подробнее с этими результатами можно ознакомиться в обзорной работе [33]. Однако в работе [30] показано, что в окрестности точки отрыва возникает зона свободного взаимодействия того же типа, что и в сверхзвуковом течении [18]. Существенное отличие состоит в том, что для внешней области невязкого течения вместо простых уравнений линейной теории сверхзвуковых течений необходимо использовать решения классической теории струйных течений. Отрыв потока

локально обусловлен градиентом давления, индуцируемым при свободном взаимодействии. В пределе $\mathrm{Re} \to \infty$ получается решение, удовлетворяющее условию Бриллюэна [34].

Перейдем теперь к результатам исследования течений с очень большими локальными градиентами давления. Основные положения асимптотической теории течений этого типа приведены в работе [35]. В качестве типичного примера рассматривается течение разрежения около угловой точки контура тела в сверхзвуковом потоке вязкого газа. Угловая точка может иметь небольшое скругление с малым радиусом кривизны порядка толщины невозмущенного пограничного слоя ($\sim \mathrm{Re}^{-1/2}$). В этом случае, согласно классической теории пограничного слоя, при $\mathrm{Re} \to \infty$ на большей части течения влияние вязкости исчезает и уравнения Навье — Стокса переходят в уравнения Эйлера. Вблизи поверхности тела в пределе образуется поверхность тангенциального разрыва (благодаря чему выполняются условия прилипания), которая при некоторых условиях может отрываться от поверхности тела.

Однако около угловой точки давление и угол наклона вектора скорости меняются на порядок по величине на малой длине. Тогда в области толщиной $\sim \mathrm{Re}^{-1/2}$, имеющей всегда дозвуковой участок профиля скорости, составляющие скорости u, v, нормальные и тангенциальные к поверхности тела, имеют одинаковый порядок величин. Из уравнений неразрывности и импульса следует, что на длинах $\sim \mathrm{Re}^{-1/2}$ в окрестности угловой точки продольный и поперечный градиенты давления имеют одинаковый порядок. Использование этих оценок при совершении предельного перехода $\mathrm{Re} \to \infty$ в уравнениях Навье — Стокса приводит к уравнениям Эйлера. Однако решения уравнений Эйлера не позволяют удовлетворить условиям прилипания на контуре тела. Поэтому на длинах $\sim \mathrm{Re}^{-1/2}$ приходится рассматривать еще один, более тонкий слой, в котором главные члены уравнений Навье — Стокса, связанные с вязкостью, имеют порядок инерционных членов. Из этого условия вытекает оценка толщины области вязкого течения, которая оказывается пропорциональной $\mathrm{Re}^{-3/2}$. В случае обтекания нетеплоизолированного тела возникают дополнительные особенности предельного решения уравнения энергии, с которыми можно познакомиться в работе [21]. Использование известного принципа асимптотического сращивания решений в разных характерных областях течения (см., например, [41]) позволяет получить все необходимые граничные условия. Сращивание решений для локальной области, имеющей продольный и поперечный размеры $\sim \mathrm{Re}^{-1/2}$, и для внешнего сверхзвукового потока дает внешнее краевое условие для локальной области. Сращивание с решением в невозмущенном пограничном слое дает профили параметров в «невозмущенном набегающем потоке», т. е. при $(x/\mathrm{Re}^{-1/2}) \to -\infty$. Из-за малой толщины области вязкого течения

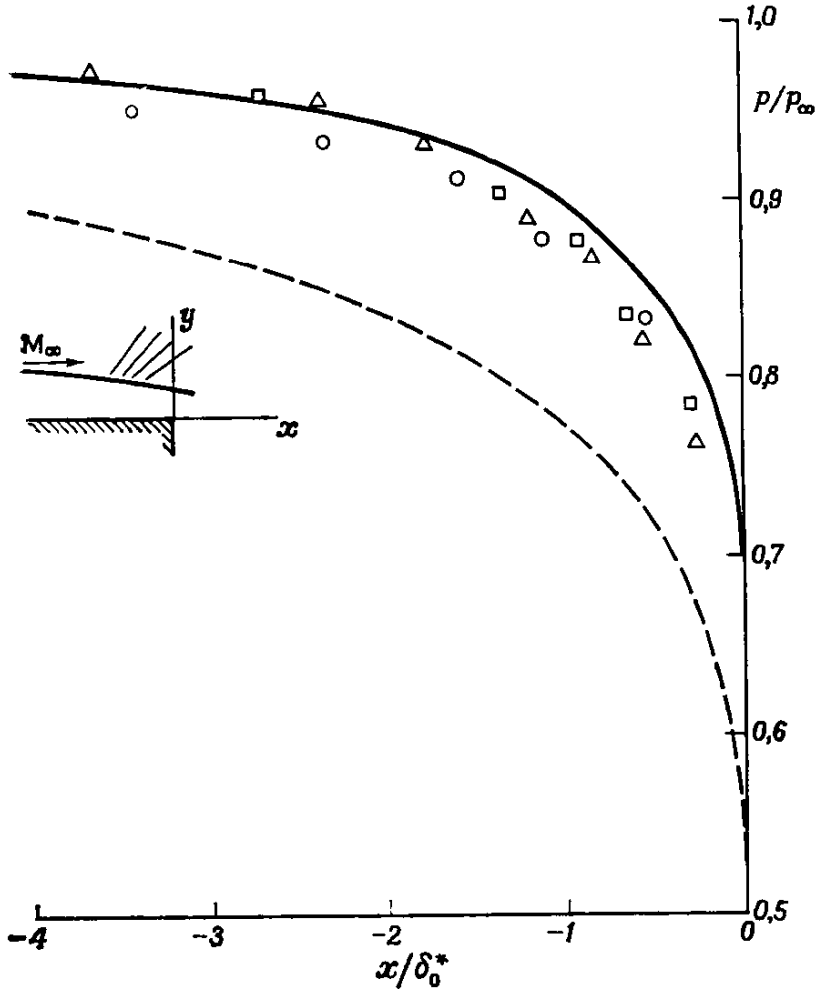
на поверхности тела для локального невязкого течения должно выполняться условие «непротекания»: $v = 0$. Решение этой краевой задачи позволяет определить распределение скорости и давления на внешней границе вязкого локального течения. Общий метод решения последней задачи [а также уравнений пограничного слоя, развивающегося в ускоряющемся потоке из бесконечно удаленной точки $(x/\mathrm{Re}^{-1/2}) \to -\infty$] предложен в работе [36].

Интересно, что существование поперечного перепада давлений и центробежных сил в области локального невязкого течения приводит к перерасширению той части завихренного течения, которая лежит вблизи поверхности тела. Давление при этом может стать меньше, чем вдали за областью поворота. Этот эффект возрастает с ростом угла поворота контура тела и делает вероятным отрыв потока на участке, где давление возрастает до предельного значения [35].

В работе [37] общие положения теории применены к расчету течения перед донным срезом тела и донной областью отрыва. Для решения задачи о локально невязком течении использован метод интегральных соотношений Дородницына [38]. Как показывает сравнение результатов расчета [37] с экспериментальными данными [39] (проведенное в работе [40]), уже для первого приближения распределение давления вдоль поверхности тела определяется достаточно точно (фиг. 9). В работе [40] также в рамках асимптотической теории рассмотрено течение перед донным срезом, но только при гиперзвуковой скорости внешнего невязкого потока. Взаимодействие гиперзвукового потока с пограничным слоем на основной части тела предполагается слабым ($M_\infty\tau \ll 1$, где τ — характерный наклон эффективной границы, образованной толщиной вытеснения пограничного слоя). В этом случае изменение давления на порядок величины происходит на длинах порядка $M_\infty\tau$, однако область с большими поперечными перепадами давления имеет характерную длину порядка τ, как и при умеренных сверхзвуковых скоростях.

В работе [21] показано, что для полного описания распространения возмущений перед донным срезом, кроме области длиной $\mathrm{Re}^{-1/2}$ с перепадом давлений ~ 1, необходимо рассматривать более длинную область $\sim \mathrm{Re}^{-3/8}$ с перепадом давлений порядка $\mathrm{Re}^{-1/4}$, течение в которой описывается в рамках теории свободного взаимодействия [18]. Согласно работам [21, 37], при ускорении потока перед донным срезом резко увеличивается напряжение трения и в меньшей степени тепловые потоки к телу. Интересной особенностью этих течений является своеобразный эффект «запирания» возмущений, исходящих от донного среза, при достижении скорости звука на линии тока локального невязкого течения, прилегающей к поверхности тела [37]. Пока отношение давлений на поверхности тела перед областью возмущенного течения и в донной

области отрыва меньше звукового перепада, равного $[(\gamma+1)/2]^{\gamma/(\gamma-1)}$, где γ — отношение удельных теплоемкостей газа, ускорение потока в области локального невязкого течения происходит таким образом, что давление непосредственно перед донным срезом равно донному давлению. При этом расширение сверхзвуковых струек

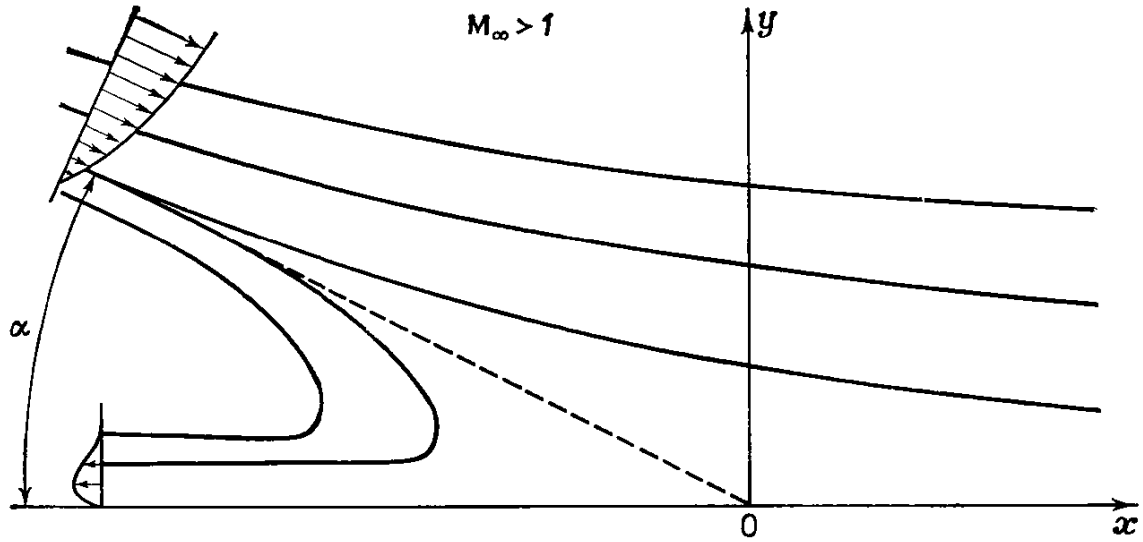


Фиг. 9. Сравнение теоретических и экспериментальных данных по распределению давления перед донным срезом для двумерного сверхзвукового потока.

——— расчет [37]; — — — гиперзвуковое приближение [40]; $M_\infty=3{,}15$; δ_0^* — толщина вытеснения ламинарного пограничного слоя перед областью взаимодействия; экспериментальные данные [39]: △ $M_\infty=4{,}02$, $Re=1{,}2\cdot10^4$; □ $M_\infty=3{,}15$, $Re=1{,}5\cdot10^4$; ○ $M_\infty=2{,}35$, $Re=4{,}4\cdot10^4$.

тока происходит за счет сужения дозвуковых, лежащих ближе к поверхности тела. Однако, когда полный перепад давлений достигает указанного выше критического значения, число Маха на поверхности тела (в локально невязкой части течения) достигает звукового значения. Дальнейшее расширение потока перед донным срезом невозможно, и около угловой точки формируется центрированная волна разрежения. Дальнейшее уменьшение донного давления не влияет на течение перед донным срезом. Это

обстоятельство упущено из виду в работе [23] при сравнении с экспериментальными данными, полученными при $M_\infty = 2{,}75$ и падении давления за областью поворота до 0,32 от исходного значения. Эксперимент показывает, что перед угловой точкой уменьшение давления составляет 60% от полного понижения давления, и это находится в хорошем соответствии с полученным



Фиг. 10. Схема течения в области присоединения полубесконечной двумерной сверхзвуковой струи к поверхности бесконечной плоской пластины.

в работе [37] выводом. В работе [23] упущено из виду формирование локально невязкой области течения и из рассмотрения одной лишь области свободного взаимодействия сделан вывод, что перед угловой точкой перепад давления составляет 90% полного перепада.

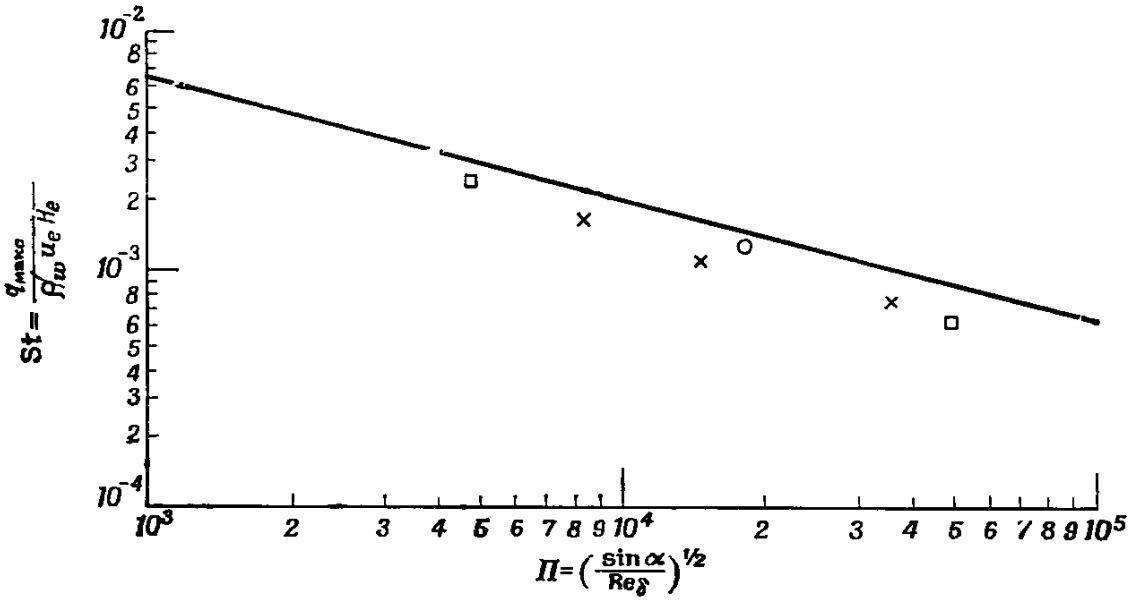
Рассмотрим теперь сверхзвуковое течение сжатия с большими локальными градиентами давления. (Давление изменяется на порядок на длинах порядка толщины пограничного слоя $\sim \mathrm{Re}^{-1/2}$.) Безотрывное обтекание твердого тела в этом случае существовать не может, так как отрыв пограничного слоя вызывается меньшими по порядку величины перепадами или градиентами давления [18]. Важный пример течения этого типа, рассмотренный в работе [42], показан на фиг. 10. Это область присоединения полубесконечной сверхзвуковой струи к поверхности плоской пластины. Левее области присоединения струя и пластина разделены областью покоящегося газа. На границе струи и газа образуется вязкая область смешения (или свободный пограничный слой), течение в которой описывается классической теорией пограничного слоя. Предполагается, что начало зоны смешения лежит на некотором расстоянии l от области присоединения. (Ниже l используется в качестве масштаба длины и при вычислении числа Рейнольдса.) Продольный и поперечный размеры локальной области невязкого

течения с большими продольными и поперечными перепадами давления, как и для течений разрежения, имеют порядок $\mathrm{Re}^{-1/2}$, так как определяются толщиной невозмущенной зоны смешения. В первом приближении течение в этой зоне описывается полными уравнениями Эйлера. В качестве профилей скорости и плотности в «набегающем потоке», согласно принципу сращивания асимптотических разложений, необходимо использовать профили для невозмущенного течения в конце зоны смешения. На внешней границе удовлетворяются условия совместности с внешним сверхзвуковым потоком, а на поверхности тела нормальная составляющая скорости равна нулю. Исследование общих свойств решения показывает, что в первом приближении давление торможения газа на разделяющей линии тока в конце зоны смешения p_0 (разделяющей в данном случае называется линия тока, приходящая на поверхность тела) должно быть равно статическому давлению на большом расстоянии за областью поворота p_∞. Как показано ниже, в действительности $p_\infty > p_0$ на величину $\sim\mathrm{Re}^{-1/4}$, что связано с эффектами вязкости. Здесь существует определенная аналогия с известным условием Чепмена — Корста для областей присоединения отрывных зон.

Прежде всего заметим, что для невязкого течения, согласно интегралу Бернулли, $p_0 \geqslant p_\infty$. Далее на основании общих теорем монотонности для вихревых течений, доказанных в работе [43], и соображений, которые приведены в работе [44] для аналогичных течений несжимаемой жидкости, показано, что при $p_0 = p_\infty$ критическая точка течения смещена в бесконечно удаленную точку вправо на поверхности тела. (Разумеется, только в масштабах $x \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$. В действительности это означает, что около критической точки существенно влияние сил вязкости.) Далее в работе [42] доказано, что в широком интервале значений начальных и граничных условий невозможны течения при $p_0 > p_\infty$. При $p_0 > p_\infty$ правее критической точки должна существовать область невязкого течения, не содержащая возвратных токов, что не позволяет удовлетворить условиям совместности с внешним сверхзвуковым потоком при $(x/\mathrm{Re}^{-1/2}) \to +\infty$ [42].

Таким образом, в первом приближении для локально невязкой области течения отбирается единственное решение, удовлетворяющее условию $p_0 = p_\infty$ и не содержащее критической точки. Исследование асимптотики затухания возмущений для этого решения приводит к необходимости изучения течения еще для области $x \sim \mathrm{Re}^{-3/8}$, в которой характерная величина перепадов давления имеет порядок $\mathrm{Re}^{-1/4}$. В этой области давление возрастает и достигает предельного значения p_∞. Здесь же расположена критическая точка течения, а решение описывается уравнениями теории свободного взаимодействия. Таким образом, первая поправка к условию Чепмена — Корста имеет порядок $\mathrm{Re}^{-1/4}$ (тот же порядок

имеет перепад давления, вызывающий отрыв пограничного слоя). Другой важный вывод состоит в том, что критическая точка в области присоединения обязательно лежит в области вязкого течения, по крайней мере для таких углов падения струи, которые



Фиг. 11. Сравнение расчетных и экспериментальных данных для максимальной величины теплового потока в области присоединения ламинарной отрывной зоны в сверхзвуковом потоке.

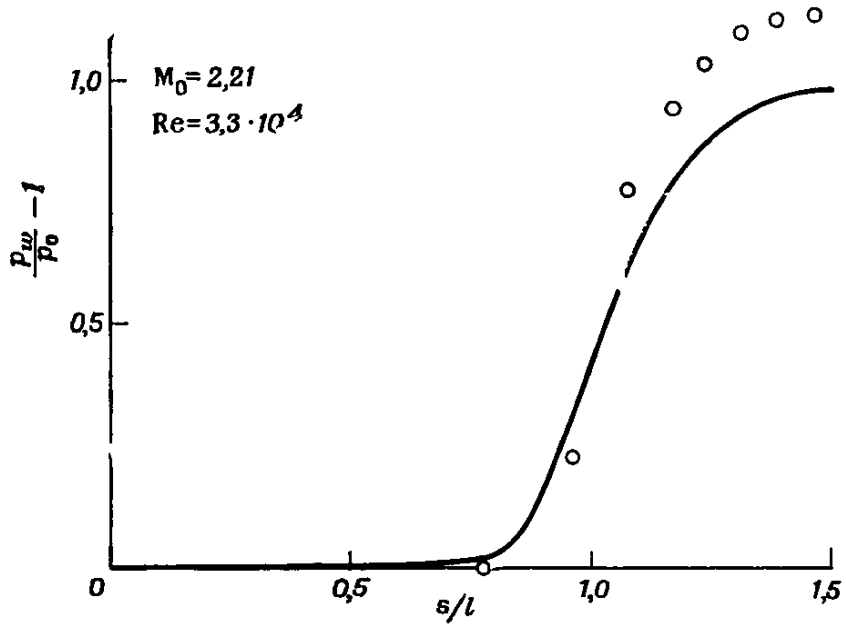
× $M_e = 3$,	$Re = 10^5$,	$g^* = 0{,}5$,	$f_w = 0$,	$g_w = 0{,}05$;
○ $M_e = 3$,	$Re = 10^5$,	$g^* = 0{,}9$,	$f_w = 0$,	$g_w = 0{,}05$;
□ $M_e = 3$,	$Re = 10^4$ и 10^6,	$g^* = 0{,}5$,	$f_w = 0$,	$g_w = 0{,}05$;
● $M_e = 3$,	$Re = 10^5$,	$g^* = 0{,}5$,	$f_w = -0{,}4$,	$g_w = 0{,}05$;

——— корреляция экспериментальных данных [63]. M_e—число Маха на границе струи до области присоединения; Re—число Рейнольдса, вычисленное по длине зоны смешения и параметрам невязкого потока до поворота; g^* и g_w—значения безразмерной энтальпии торможения газа в зоне отрыва и около поверхности тела, отнесенные к ее величине в невязком сверхзвуковом потоке; f_w—безразмерная функция тока на линии тока, приходящей на поверхность тела, в переменных Лиза—Дородницына [42]; St—максимальное значение числа Стэнтона; $q_{макс}$—максимальный тепловой поток в области присоединения; ρ_w—плотность газа при температуре стенки и давлении за областью поворота; α—угол падения струи; Re_δ—число Рейнольдса, вычисленное по толщине зоны смешения до области поворота; H_e — энтальпия торможения на границе струи.

соответствуют повороту при присоединенном косом скачке уплотнения для течения невязкого газа.

В работе [42] исследуется также распределение тепловых потоков в области присоединения. Сравнение расчетных данных для максимальных значений тепловых потоков с экспериментальными данными, собранными в работе [63], приведено на фиг. 11. Для расчета тепловых потоков в нижней части области локально невязкого течения рассмотрены узкие области течения, в которых существенны эффекты вязкости и теплопроводности. В качестве краевых условий для этих областей использованы результаты численного решения задачи для невязкого течения, полученные с помощью несколько модифицированного метода интегральных

соотношений Дородницына [38] при использовании двух полос. Результаты расчета распределения давления по телу сравниваются с экспериментальными данными [45] на фиг. 12. Некоторое превышение экспериментальных значений по сравнению с расчетными



Фиг. 12. Распределение давления в области присоединения ламинарной отрывной зоны перед щитком в сверхзвуковом потоке.
——— расчет [42]; ○ эксперимент [45]; p_w – давление на теле; p_0 – давление до области присоединения.

объясняется тем, что расчет проведен лишь для локально невязкой области. Для улучшения совпадения расчетов с экспериментальными данными необходимо получить решения и в области свободного взаимодействия.

Полное исследование развитых зон отрыва при использовании асимптотических методов связано со значительными трудностями. Однако для простейших течений получены важные результаты. Прандтль [1], а позднее Бэтчелор [46] изучали плоские стационарные области течений несжимаемой жидкости, ограниченные замкнутыми линиями тока при $Re \to \infty$. Они показали, что если расход газа внутри такой зоны по порядку величины больше, чем расход в узких пограничных слоях на границах области, то внутри зоны при $Re \to \infty$ существует невязкое течение с постоянным значением завихренности. Для простого частного случая течения с постоянным давлением вдоль границы Бэтчелор определил величину завихренности, используя условия стационарности течения в пограничных слоях. Эти условия обобщаются для неизобарических течений несжимаемой жидкости в работе [47] и для течения сжимаемого газа в работе [42].

В работе [42] с использованием асимптотических решений для отдельных областей зоны отрыва развит приближенный (неасимптотический) метод расчета течения в развитой зоне отрыва перед щитком на теле, обтекаемом сверхзвуковым потоком газа. Поскольку предполагалось, что внутренняя часть зоны отрыва состоит лишь из одной области, ограниченной замкнутой линией тока, общая картина течения образована следующими областями: окрестностью точки отрыва длиной $\sim O\,(\mathrm{Re}^{-3/8})$, для которой найдено универсальное решение в работе [20]; областью присоединения потока к поверхности отклоненного щитка, в которой перепад давления отличается на $O\,(\mathrm{Re}^{-1/4})$ от определяемого из известного условия Чепмена — Корста; областью невязких возвратно-циркуляционных течений, в которой скорости малы (но не стремятся к нулю при $\mathrm{Re} \to \infty$), а число M мало, и поэтому завихренность почти постоянна, и, наконец, двумя пограничными слоями, отделяющими невязкое возвратно-циркуляционное течение от внешнего невязкого потока (зона смешения) и от поверхности тела.

Такая модель совместно с условиями для определения завихренности и температуры газа в возвратно-циркуляционном течении позволяет уже в первом приближении рассчитать конфигурацию зоны отрыва и тепловые потоки к телу. Однако в общем случае внутри отрывной зоны могут образоваться вторичные вихри около угловых точек контура тела или вблизи точки отрыва. Это объясняется отрывом пограничного слоя в основании возвратного течения. Их влияние на общую картину течения, форму отрывной зоны и давление в ней часто несущественно. Однако возможность таких образований в принципе не позволяет пока ответить на вопрос о существовании стационарного (хотя бы и неустойчивого) предельного решения уравнений Навье — Стокса.

В работе [20] удалось получить окончательные решения задач о полубесконечных зонах отрыва, возникающих в сверхзвуковом потоке. Однако в этих задачах возвратные течения начинаются в бесконечно удаленной области, а присоединения не происходит. Поэтому полученные решения могут практически быть использованы лишь для локального описания течений около точек отрыва в отрывных зонах конечной длины.

Интересно заметить, что решение уравнений пограничного слоя, необходимое для построения решения задачи, в работе [20] численно продолжено через точку отрыва. Хорошо известно, что при заданном значении градиента давления решение имеет особенность такого типа, которая делает невозможным продолжение численного решения задачи за точку отрыва. Подробный обзор аналитических и численных результатов, относящихся к этому вопросу, содержится в работе [33]. В работе [61] было замечено, это при специальном виде распределения давления можно избе-

жать обращения в бесконечность производных от толщины вытеснения и напряжения трения на теле.

В работе [61] был применен искусственный прием. Сначала численное интегрирование уравнений несжимаемого пограничного слоя проводилось обычным путем, т. е. при заданном распределении давления. На небольшом расстоянии перед точкой отрыва вместо давления задавалось распределение толщины вытеснения пограничного слоя в виде полинома второй или третьей степени, а давление определялось. При этом удавалось пройти через точку отрыва и даже область присоединения небольшой зоны отрыва. Таким образом решалась обратная задача. Для сверхзвукового течения со свободным взаимодействием [20] возможность прохождения через точку отрыва обеспечивалась заданием аналитической связи между величиной давления и производной от толщины вытеснения пограничного слоя. (Связь в виде формулы Аккерета.) Разумеется, решение, полученное для области за точкой отрыва, не является единственным и отвечает лишь найденному виду течения. Однако это решение отвечает условиям в критической точке возвратного течения развитой зоны отрыва, что видно из сравнения расчетного значения давления в изобарной части зоны отрыва с экспериментальными данными (фиг. 6).

Эффекты, связанные со взаимодействием внешнего невязкого потока и пограничного слоя, оказываются наиболее сильными при гиперзвуковой скорости внешнего потока, если известный параметр вязкого взаимодействия $\chi = M_\infty \tau$ не является малым. В режиме слабого взаимодействия $\chi \ll 1$, при $\chi \sim 1$ принято говорить об умеренном, а при $\chi \gg 1$ о сильном взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем [48].

В работе [49] результаты исследований свободного взаимодействия для умеренных сверхзвуковых скоростей [18] распространены на гиперзвуковые течения.

При слабом взаимодействии на основной части тела градиент давления, индуцируемый толщиной вытеснения пограничного слоя, мал и влияет на течение лишь во втором приближении. Поэтому, как и при умеренных сверхзвуковых скоростях, на участках с быстрым изменением граничных условий возникают области течений со свободным взаимодействием. В качестве примеров таких течений можно назвать течения около точек отрыва или любые другие течения, в которых при умеренных сверхзвуковых скоростях возникают области свободного взаимодействия.

При гиперзвуковых скоростях несколько изменяются масштабы параметров течения, например:

$$\frac{\Delta p}{p} \sim \chi^{1/2}, \qquad \frac{\Delta x}{l} \sim \chi^{3/4},$$

где $\Delta p/p$ — относительная величина перепада давления, а $\Delta x/l$ — протяженность области свободного взаимодействия. Легко видеть,

что при $M_\infty \sim 1$ эти параметры принимают обычный вид для умеренных сверхзвуковых скоростей.

Если взаимодействие на основной части тела не является слабым, то градиент давления, который индуцируется при обтекании внешним потоком эффективного тела, образованного толщиной вытеснения пограничного слоя, влияет на течение в пограничном слое уже в первом приближении. Таким образом, распределение давления на внешней границе пограничного слоя нельзя считать заданным и его необходимо определять при совместном интегрировании уравнений для невязкого гиперзвукового потока и пограничного слоя. При этом математическая постановка краевой задачи на всей длине тела аналогична ее постановке в локальных областях течений со свободным взаимодействием для режима умеренных сверхзвуковых скоростей [18]. Поэтому можно было ожидать появление эффектов передачи возмущений вверх по потоку на всей длине тела, т. е. зависимости решения от краевых условий, заданных вниз по потоку.

В работе [49] показано, что обычные краевые условия, заданные на поверхности тела и внешней границе пограничного слоя, и начальные условия не позволяют единственным образом определить решения задачи для режимов умеренного и сильного взаимодействия даже в первом приближении. Чтобы выделить единственное решение, необходимо задать дополнительное краевое условие — еще одну постоянную. Ею может быть величина донного давления за донным срезом, положение точки отрыва, которая может быть получена из условий совместности с решением, описывающим течение вниз по потоку. В работе [49] проведен анализ характера неединственности решения для течения около плоской пластины при $\chi = \infty$ (сильное взаимодействие).

Установлено, что при обычных краевых условиях (без дополнительного условия, задаваемого на конце тела), кроме хорошо известного автомодельного решения, полученного Лизом и Стюартсоном [48], существуют два однопараметрических семейства неавтомодельных решений уравнений пограничного слоя. В окрестности передней кромки пластины эти решения могут быть представлены в виде рядов:

$$f(\xi, \eta) \sim f_0(\eta) + \xi^{1+a} A_1 f_1(\eta) + \xi^{2(1+a)} f_2(\eta) + \ldots,$$

$$p(\xi) \sim A_0 \xi^{-1} (1 + A_1 \xi^{1+a} + A_2 \xi^{2(1+a)} + \ldots),$$

где ξ, η и f — обычные переменные Дородницына — Лиза [48]

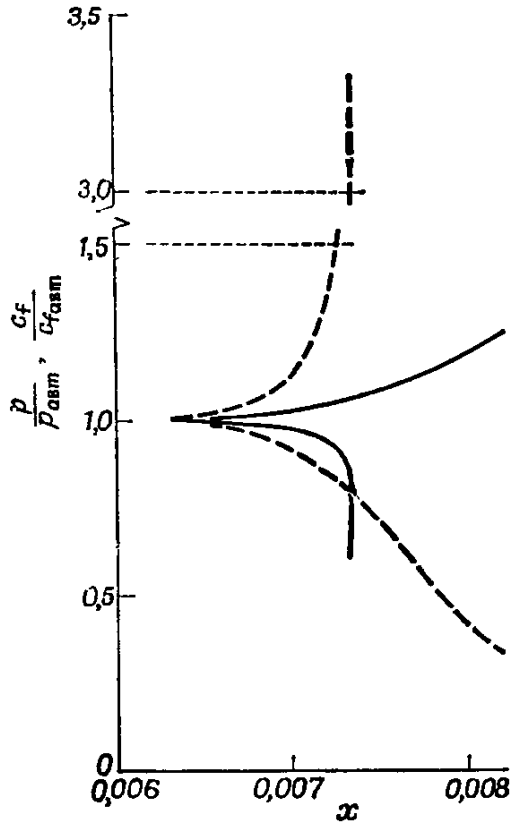
$$\xi = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \int_0^x p\, dx, \qquad \eta = (2\xi)^{-1/2} \int_0^y \rho\, dy,$$

$$u = \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

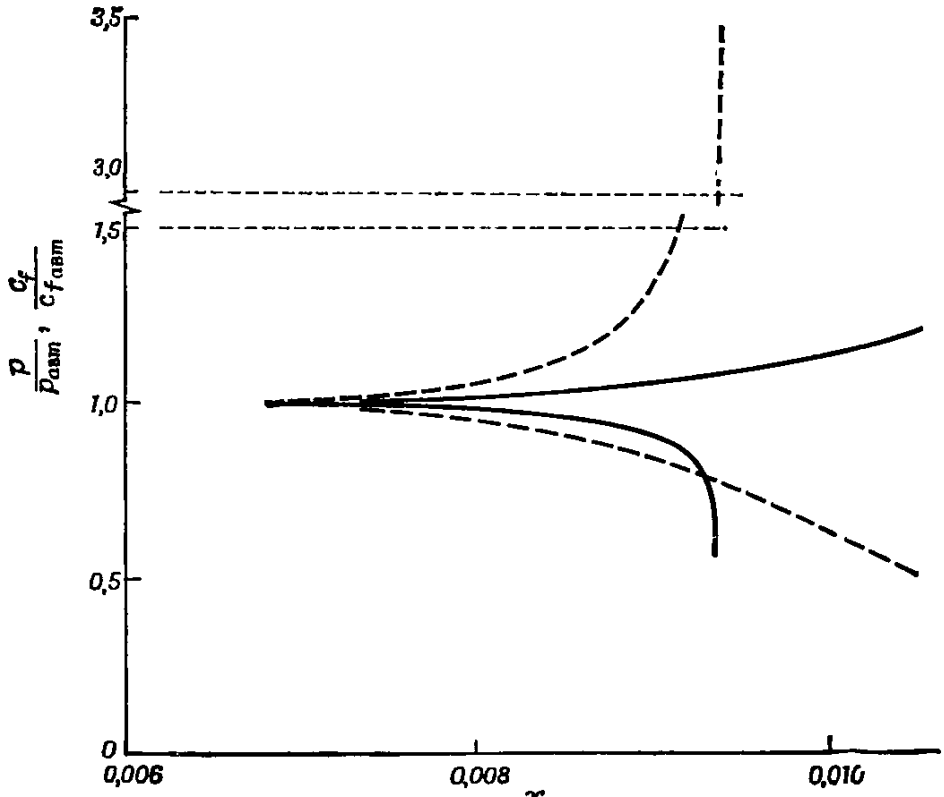
ρ — плотность, остальные обозначения встречались выше и являются общепринятыми. Первые члены разложения соответствуют автомодельному решению. Определение следующих членов может быть сведено к решению линейной однородной системы уравнений, нетривиальное решение которой существует только при «собственном» значении a и определяется с точностью до произвольной постоянной, например A_1. Следующие члены находятся однозначно (для заданного A_1) из решения линейной неоднородной системы уравнений. Показано, что в зависимости от знака A_1 давление для неавтомодельных решений всюду больше ($A_1 > 0$) или всюду меньше ($A_1 < 0$), чем для автомодельного решения. В дальнейшем для краткости изложения течения, соответствующие положительным и отрицательным значениям A_1, будут называться течениями сжатия и разрежения, хотя при $A_1 > 0$ всегда существует область около носка тела, в которой давление убывает по потоку.

В работе [52] аналогичные результаты получены для треугольного крыла и пластины, обтекаемой со скольжением, когда набегающий поток направлен не по нормали к передней кромке пластины. Установлено, что интенсивность распространения возмущений вверх по потоку возрастает с увеличением угла скольжения. Заметим, что для окончательного решения задачи о течении на треугольном крыле необходимо рассмотреть вопрос о выполнении граничных условий в плоскости симметрии. Существенный интерес представляет исследование обтекания тел вращения гиперзвуковым потоком вязкого газа, проведенное в работе [53] для всех режимов взаимодействия — от слабого до сильного. Для упрощения решения задачи рассматривались тела с толщиной, пропорциональной $x^{3/4}$, где x — расстояние от передней кромки. По сравнению с течениями около плоских тел в работе [53] замечены две интересные особенности. Эффект распространения возмущений на телах вращения слабее. Кроме того, он исчезает в предельных случаях $\chi \to 0$ и $\chi \to \infty$ и достигает максимальной интенсивности при умеренном взаимодействии.

Как видно из результатов расчетов, выполненных в работах [24, 53, 54] и приведенных на фиг. 13, величина собственного значения a является критерием интенсивности передачи возмущений вверх по потоку. С ростом a эффект уменьшается. Поэтому, согласно данным, полученным в работах [55, 56] для течения на плоской пластине, при вдуве газа через поверхность тела эффект усиливается, а при охлаждении поверхности резко ослабевает. Весьма важным является вопрос о постановке дополнительного краевого условия, используемого для отбора единственного решения задачи. В работе [49] для течений с $\chi \gtrsim O(1)$ показано, что если решение для основной части тела [длиной $(\Delta x/l) \sim 1$] не содержит особой точки, в которой трение обращается в бесконечность, то в конце области давление не может изменяться на порядок величины



а



б

Фиг. 13. Распределение давления и локального коэффициента сопротивления трения на плоской пластине при сильном взаимодействии гиперзвукового потока с ламинарным пограничным слоем [24].

а — $\gamma=7/5$, $a\approx49{,}6$; б — $\gamma=5{,}3$, $a\approx23$. ——— $p/p_{авт}$; – – – $c_f/c_{f_{авт}}$; γ — отношение удельных теплоемкостей, $p_{авт}$, $c_{f_{авт}}$ — значения параметров для автомодельного решения, x — безразмерная длина для одного из неавтомодельных решений.

на длинах $(\Delta x/l) \ll 1$. Это обстоятельство позволяет требовать непрерывности изменения величины давления при переходе к следующей области, расположенной ниже по течению. Например, для течения около плоской пластины с плоским срезом, за которым донное давление задано, необходимо отобрать то решение однопараметрического семейства, для которого давление при $x/l = 1$ равно заданному донному давлению.

На фиг. 13, *а* и *б* приведены два «стандартных» решения из работы [24], на которых представлены распределения давления для течений сжатия и разрежения. Поскольку давление отнесено к его величине для случая автомодельного решения, то достаточно осуществить преобразование продольной координаты таким образом, чтобы нужная величина этого отношения попала в точку $x/l = 1$. Согласно группе преобразований [49], величина отношения давлений при этом сохраняется.

Для течений сжатия при увеличении донного давления на интегральной кривой появляется точка отрыва. Дальнейшее увеличение донного давления приведет к перемещению точки отрыва вверх по потоку. Вопрос о решении задачи для отрывного течения разумеется, требует дальнейших исследований. Однако в работе [49] замечено, что, пока точка отрыва не переместилась на переднюю кромку, течение около поверхности описывается прежними уравнениями и сохраняется прежний масштаб всех физических параметров. В частности, сохраняется порядок угла отрыва $O(\tau)$. Если же он становится равным $O(1)$, то отрыв должен начинаться с передней кромки. Участок течения до точки отрыва описывается той же универсальной интегральной кривой. Однако для участка течения за точкой отрыва решение из-за наличия возвратных течений может в общем случае измениться.

Неавтомодельные решения для течений разрежения оканчиваются особой точкой, в которой напряжение трения на теле и абсолютная величина градиента давления обращаются в бесконечность. Однако величина давления остается конечной и положительной, равной p_1. Вопрос об отборе решения в этом случае уточнен в работе [56], где показано, что при значениях донного давления $p_д \geqslant p_1$ $[(x/l) = 1]$ вопрос решается так же, как и для течений сжатия. В этой области значений $p_д$ его изменение влияет на распределение давления по всей поверхности тела. Если $p_1 > p_д > [2/(\gamma + 1)]^{(\gamma/\gamma-1)}p_1$, то решение на основной части тела, т. е. при $0 < x/l < 1$, фиксировано и имеет на конце особую точку. Это означает, что вблизи донного среза формируется область с большими локальными градиентами давления, в которой давление на теле меняется от p_1 до $p_д$ на расстояниях порядка толщины пограничного слоя $\sim l\tau$. Изменение $p_д$ в указанных пределах влияет на течение только в локальной области. Дальнейшее уменьшение донного давления $p_д < [2/(\gamma + 1)]^{\gamma/(\gamma-1)}p_1$ уже не влияет на тече-

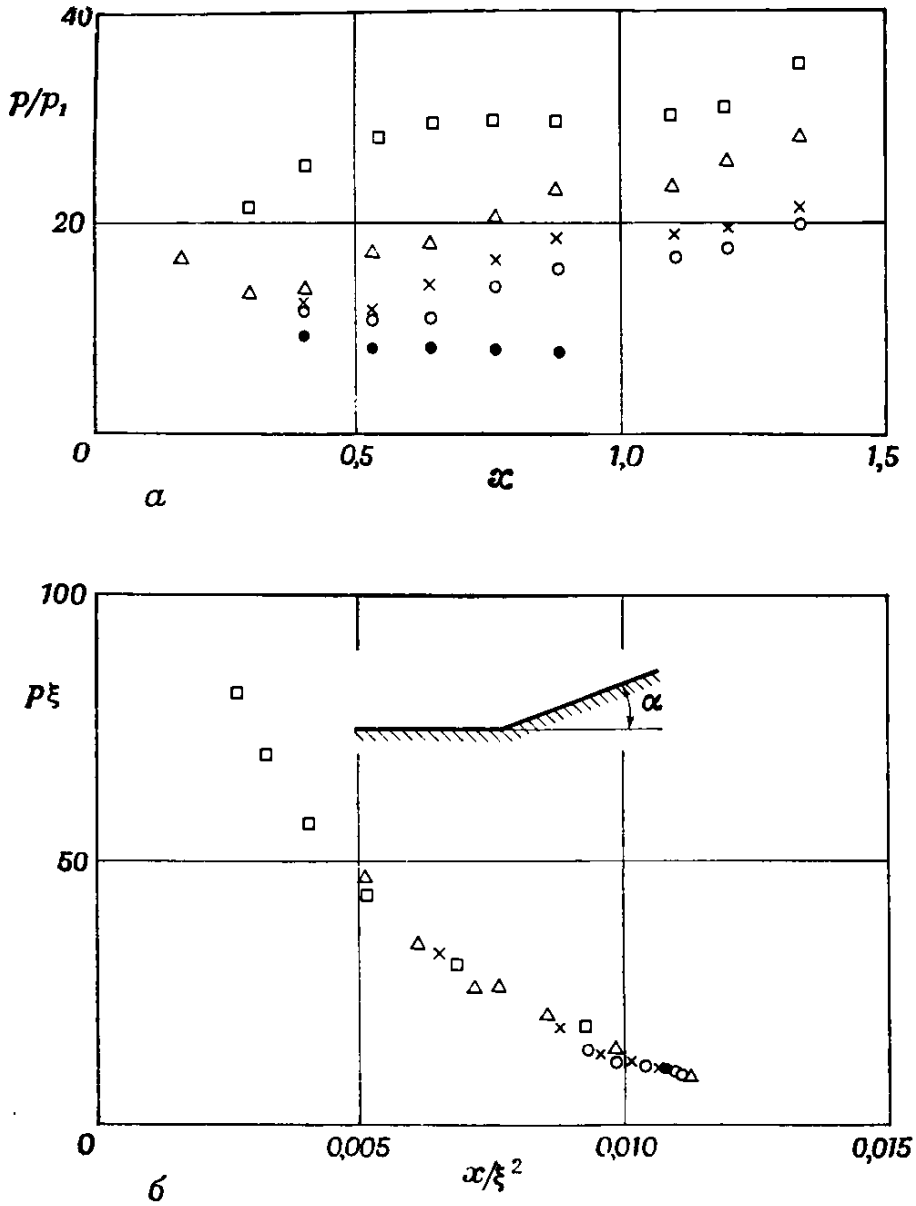
ние, так как в конце локально невязкой области течения у поверхности тела скорость потока становится звуковой и возмущения не передаются вверх по потоку. Заметим, что при этом решение существенно отличается от автомодельного, особенно вблизи донного среза.

В работе [49] показано, что краевая задача для течения на пластине при $\chi = \infty$ инвариантна относительно некоторой однопараметрической группы афинных преобразований переменных (кроме условия на задней кромке). Это позволяет свести всю совокупность неавтомодельных решений задачи к двум «стандартным» решениям, соответствующим течениям сжатия и разрежения.

Для получения различных форм закона подобия достаточно, пользуясь видом группы преобразований, сформировать такие комбинации переменных, в которых исключается произвольная постоянная преобразования. Новый закон подобия является более общим по сравнению с найденным ранее в работах [50, 51]. Теория подобия [50, 51] не является полной, так как в ней не учитывается возможность передачи возмущений вверх по потоку, при которой необходимо введение еще одного дополнительного параметра подобия. Однако она полезна для таких областей течения, где этот эффект мал. Дальнейшее исследование законов подобия с учетом распространения возмущений вверх по потоку для различных течений выполнено в работе [54]. Экспериментальная проверка законов подобия и сравнение расчетных и экспериментальных данных проведены в работах [57, 58]. Эти результаты показаны на фиг. 14, 15. Совпадение вполне удовлетворительное.

Асимптотические методы решения уравнений Навье — Стокса нашли применение к задачам обтекания малых препятствий или неровностей, расположенных в основании пограничного слоя [59, 60]. В работе [59] рассматривается обтекание несжимаемой жидкостью «единичной шероховатости», т. е. выступа с высотой, много меньшей толщины пограничного слоя. Исследуется такой режим течения, при котором число Рейнольдса, вычисленное по характерному размеру выступа и скорости внутри пограничного слоя на высоте выступа, $y \approx b$, велико. Поэтому в первом приближении для области с характерным размером порядка высоты выступа задача сводится к решению уравнений Эйлера. Использование принципа сращивания асимптотических разложений позволяет определить граничные условия в «набегающем» на выступ потоке и вдали от него. В этих местах возмущения, вносимые выступом, должны затухать. Невозмущенный поток локально имеет вид: $u \sim y$, $v = 0$. Коэффициент пропорциональности в формуле для u должен соответствовать местному значению напряжения трения на дне невозмущенного пограничного слоя. В работе [59] исследованы также течения около выступов, постепенно понижающихся вверх и вниз по потоку. Показано, что при слишком резком

уменьшении высоты выступа (круче, чем $|x|^2$) решение уравнений Эйлера обязательно содержит область возвратных течений, которая может образоваться перед выступом и за ним. Кроме того,



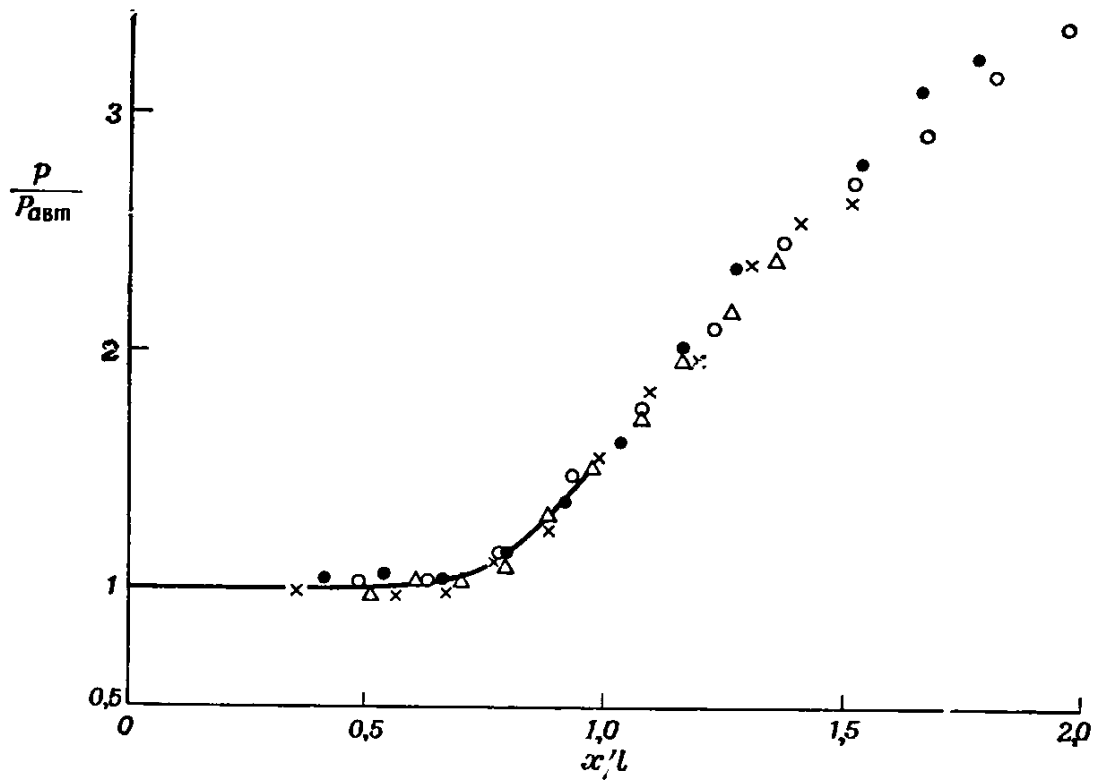
Фиг. 14. Экспериментальная проверка закона подобия для течений в режиме сильного взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем с учетом распространения возмущений вверх по потоку; M = 23,3, Re = = 1,9·10⁴ [49, 57].

а – экспериментальные результаты; *б* – те же результаты в координатах подобия; ● $\alpha=0°$; ○ $\alpha=10°$; × $\alpha=11°30'$; △ $\alpha=13°$; □ $\alpha=20°$; ξ – переменная Дородницына.

в этой работе изучен пограничный слой в нижней части локального невязкого течения.

В работе [60] исследовано обтекание малых выступов при сверхзвуковых скоростях течения во внешнем невязком потоке. Дана общая классификация режимов течений, возникающих при всех возможных комбинациях геометрических параметров и местной

толщины пограничного слоя. Сформулированы соответствующие краевые задачи и найдены параметры подобия. Для некоторых режимов проведены расчетные исследования или найдены аналитические решения. Результаты работы позволяют сделать следующие интересные выводы. Прежде всего заметное увеличение напряжения трения и тепловых потоков к поверхности тела может происходить на расстояниях, превышающих по порядку характерный



Фиг. 15. Сравнение расчетных и экспериментальных данных по распределению давления на плоской пластине со щитком при сильном взаимодействии гиперзвукового потока с ламинарным пограничным слоем; $M = 24{,}2$, $\chi = 10—16$ [58].

l — расстояние от передней кромки пластины до щитка; $p_{авт}$ — давление для автомодельного решения; ——— расчет. ○ $\alpha=90°$, $h/l=0{,}12$; × $\alpha=90°$, $h/l=0{,}08$; Δ $\alpha=10°$; ● $\alpha=0°$ (α — угол отклонения щитка, установленного на задней части пластины).

размер препятствия. При определении начала отрыва потока для препятствий, высота и длина которых одного порядка величины, на расстояниях $\sim b$ необходимо решать полные уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости (хотя внешний поток сверхзвуковой) и упрощенных краевых условий. Для тонких препятствий задача определения начала и развития отрыва существенно упрощается, так как сводится к решению уравнений Прандтля. Правда, градиент давления в них часто не задан и определяется из решения, но это не обязательно приводит к передаче возмущений вверх по течению, так как градиент давления не связан в этом случае со второй производной по x от функций течения.

Наконец, интересный результат более частного характера получен для течений около тонких препятствий при больших значениях местного числа Рейнольдса, когда для основной части возмущенной области справедливы уравнения Эйлера. Оказалось, что знак возмущений давления, вызываемых на передней части препятствия, зависит от параметра, равного отношению площади поперечного сечения препятствия к характерной площади сечения пограничного слоя $\sim \mathrm{Re}^{-1}$. Если этот параметр мал, то препятствие индуцирует разрежение, так как взаимодействие распространяется лишь на дозвуковую часть профиля пограничного слоя. Напротив, при больших значениях параметра обязательно реализуются возмущения сжатия, а на взаимодействие в основном влияет внешний сверхзвуковой поток.

ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl L., Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, III Internat. Math. Kongr., Heidelberg, 1904.
2. Friedrichs K. O., Special topics in fluid dynamics, New York, Univ., 1953.
3. Friedrichs K. O., Asymptotic phenomena in mathematical physics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **61** (1955).
4. Kaplun S., The role of coordinate systems in boundary-layer theory, *Z. angew. Math. Phys.*, 5, № 2 (1954).
5. Lagerstrom P. A., Cole J. D., Examples illustrating expansion procedures for the Navier—Stokes equations, *J. Rat. Mech. Anal.*, **4**, № 6 (1955).
6. Вишик М. И., Люстерник Л. А., Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, *Успехи матем. наук.*, **12**, вып. 5 (59) (1957).
7. Вишик М. И., Люстерник Л. А., Об асимптотике решений краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, **121** (1958).
8. Goldstein S., Flow of an incompressible viscous fluid along a semiinfinite flat plate. Lectures on fluid mechanics, Wiley, London, 1960.
9. Imai J., Second approximation to the laminar boundary-layer flow over flat plate, *J. A. S.*, **24**, № 2 (1957).
10. Чудов Л. А., О некоторых недостатках классической теории пограничного слоя, сб. «Численные методы в газовой динамике», Изд-во МГУ, вып. 2, 1963.
11. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А., О двух методах построения высших приближений по малому параметру вязкости, сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 8, 1967.
12. Ван-Дайк М., Методы возмущений в механике жидкости, изд-во «Мир», М., 1967.
13. Lighthill M. J., A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid, *Phil. Mag.*, **40**, № 7 (1949).
14. Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, v. 1, ch. 3, Dover, N. Y., 1892.
15. Kuo Y. H., On the flow of an incompressible viscous fluid past a flat plate at moderate Reynolds number, *J. Math. and Phys.*, 32 (1953).
16. Mahony J. J., An expansion method for singular perturbation problems, *J. Austral. Math. Soc.*, **2** (1962).

17. Ван-Дайк М., Теория сжимаемого пограничного слоя во втором приближении с применением к обтеканию затупленных тел гиперзвуковым потоком, сб. «Исследование гиперзвуковых течений», изд-во «Мир», М., 1964.
18. Нейланд В. Я., Сверхзвуковое течение вязкого газа вблизи точки отрыва, сб. «Аннотации докладов Третьего Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике», изд-во «Наука», М., 1968.
К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке газа, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 4 (1969).
19. Stewartson K., Williams P. G., Self-induced separation, *Proc. Roy. Soc.*, A312 (1969).
20. Нейланд В. Я., Течение за точкой отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 3 (1971).
21. Нейланд В. Я., К асимптотической теории расчета тепловых потоков около угловой точки тела, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 5 (1969).
22. Stewartson K., On laminar boundary layer near corners, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 23, № 2 (1970).
23. Stewartson K., On supersonic laminar boundary layers near convex corners, *Proc. Roy. Soc.*, A319 (1970).
24. Нейланд В. Я., К асимптотической теории взаимодействия сверхзвукового потока с пограничным слоем, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 4 (1971).
25. Brown S. N., Stewartson K., Trailing-edge stall, *J. Fluid Mech.* 42, part. 3 (1970).
26. Riley N., Stewartson K., Trailing-edge flows, *J. Fluid Mech.*, 39, part 1 (1969).
27. Messiter A. F., Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate, *S.J.A.M. of appl. math.*, № 2 (1969).
28. Stewartson K., On the flow near the trailing edge of a flat plate, *Mathematika*, 16, № 1 (1969).
29. Goldstein S., Concerning some solutions of the boundary-layer equations in hydrodynamics, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 26 (1930).
30. Сычев В. В., О ламинарном отрыве, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 3 (1972).
31. Goldstein S., On laminar boundary layer flow near a position of separation, *Quart. J. Mech. appl. Math.*, 1, part. 1 (1948).
32. Stewartson K., On Goldstein's theory of laminar separation, *Quart. J. Mech. appl. Math.*, 11, part. 4 (1958).
33. Brown S. N., Stewartson K., Laminar separation, *Annual. Review of Fluid Mech.*, 2 (1970).
34. Brillouin M., Les surfaces de glissement de Helmholtz et la résistance des fluides, *Annales de chimie et physique*, 23 (1911).
35. Нейланд В. Я., Сычев В. В., Асимптотические решения уравнений Навье — Стокса в областях с большими локальными возмущениями, *Изв. СССР, МЖГ*, № 4 (1966).
36. Нейланд В. Я., О решении уравнений ламинарного пограничного слоя при произвольных начальных условиях, *ПММ*, № 4 (1966).
37. Матвеева Н. С., Нейланд В. Я., Ламинарный пограничный слой вблизи угловой точки тела, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 4 (1967).
38. Дородницын А. А., Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэродинамики, Труды III Всесоюзного мат. съезда 1956 г., т. III, Изд-во АН СССР, 1958.
39. Хама, Оценка интенсивности краевого скачка уплотнения, *Ракетная техника и космонавтика*, № 1 (1966).
40. Олссон, Месситер, Гиперзвуковой ламинарный пограничный слой вблизи донного среза тонкого тела, *Ракетная техника и космонавтика*, № 7 (1969).
41. Kaplun S., Theory of singular perturbation with application to the asymptotic theory of Navier—Stokes equations, сб. «Fluid Mechanics and singular Perturbations», New York — London, 1967.

42. Нейланд В. Я., К асимптотической теории плоских стационарных течений со срывными зонами, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 3 (1970).
43. Никольский А. А., О плоских вихревых движениях газа, сб. «Некоторые точные решения уравнений пространственных течений газа», *Труды ЦАГИ*, 1949.
44. Таганов Г. И., К теории стационарных срывных зон, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 5 (1968).
45. Chapman D. R., Kuehn D. M., Larson H. K., Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis of the effect of transition, NACA R-1356, 1958.
46. Batchelor G. K., On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number, *Fluid Mech.*, 1, part 2 (1956).
47. Нейланд В. Я., ;Сычев В. В., К теории течений в стационарных срывных зонах, *Ученые записки ЦАГИ*, 1, № 1 (1970).
48. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф., Теория гиперзвуковых течений, ИЛ, М., 1962.
49. Нейланд В. Я., Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 4 (1970).
50. Лунев В. В., О подобии при обтекании тонких тел вязким газом при больших сверхзвуковых скоростях, *ПММ*, 23, № 1 (1959).
51. Hayes W. D., Probstein R. F., Viscous hypersonic similitude, Inst. Aeron. Sci. Rep., № 59-63.
52. Козлова И. Г., Михайлов В. В., О сильном вязком взаимодействии на треугольном и скользящем крыльях, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 6 (1970).
53. Провоторов В. П., О распространении возмущений через осесимметричный гиперзвуковой пограничный слой, *Ученые записки ЦАГИ*, IV, № 1 (1973).
54. Козлова И. Г., Михайлов В. В., О влиянии возмущений пограничного слоя на гиперзвуковые течения с вязким взаимодействием, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 4 (1971).
55. Коваленко А. А., Собственные значения краевой задачи для режима сильного взаимодействия пограничного слоя с гиперзвуковым потоком на степенных телах, *Труды ЦАГИ*, вып. 1390 (1972).
56. Нейланд В. Я., Вдувание газа в гиперзвуковой поток, *Ученые записки ЦАГИ*, III, № 6 (1972).
57. Гориславский В. С., Степченкова З. А., Экспериментальное исследование срывных зон на пластине в гиперзвуковом потоке газа, *Ученые записки ЦАГИ*, II, № 5 (1971).
58. Горенбух П. И., Козлова И. Г., Экспериментальное исследование распространения возмущений вверх по потоку на режиме сильного вязкого взаимодействия, *Ученые записки ЦАГИ*, IV, № 2 (1973).
59. Зубцов А. В., Влияние единичной шероховатости на течение жидкости в пограничном слое. *Ученые записки ЦАГИ*, II, № 1 (1971).
60. Боголепов В. В., Нейланд В. Я., Обтекание малых неровностей на поверхности тела сверхзвуковым потоком вязкого газа, *Труды ЦАГИ*, вып. 1363 (1971).
61. Catherall D., Mangler K. W., The investigation of the two-dimensional laminar boundary-layer equations past the point of vanishing skin friction, *J. Fluid Mech.*, 26 (1966).
62. Erdos J., Pallone M., Shock-boundary layer interaction and flow separation, Proc. 1962 Heat Transf. Fluid Mech. Inst.
63. Bushnell D. M., Weinstein L. M., Correlation of peak heating for reattachment of separated flows., *J. Spacecraft*, 5, № 9 (1968).
64. Коул Дж., Методы возмущений в прикладной механике, изд-во «Мир» М., 1972.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ДВУМЕРНЫХ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРИБЛИЖЕННЫХ И ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ, ПОЛУЧЕННЫЕ В СОВЕТСКОМ СОЮЗЕ

Несмотря на большое разнообразие приближенных методов, их можно в основном отнести к двум типам. В приближенных методах первого типа используются различные формы интегральных уравнений и соотношений, полученных из уравнений пограничного слоя. По существу такой подход является непосредственным продолжением хорошо известных методов расчета безотрывных течений пограничного слоя. Задача о расчете отрывного течения сводится к интегрированию системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом теряется информация о распределении функций по толщине пограничного слоя. Поэтому вводится предположение о том, что эти профили принадлежат к тому или иному семейству в зависимости от числа свободных параметров, соответствующего числу уравнений для определения их изменения вдоль потока. Система дополняется соотношениями, связывающими распределение толщины вытеснения пограничного слоя с характеристиками внешнего потока. Для получения удовлетворительных результатов важное значение имеет выбор семейства профилей распределения параметров по толщине пограничного слоя, а также соотношений для расчета внешнего невязкого течения.

К первым советским работам, в которых использован такой подход к расчету сверхзвуковых течений с ламинарными отрывными зонами, принадлежат работы [1, 2]. В обеих работах для расчета давления на границе пограничного слоя использованы соотношения Прандтля — Майера. Кроме того, в работе [1], где рассматривается задача о падении скачка уплотнения на пограничный слой, учитывались соответствующие условия разрыва в точке падения скачка. В этой работе использовано однопараметрическое семейство степенных профилей скорости и энтальпии торможения в переменных Дородницына. В работе [2] использовано однопараметрическое семейство профилей скорости автомодельных решений уравнений пограничного слоя. Рассчитывалась отрывная зона, возникающая перед щитком. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными показало, что хорошее совпадение получается для не слишком длинных зон отрыва, не имеющих развитой области с почти постоянной величиной давления.

В последние годы опубликован цикл работ, в которых интегральные методы используются для расчета течений с турбулентными отрывными зонами [3—6]. Работы [4—6] по методике примыкают к работе Крокко — Лиза [7]. Следует отметить, что при-

менение интегрального подхода к турбулентным течениям более привлекательно, чем к ламинарным. Во-первых, для турбулентных течений до настоящего времени не получено исходной замкнутой системы точных уравнений, и поэтому пока нет возможности для развития более строгих методов. Кроме того, из-за большой интенсивности процессов турбулентного смешения области с почти постоянным давлением, расчет которых в рамках единой схемы часто оказывается затруднительным, в этом случае менее выражены. (Кроме некоторых типов течений, например отрывных зон перед телами с иглами.)

Разумеется, при расчете турбулентных течений приходится пользоваться эмпирической информацией. Но часто ограничиваются использованием нескольких универсальных констант. Вместе с тем результаты расчетов размеров отрывных зон, донного давления, критических перепадов давления достаточно хорошо совпадают с экспериментальными данными. В упомянутых работах проведены расчеты донного давления и ближнего следа в неограниченном потоке [25] и при струйном обтекании тел, а также отрывных течений в каналах. Определены также характеристики псевдоскачка, т. е. области перехода от сверхзвукового течения в длинном канале к дозвуковому, в которой вместо прямого скачка возникает сложная система слабых косых скачков и отрывов потока при турбулентном течении вблизи стенок [6].

Использование другого подхода дает наилучшие результаты именно для развитых зон отрыва, в основной части которых давление почти постоянно. Первоначально этот подход был предложен Корстом [8] и Чепменом [9] для турбулентных и ламинарных отрывных зон соответственно. Его основы подробно изложены в книге Чжена. Там же изложены поправки, предлагаемые иностранными авторами для учета влияния вязкости на перепад давления в области присоединения, начальной толщины пограничного слоя и т. п. Поэтому здесь будут лишь кратко перечислены советские работы и некоторые полученные в них результаты.

В работах [10—12, 24] этот подход использован для расчета донного давления за уступами в случае двумерных турбулентных осесимметричных течений. В работах [13—16] исследовано донное давление за телами простой формы. При достаточно большом числе Маха отношение донного давления за клином к давлению в набегающем невозмущенном потоке как для турбулентного [13], так и для ламинарного [14] течений возрастает с ростом M_∞. В работе [14] указывается, что известный принцип стабилизации течения при $M_\infty \to \infty$ оказывается справедливым и для гиперзвуковых течений с отрывными зонами. Там же установлено, что донное давление за тонкими клиньями зависит от известного параметра подобия $M_\infty\tau$, где τ — безразмерная толщина клина. В работах [15, 16] эти результаты применяются к течениям около

клиньев и пластины, обтекаемых под углами атаки. В частности, оказывается, что при достаточно большом числе Маха на подветренной стороне тела должна образоваться отрывная зона, начинающаяся от передней кромки тела и омывающая всю подветренную сторону тела. Давление в этой зоне, отнесенное к давлению в набегающем потоке, возрастает как M_∞^2.

В работах [17—20] развита методика расчета ламинарных и турбулентных отрывных зон перед сферой с иглой, начало которых расположено на острие иглы, обтекаемой вдоль оси симметрии и под углами атаки.

Более сложной является задача о расчете течений, в которых отрыв потока начинается на гладком участке контура тела и его положение заранее неизвестно. Течения такого типа исследовались в работах [21, 22]. Одного условия Чепмена — Корста или каких-либо его модификаций оказывается недостаточно для замыкания задачи о размерах и положении изобарической зоны отрыва. Определяя координаты точки отрыва, в этом случае необходимо использовать еще одно дополнительное алгебраическое соотношение, связывающее давление в отрывной зоне с локальными характеристиками пограничного слоя перед точкой отрыва. Такие соотношения часто называют критериями отрыва. Методы их получения на основе экспериментальных данных, качественных модельных соображений, а также асимптотических методов изложены в книге Чжена и в предыдущем разделе приложения. В работе [21] в качестве примера приложения общего приближенного метода расчета решена задача об отрыве на плоской пластине перед щитком в сверхзвуковом потоке. Донное давление за сферой определено в работе [22].

На основании исходной модели изобарной отрывной зоны в работе [23] проведен расчет температуры газа в области отрыва. В работе [24] в предположении о том, что наиболее медленным процессом при установлении стационарного течения в донной области является турбулентное перемешивание, разработан метод оценки времени установления стационарного течения в донной турбулентной отрывной зоне. Полученные результаты по порядку величин близки к экспериментальным данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Елькин Ю. Г., Нейланд В. Я., О расчете характеристик ламинарных зон отрыва, *Инж. журн.*, V, вып. 5 (1965).
2. Бондарев Е. Н., Приближенный расчет потока с ламинарным пограничным слоем в области отрывного течения, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 5 (1966).
3. Авдуевский В. С., Бондарев Е. Н., Медведев К. И., Проблема взаимодействия ударных волн с пограничным слоем, Третий Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, сб. аннотаций, М., 1968.

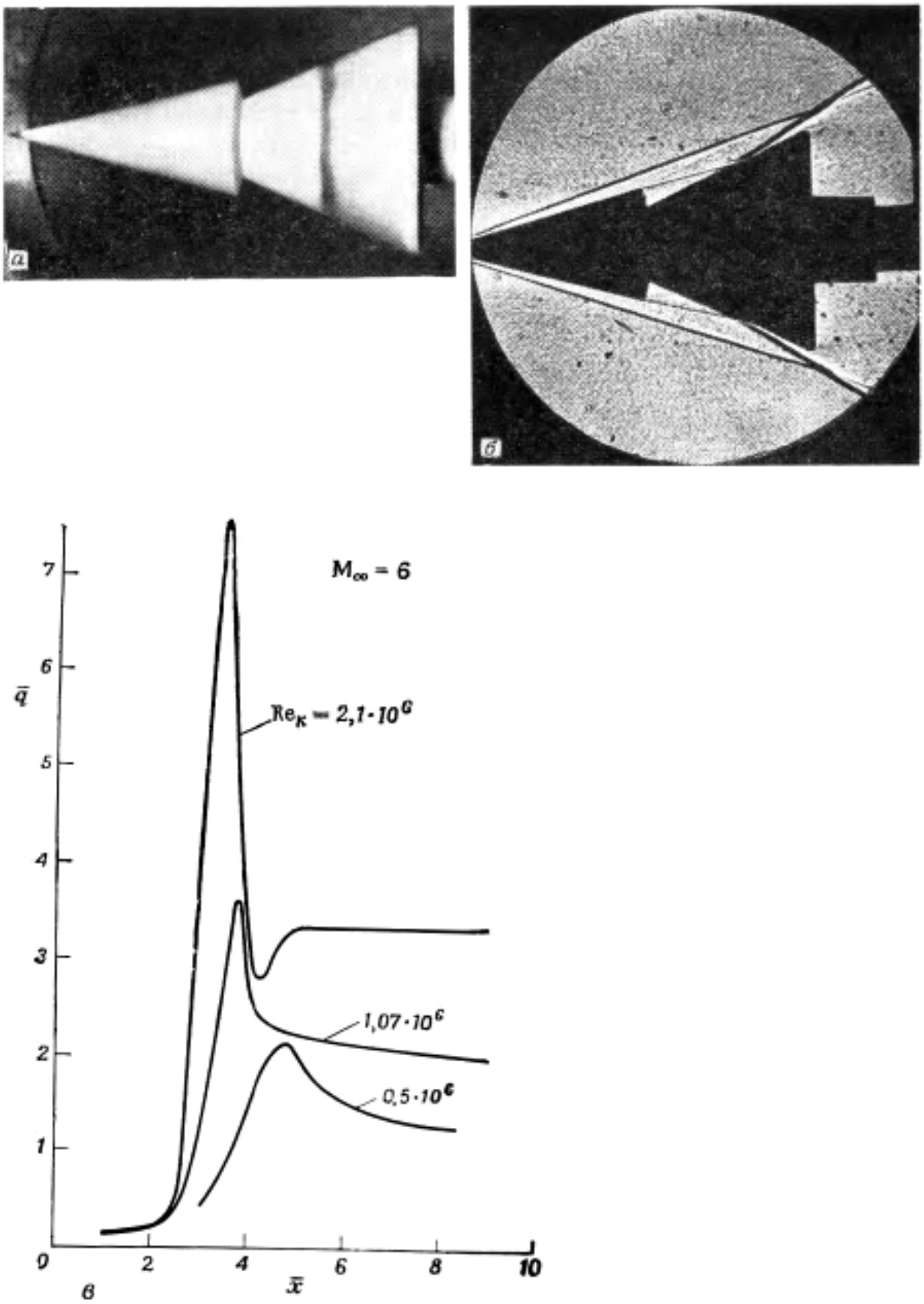
4. Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю., Интегральный метод расчета турбулентных отрывных течений, Третий Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, М., 1968.
5. Гогиш Л. В., Соболева Т. С., Степанов Г. Ю., Взаимодействие турбулентного следа с внешним потоком, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 3 (1969).
6. Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю., Квазиодномерная теория взаимодействия турбулентного следа со сверхзвуковым потоком в канале и струе, *Научные труды*, № 11, Институт механики МГУ, М., (1971).
7. Крокко Л., Лиз Л., Теория смешения для определения взаимодействия диссипативных и почти изэнтропического потоков, *Вопросы ракетной техники*, № 2 (1953).
8. Korst H. H., A theory of base pressure in transonic and supersonic flow, *J. appl. mech.*, 23, № 4 (1956).
9. Chapman D. R., An analysis of base pressure at supersonic velocities and comparison with experiments, NACA Rept № 1051, 1951.
10. Минятов А. В., Расчет донного давления в сверхзвуковом потоке, обтекающем тело вращения, *Изв. АН СССР, ОТН*, № 3 (1961).
11. Тагиров Р. К., Определение донного давления и донной температуры при внезапном расширении звукового и сверхзвукового потоков, *Изв. АН СССР, ОТН*, № 5 (1961).
12. Тагиров Р. К., Расчет теплопотоков при обтекании уступа двумя разными сверхзвуковыми потоками, *Изв. АН СССР, ОТН*, № 6 (1963).
13. Бондарев Е. Н., Юделович М. Я., О возможности повышения донного давления за клином при полете с гиперзвуковой скоростью, *Изв. АН СССР, ОТН*, № 5 (1960).
14. Елькин Ю. Г., Нейланд В. Я., Соколов Л. А., О донном давлении за клином в сверхзвуковом потоке, *Инж. журн.*, III, вып. 2 (1963).
15. Нейланд В. Я., Обтекание пластины под углом атаки гиперзвуковым потоком вязкого газа, *Инж. журн.*, III, вып. 3 (1963).
16. Нейланд В. Я., Соколов Л. А., Донное давление за клином под углом атаки в сверхзвуковом потоке газа, *Инж. журн.*, IV, вып. 2 (1964).
17. Нейланд В. Я., Таганов Г. И., О конфигурации передних срывных зон при симметричном обтекании тел сверхзвуковым потоком газа, *Инж. журн.*, III, вып. 2 (1963).
18. Нейланд В. Я., Таганов Г. И., Передняя срывная зона при несимметричном обтекании тела с иглой сверхзвуковым потоком газа, *Инж. журн.*, III, вып. 3 (1963).
19. Нейланд В. Я., О влиянии теплообмена и турбулентного течения в области смешения на характеристики срывных зон, *Инж. журн.*, IV, вып. 1 (1964).
20. Демьянов Ю. А., Шманенков В. Н., Турбулентная отрывная зона в потоке сжимаемого газа, *Изв. АН СССР, ОТН*, № 3 (1965).
21. Нейланд В. Я., О расчете характеристик срывной зоны и донного давления при обтекании тел сверхзвуковым потоком газа, *Инж. журн.*, V, вып. 1 (1965).
22. Юделович М. Я., Приближенная методика расчета донного давления для тел сферической формы, *Изв. АН СССР, ОТН*, № 3 (1965).
23. Мурзинов И. Н., К определению энтальпии в застойных областях течения, *Изв. АН СССР, МЖГ*, 3 (1970).
24. Тагиров Р. К., Влияние начального пограничного слоя на донное давление, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 2 (1966).
25. Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю., К расчету донного давления в двумерных сверхзвуковых течениях, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 3 (1966).
26. Швец А. И., Панов Ю. А., Хазен А. М., Новикова В. А., О влиянии числа Маха на колебания донного давления за конусом, *Вестник МГУ, Математика, и механика*, № 1 (1968).

5. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА К ПОДВЕТРЕННОЙ СТОРОНЕ ТЕЛА ПРИ ОТРЫВНОМ ОБТЕКАНИИ ЕГО ПОТОКОМ С БОЛЬШОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

Достаточно хорошо известно, что в областях присоединения оторвавшегося от твердой поверхности сверхзвукового двумерного и осесимметричного потока возможно появление узких областей-пиков теплового потока, намного превышающего тепловой поток на окрестной части поверхности. Область отрыва в двумерных течениях представляет собой замкнутую область циркуляционного течения; в области присоединения к твердой поверхности подходит разделяющая поверхность тока и течение сходно со струей, встречающейся с твердой поверхностью. В трехмерных отрывных течениях на циркуляционное течение накладывается «продольное» течение (направление которого не изменяется) и вместо замкнутой области образуется незамкнутая область «винтового» течения. В трехмерных отрывных течениях пики теплового потока экспериментально обнаружены недавно и влияние на их появление параметров M_∞, Re_∞, формы и угла атаки тела изучено еще недостаточно. Вместе с тем пики теплового потока представляют большую опасность для летательных аппаратов, так как по величине они могут на порядок превосходить тепловой поток к окрестной части подветренной поверхности и достигать величин, характерных для наветренной поверхности, поэтому изучение возможностей их уменьшения весьма актуально.

Весьма эффективным средством измерения теплового потока являются термоиндикаторные покрытия, изменяющие цвет или прозрачность при определенной, не зависящей от давления температуре [3, 4, 12]. В качестве типичного примера для осесимметричных течений на фиг. 16 представлена фотография модели, покрытой термоиндикатором (нерасплавившийся индикатор белого цвета; через узкий слой расплавившегося индикатора видна темная модель). Полезны для понимания структуры течений спектры «предельных» линий тока, получаемые путем размывания потоком точек краски, нанесенных на поверхность модели. Признаком отрыва служит появление огибающей предельных линий тока и изменение направления напряжений трения: линия отрыва является линией «стекания», линия присоединения — линией «растекания». Следует отметить, что этих сведений иногда далеко не достаточно для исчерпывающего понимания трехмерных отрывных течений, как будет видно из дальнейшего, и для достижения этой цели необходимы либо исследование «внешней» части сжатого слоя, либо расчет.

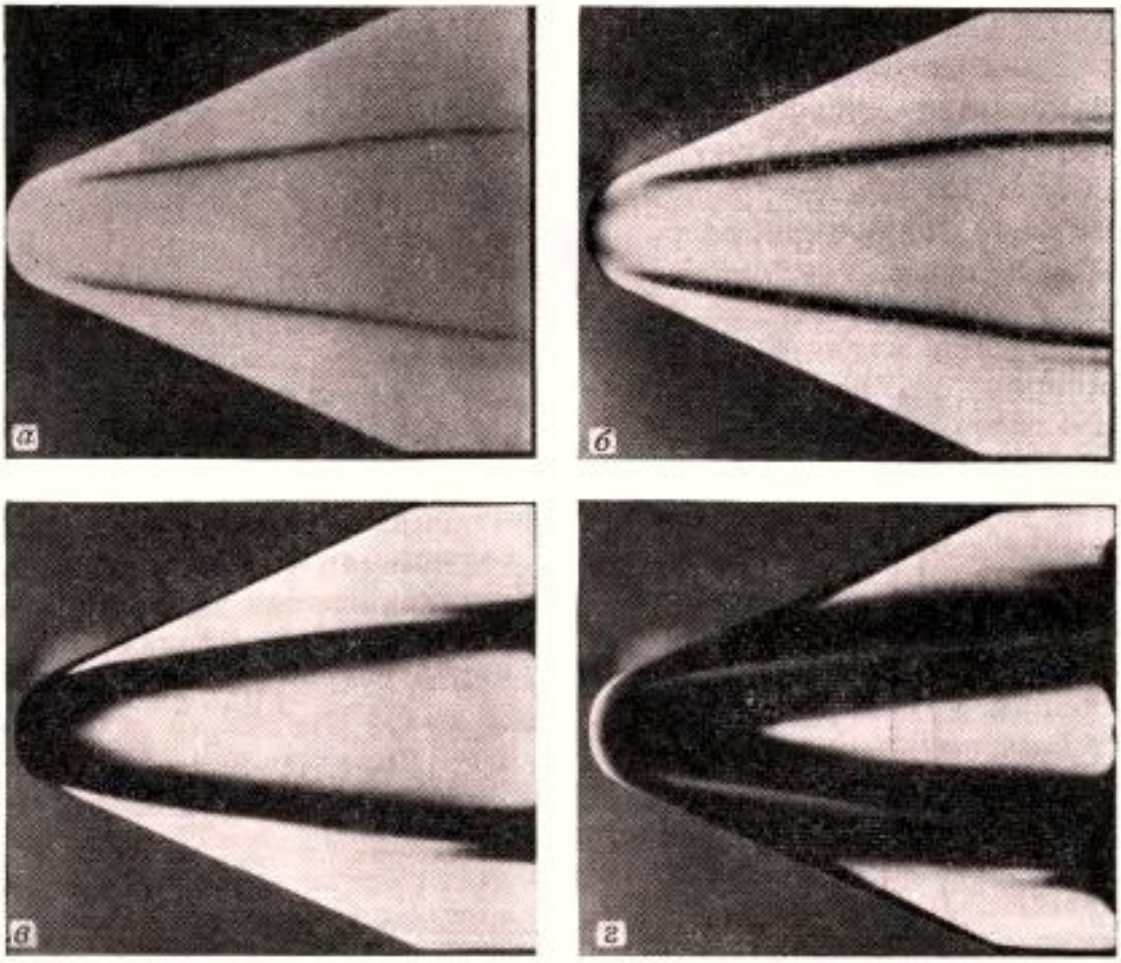
К первым исследованиям теплопередачи к подветренной стороне тела, в которых были обнаружены пики теплового потока на направленной по потоку плоской стороне тупоносого полуконуса,



Фиг. 16. Конус с уступом (эксперименты Бражко).

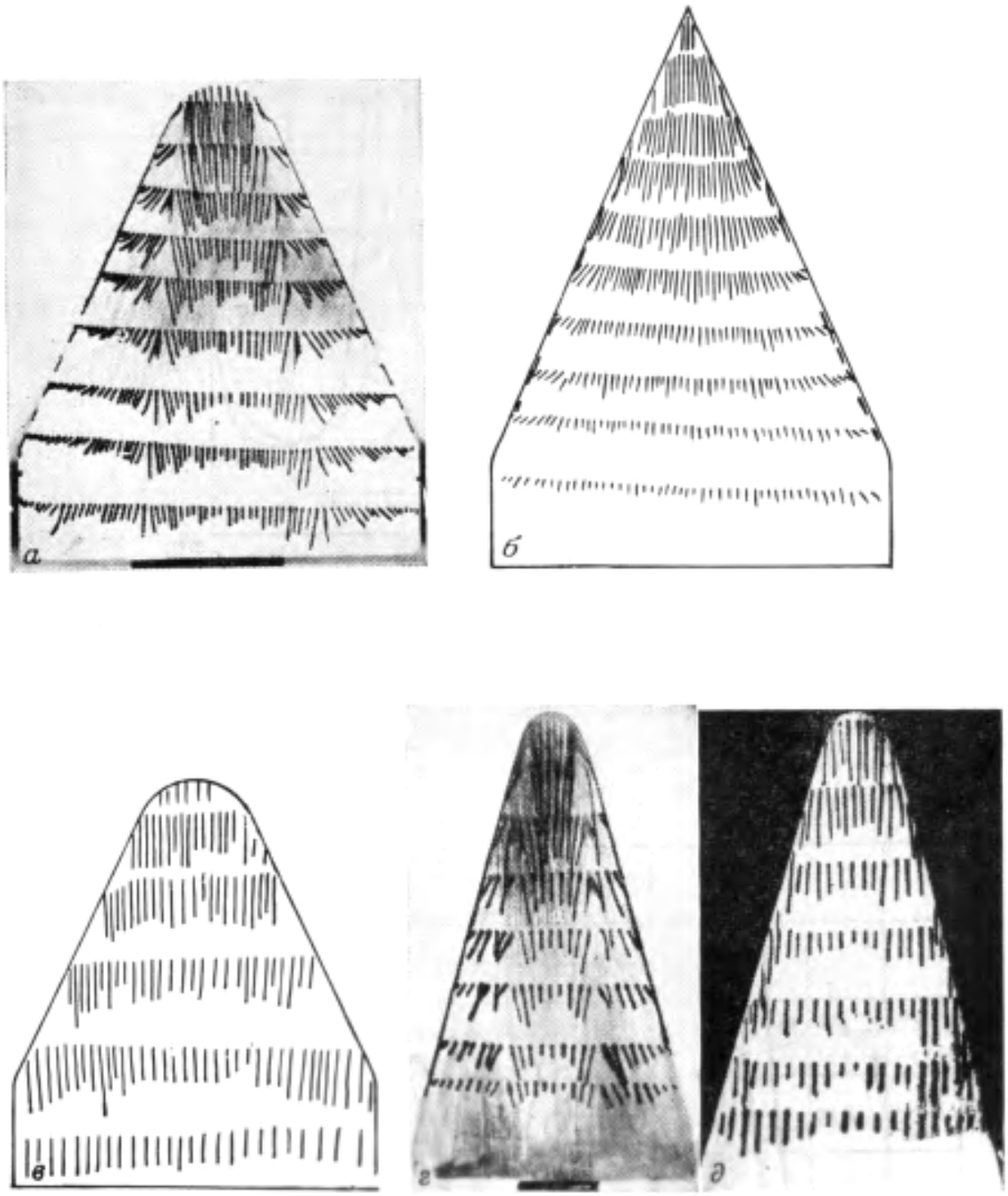
а — покрытый термоиндикатором; *б* — теневой снимок; *в* — распределение теплового потока по образующей; $\bar{x}$ — расстояние от точки отрыва на конусе, отнесенное к высоте уступа; тепловой поток $\bar{q}$ отнесен к тепловому потоку в точке отрыва (ламинарный пограничный слой), число Рейнольдса $Re_к$ вычислено по параметрам в точке отрыва.

относятся работы [4—6]. С помощью киносъемки модели, покрытой термокраской, меняющей красный цвет на черный при температуре $T = 338{,}2°$, были обнаружены две узкие полосы максимумов теплового потока (фиг. 17), идущие от точек сопряжения



Фиг. 17. Полуконус $\theta_к = 24{,}3°$, покрытый термокраской; угол атаки $\alpha = 0°$ (плоская сторона направлена по потоку); $M_\infty = 5$, $Re_{L,\infty} = 1{,}1 \cdot 10^6$, $Re_{L,\infty} M_\infty^{-6} = 70$ [4].
а — $\tau = 0{,}8$ с; *б* — $\tau = 3$ с; *в* — $\tau = 12$ с; *г* — $\tau = 48$ с.

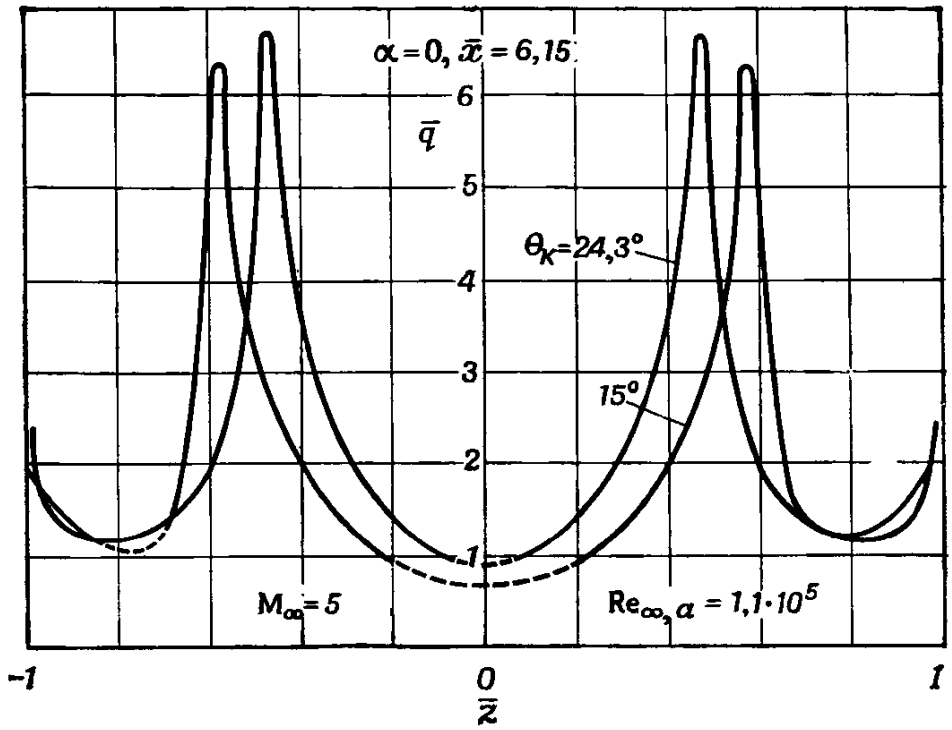
сферы с конусом. Спектры предельных линий тока показывают, что области максимумов теплового потока совпадают с линиями растекания (фиг. 18). Сходные результаты получены и на полуконусе с меньшим углом раствора (фиг. 18, 19). С уменьшением радиуса сферического затупления модели пики теплового потока уменьшаются (фиг. 20); в случае остроносого полуконуса линии растекания и пики теплового потока исчезают, отрыв потока наблюдается только у ребер (фиг. 18), скругление которых, по-видимому, устраняет эти узкие области отрыва [5]. Уменьшение числа Рейнольдса при неизменном радиусе сферического затупления тоже приводит к безотрывному обтеканию и исчезновению пиков



Фиг. 18. Спектры предельных линий тока для полуконусов ($\alpha = 0°$) [6].

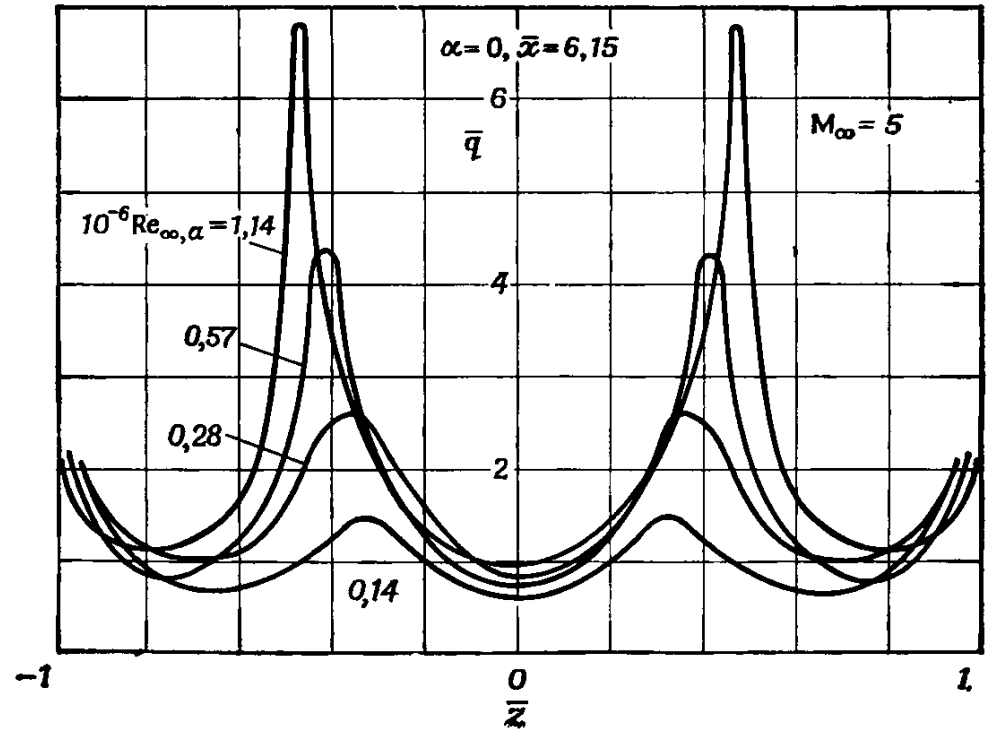
а – тупоносый,	$M_\infty=5$,	$Re_{L,\infty}=1{,}1\cdot10^6$,	$Re_{L,\infty}M_\infty^{-6}=70$,	$\theta_к=24{,}3°$;
б – остроносый,	$M_\infty=5$,	$Re_{L,\infty}=1{,}1\cdot10^6$,	$Re_{L,\infty}M_\infty^{-6}=70$,	
в – тупоносый,	$M_\infty=11$,	$Re_{L,\infty}=1{,}5\cdot10^4$,	$Re_{L,\infty}M_\infty^{-6}=0{,}007$,	
г – тупоносый,	$M_\infty=6$,	$Re_{L,\infty}=1{,}1\cdot10^5$,	$Re_{L,\infty}M_\infty^{-6}=2{,}4$,	$\theta_к=15°$;
д – тупоносый,	$M_\infty=6$,	$Re_{L,\infty}=1{,}1\cdot10^4$,	$Re_{L,\infty}M_\infty^{-6}=0{,}24$,	

L – длина.



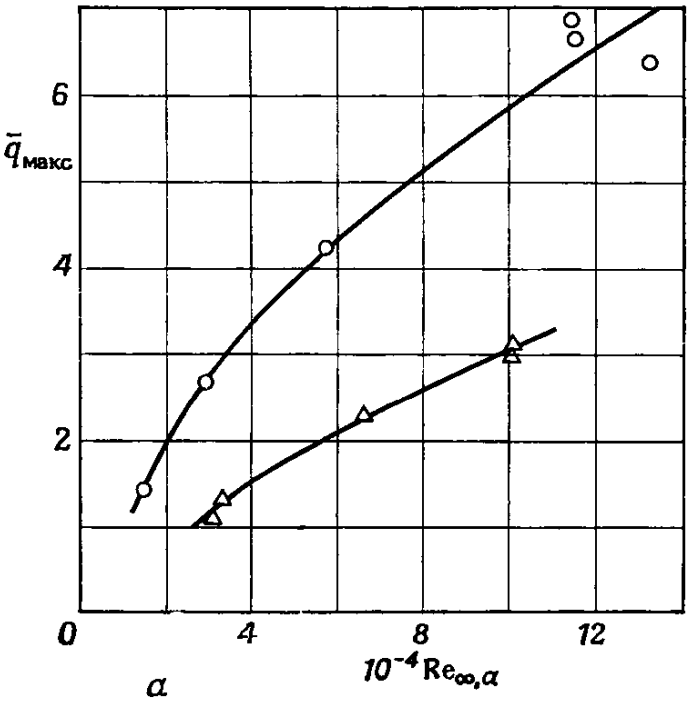
Ф и г. 19. Распределение теплового потока по поперечному сечению плоской стороны тупоносого полуконуса [6].

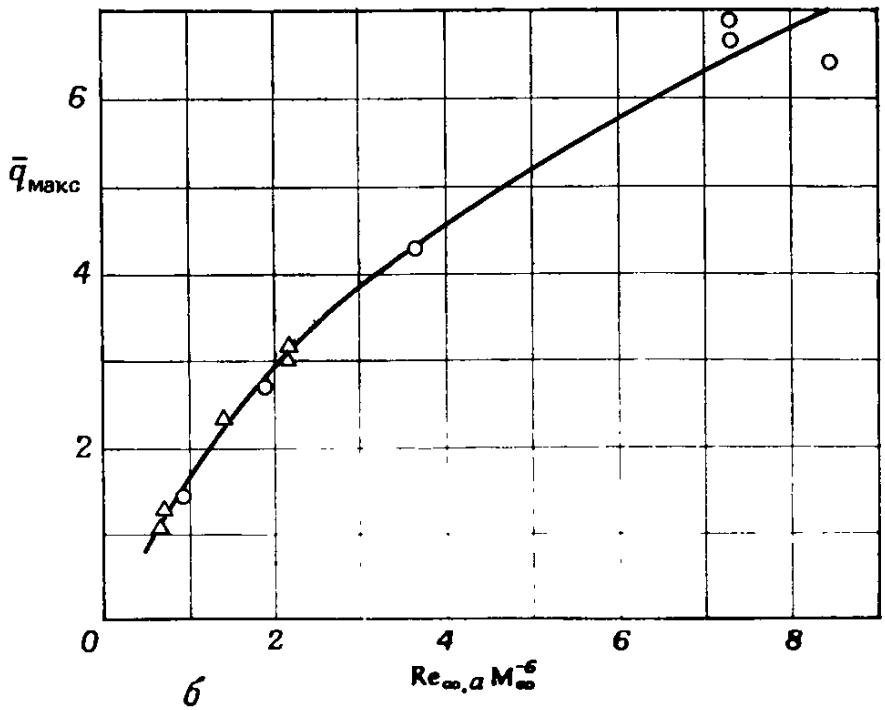
$\bar{x} = x/a$, a — радиус затупления, тепловой поток $\bar{q}$ отнесен к тепловому потоку к плоской пластине (ламинарный пограничный слой).



Ф и г. 20. Влияние радиуса затупления a на тепловой поток к плоской стороне полуконуса $\theta_к = 24{,}3°$ [5].

(фиг. 18, 20). Зависимости для максимального теплового потока коррелируются известным параметром взаимодействия «невязкой»

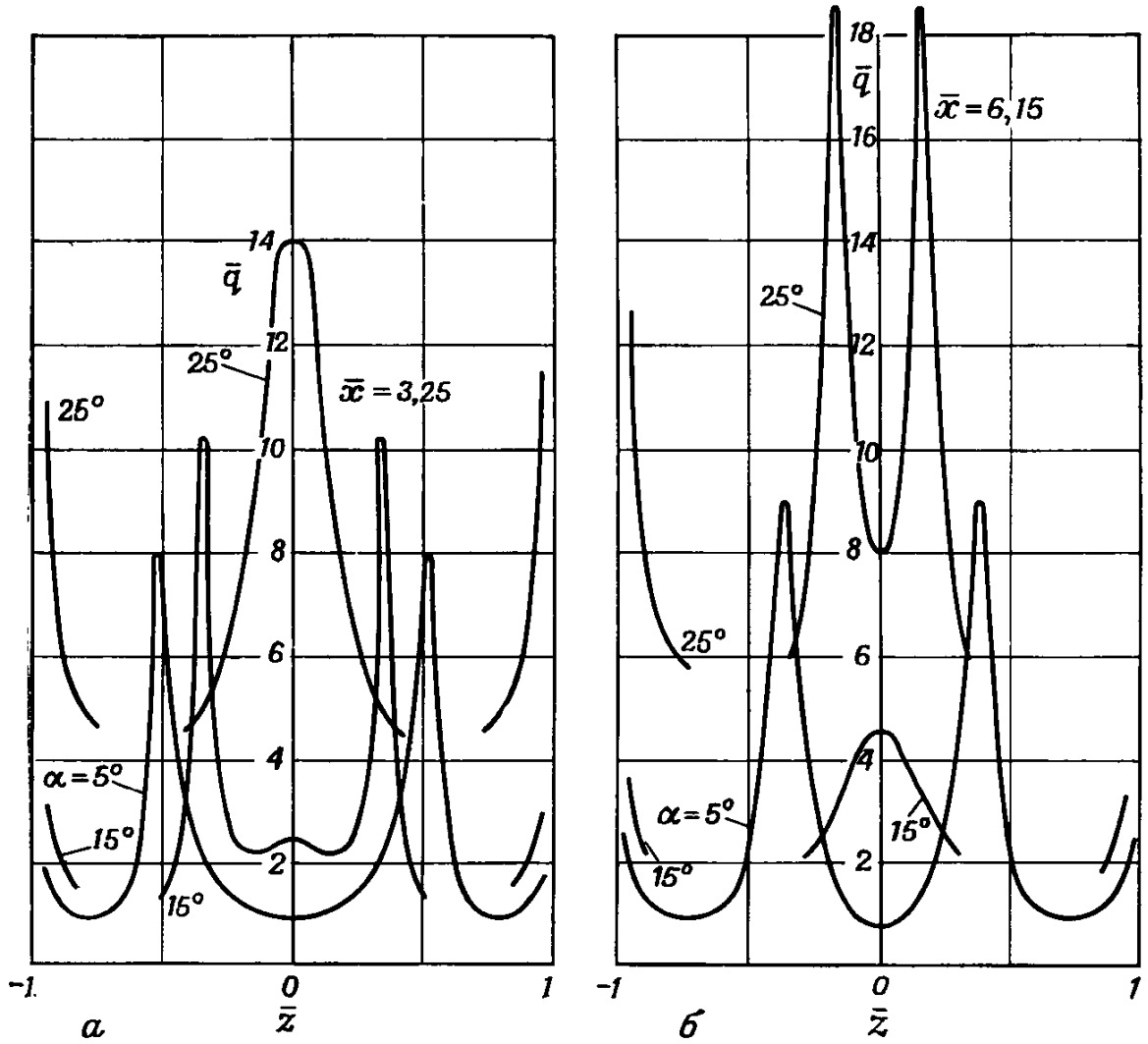




Фиг. 21. Зависимость максимального теплового потока к плоской стороне полуконуса от числа Рейнольдса, вычисленного по радиусу затупления a, и параметра $\mathrm{Re}_{a,\infty}\mathrm{M}_{\infty}^{-6}$ [22].
○ $\mathrm{M}_{\infty}=5$; △ $\mathrm{M}_{\infty}=6$.

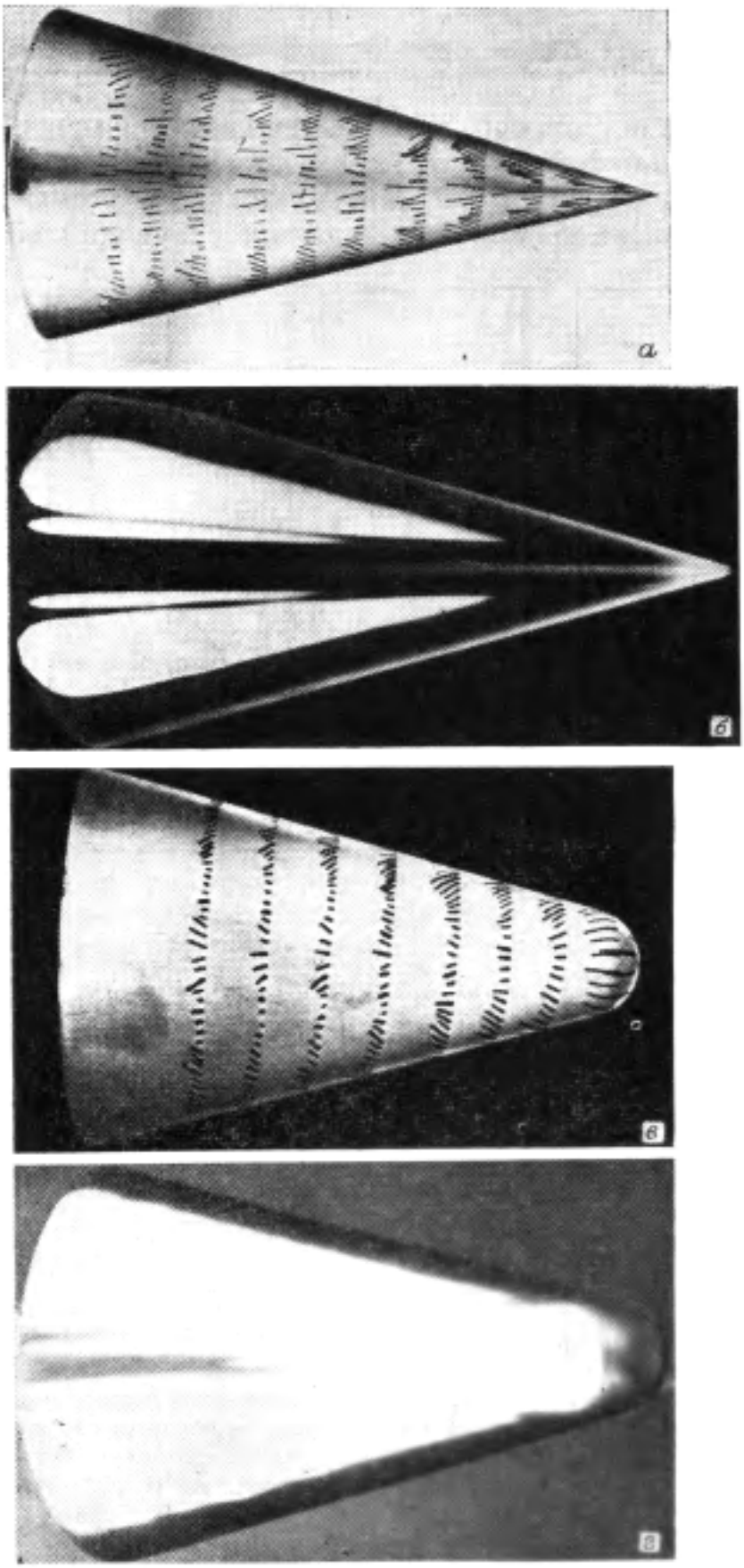
и «вязкой» части течения $\mathrm{Re}_{\infty}\mathrm{M}_{\infty}^{-6}$ (ламинарный слой) [22] (фиг. 21, *б*). Спектры предельных линий тока в окрестности затупления свиде-

тельствуют о безотрывном обтекании, длина штрихов размытой краски уменьшается с удалением от носка модели, вблизи линий растекания штрихи длиннее (большие напряжения трения). Как увеличение, так и уменьшение угла атаки приводит к уменьшению максимальной величины теплового потока. При угле атаки $\alpha = 15°$



Фиг. 22. Распределение теплового потока по поперечным сечениям плоской стороны тупоносого полуконуса в зависимости от угла атаки α; $\theta_к = 24{,}3°$, $M_\infty = 5$, $Re_{L,\infty} = 1{,}1 \cdot 10^6$ [5].

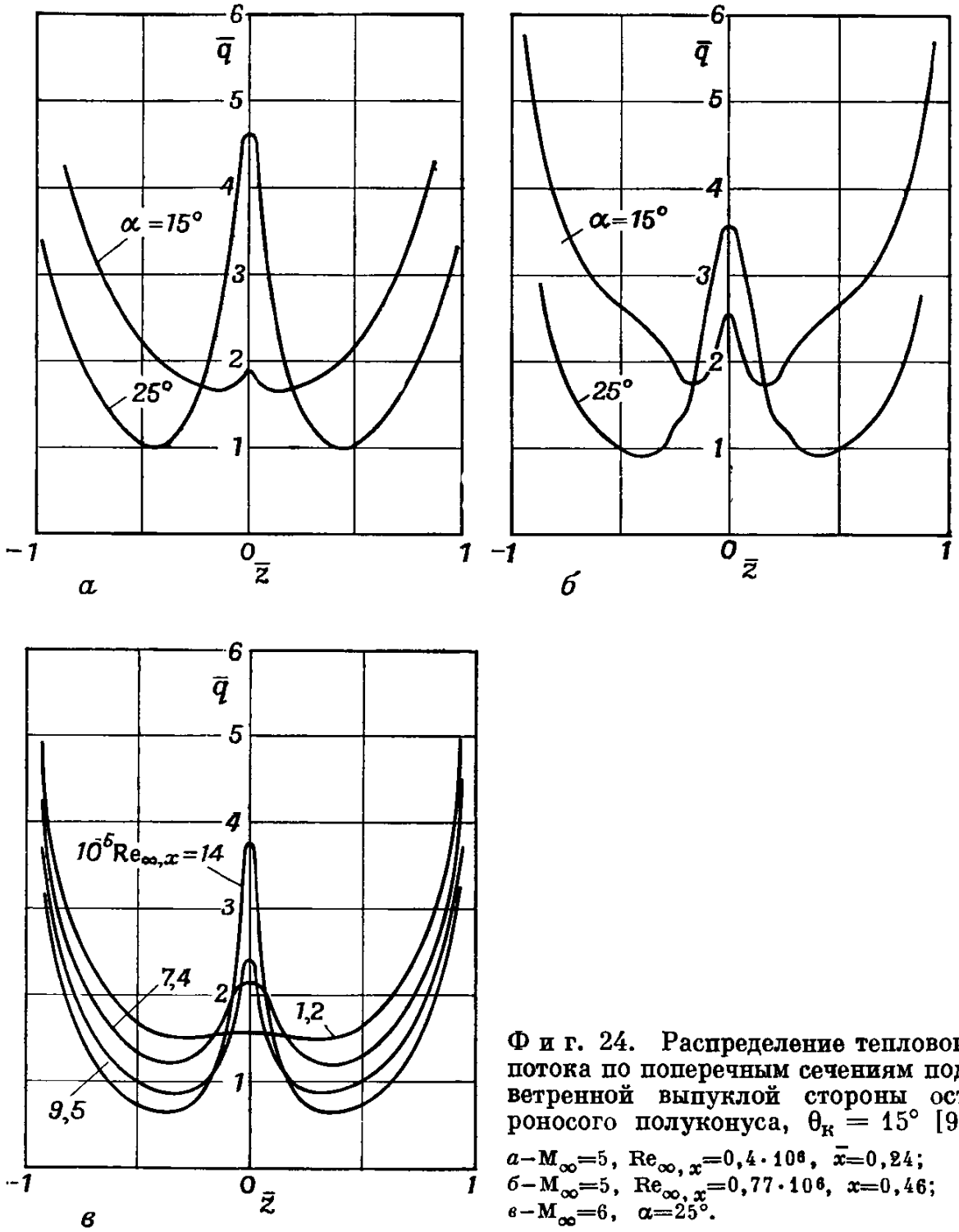
две области максимальных тепловых потоков, идущие от передней кромки, сближаются и в удаленных от затупления сечениях сливаются в одну [4]. Остается одна линия растекания — в плоскости симметрии и соответствующий ей пик теплового потока (фиг. 22). При еще большем угле атаки, $\alpha = 25°$, в передней части модели образуется один пик теплового потока, а в задней ее части появляются два пика, расположенные по обе стороны от оси (фиг. 22).



Фиг. 23. Полуконус $\theta_к = 15°$ с плоской наветренной стороной, $M_\infty = 5$, $Re_{L,\infty} = 10^6$ [9].

а – предельные линии тока, $\alpha=30°$, } остроносый полуконус;
б – модель покрыта термокраской, $\alpha=25°$, $\tau=50$ с, } остроносый полуконус;
в – предельные линии тока, $\alpha=25°$, } тупоносый полуконус.
г – модель покрыта термокраской, $\alpha=25°$ $\tau=10$ с, } тупоносый полуконус.

Когда плоская сторона остроносого полуконуса является наветренной, отрыв потока происходит при углах атаки $\alpha > \theta_к$ и не у кромок, а в середине подветренной стороны. В плоскости симметрии наблюдается одна линия растекания и соответствующий ей

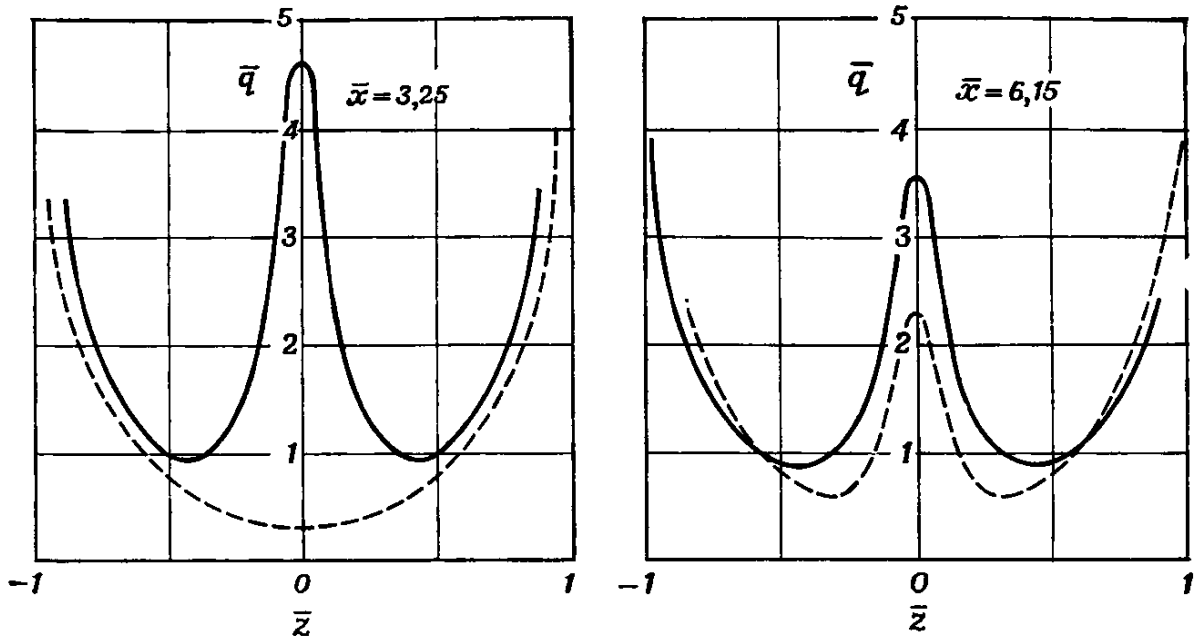


Фиг. 24. Распределение теплового потока по поперечным сечениям подветренной выпуклой стороны остроносого полуконуса, $\theta_к = 15°$ [9].

а — $M_\infty=5$, $Re_{\infty,x}=0{,}4\cdot10^6$, $\bar{x}=0{,}24$;
б — $M_\infty=5$, $Re_{\infty,x}=0{,}77\cdot10^6$, $x=0{,}46$;
в — $M_\infty=6$, $\alpha=25°$.

пик теплового потока (фиг. 23, 24). Уменьшение числа Рейнольдса и в этом случае приводит к исчезновению линии растекания и уменьшению максимального теплового потока (фиг. 24, *в*). Инте-

ресно, что в случае тупоносого полуконуса с плоской наветренной стороной пик теплового потока исчезает в передней части модели и появляется только в задней части, причем по величине он меньше, чем для остроносого полуконуса (фиг. 25). Следует отметить



Фиг. 25. Распределение теплового потока по поперечным сечениям подветренной выпуклой стороны полуконусов [9]; $\theta_к = 15°$, $\alpha = 25°$, $M_\infty = 5$, $Re_{L,\infty} = 10^6$.
– – – – тугоносый полуконус, ——— остроносый полуконус.

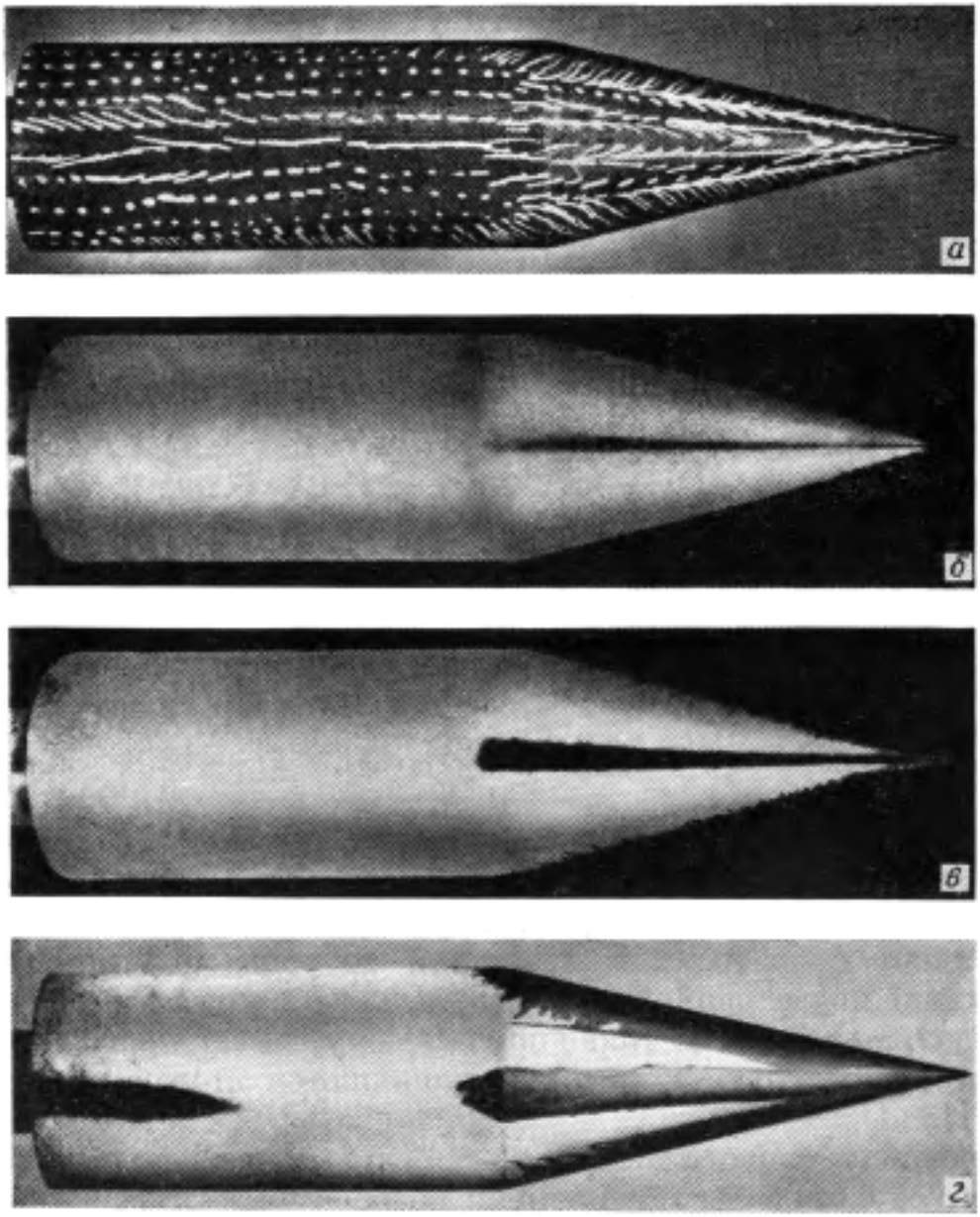
и в этом случае наличие особенностей — узких областей повышенного теплового потока, начинающихся от точек сопряжения сферического сегмента с конусом (фиг. 23, *г*).

С обтеканием подветренной выпуклой стороны полуконуса сходно обтекание подветренной стороны круглого конуса (фиг. 26); судя по предельным линиям тока, по-видимому, имеет место вторичный отрыв, в результате которого появляются вторые линии стекания [11].

Распределение теплового потока по плоской подветренной стороне полуконуса с плоским затуплением носовой части отличается тем, что от каждой угловой точки идут две области повышенных тепловых потоков [4]; сходная картина наблюдалась на подветренной стороне цилиндра с эллиптическим поперечным сечением и носовой частью, образованной половиной осесимметричного эллипсоида [17] (фиг. 27).

При обтекании клина со скошенными боковыми гранями имеют место отрыв и присоединение как к подветренной поверхности, направленной по потоку, так и к боковым граням; в областях присоединения наблюдаются пики теплового потока, причем затупление передней кромки приводит к увеличению пиков на подветренной стороне (фиг. 28).

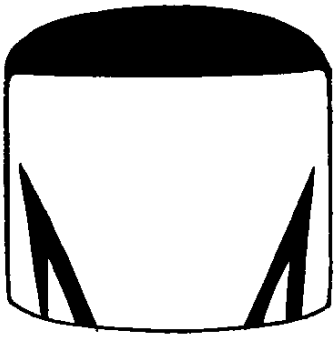
Обратимся теперь к исследованиям пластин. На подветренной стороне плоской треугольной пластины наблюдается либо одна линия растекания и соответствующий ей пик теплового потока



Фиг. 26. Конус $\theta_к = 13{,}5°$, $M_\infty = 5$, $Re_{L,\infty} = 10^6$, $\alpha = 20°$ [11].
а – предельные линии тока на подветренной стороне; *б* – $\tau=2$ с; *в* – $\tau=5$ с; *г* – $\tau=15$ с, модель покрыта плавящимся термоиндикатором.

в плоскости симметрии [7, 15], либо линия растекания в передней части, далее переходящая в две близкие линии растекания с узкой областью безотрывного течения между ними и двумя симметричными относительно плоскости симметрии пиками теплового потока [18]. Эти два пика сближаются и переходят в один в сечениях, расположенных ближе к острию пластины. Пограничный слой

между линиями растекания ведет себя как начинающийся в точке их разделения [21]. Тепловой поток вдоль средней линии пластины изменяется следующим образом [18, 19]: с увеличением расстояния от острия тепловой поток достигает максимальной величины, значительно превышающей тепловой поток к пластине, вычисленный для ламинарного слоя, затем он уменьшается и вновь возрастает, достигая расчетной величины для турбулентного слоя [1]). Тепловой поток на оси уменьшается вследствие появления области безотрывного течения между линиями растекания. При турбулентном слое относительная величина пиков тепловых потоков резко уменьшается. Маловероятно, что пики теплового потока в передней части пластины вызваны переходом ламинарного слоя в турбулентный на самой пластине, что же касается перехода в слое смешения, то его роль еще не исследована. Скругленные кромки толстой треугольной пластины обтекаются без отрыва. Как и в случае выпуклой подветренной стороны тупоносого полуконуса, повышенные тепловые потоки наблюдаются в задней части пластины, причем двум линиям растекания соответствуют два пика, величина которых растет с ростом числа Рейнольдса (фиг. 29).



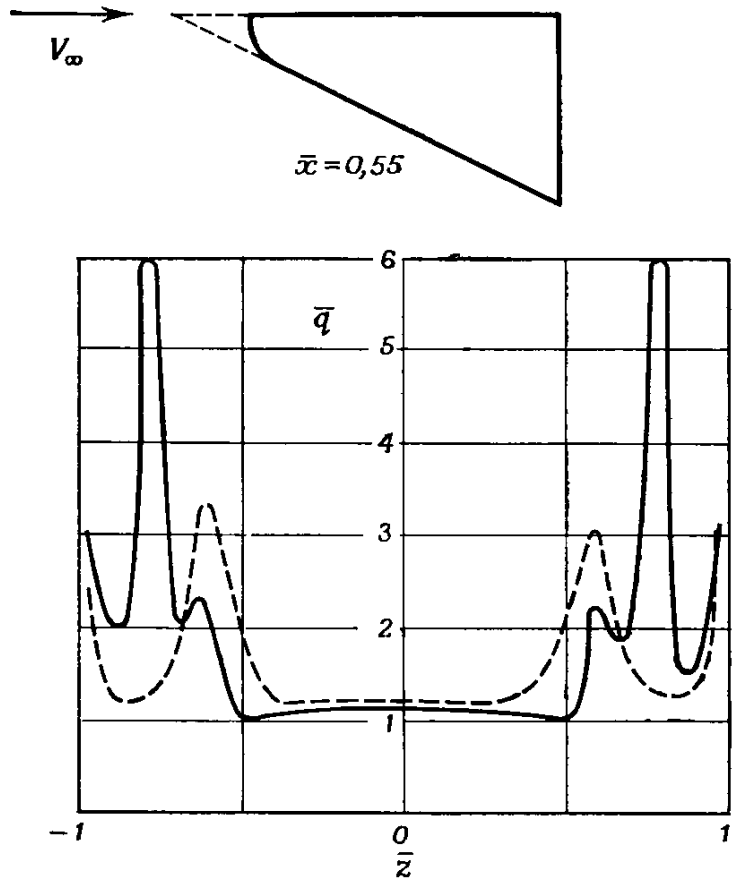
Фиг. 27. Области повышенного теплового потока (изменение цвета термокраски) на подветренной стороне цилиндра с эллиптическим поперечным сечением и носовой частью, образованной половиной осесимметричного эллипсоида [17].

В работе [19] приведены результаты исследования влияния формы пластины в плане. При скруглении вершины пластины (радиус окружности составлял 0,063 длины) вместо одной области больших напряжений трения и тепловых потоков вблизи средней линии появились две такие узкие области, распространяющиеся от точек сопряжения окружности с прямыми. Однако на пластине с передней острой кромкой в форме гиперболы (радиус кривизны на оси симметрии был равен 0,03 длины пластины) линии растекания и пики теплового потока исчезли. В работе [19] приведены также сведения о «вязком» слое, т. е. слое малой плотности (внутренняя часть пограничного слоя), толщина которого не превосходит двух толщин двумерного пограничного слоя для пластины и резко уменьшается (до ~0,3 толщины двумерного слоя) вблизи средней линии треугольной пластины. На пластине с передней кромкой в форме гиперболы такого резкого изменения толщины вязкого слоя не наблюдается. Пики теплового потока устраняются также путем отгиба острого конца треугольной пластины, при кото-

[1]) Таков же характер изменения максимального теплового потока с расстоянием от критической точки для полуконусов [5] и пластины с цилиндрическими кромками [7].

ром местный угол атаки меняется от 0° на конце до 5° на основной части пластины [20].

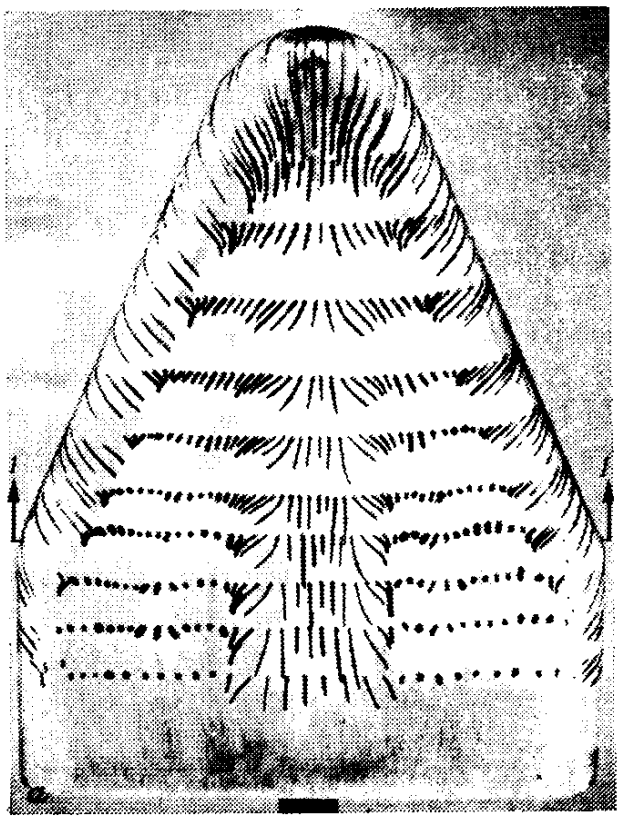
Попытаемся теперь хотя бы частично объяснить полученные результаты. Во всех упомянутых работах, очевидно под влиянием известного факта, что при малых скоростях отрывное течение вблизи подветренной стороны крыла с острыми кромками и конуса

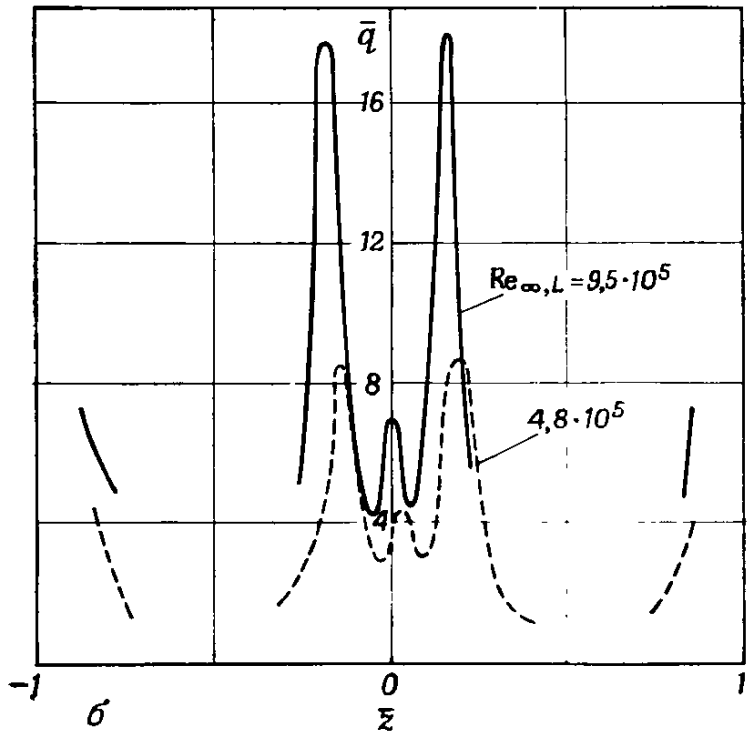


Фиг. 28. Распределение теплового потока по поперечному сечению направленной по потоку стороны клина; $M_\infty = 5$, $Re_{L,\infty} = 9{,}5 \cdot 10^5$ [7].
——— тупоносый клин; – – – – остроносый клин.

под углом атаки управляется двумя вихрями, которые наблюдаются и при небольших сверхзвуковых скоростях [2], считается несомненным, что пики теплового потока при больших сверхзвуковых скоростях также индуцируются вихрями. Пара вихрей образуется в результате отрыва потока от острых передних кромок, причем вследствие безотрывного обтекания острия пластины вихри появляются только на некотором расстоянии от него [20, 21].

Есть также предположения, что вихри могут быть следствием поперечного течения внутри пограничного слоя и при безотрывном течении [20], а также изменения энтропии за ударной волной [16]. Чтобы убедиться в справедливости этих предположений, следовало бы иметь сведения о течении во всей области возмущения. Наиболее полные сведения имеются для треугольной пластины





Фиг. 29. Предельные линии тока на подветренной стороне треугольной пластины с цилиндрическими кромками и распределение теплового потока по ее поперечному сечению *1—1*, $\alpha = 20°$, M_∞ 5 [7].

а—предельные линии тока; *б*—распределение теплового потока,

с острыми кромками [13]. Вкратце изложим результаты этой работы. Головная ударная волна в исследованном интервале углов атаки $\alpha = 0—15°$ присоединена к острию пластины, но уже при $\alpha = 9°$ отсоединена от боковых кромок [1]). В подветренной части течения ударная волна переходит в волну Маха в плоскости симметрии. В поперечном сечении она имеет форму эллипса, т. е. близка к огибающей конусов Маха. Для этих исследований характерно большое число Маха $M_\infty = 10$ и низкое число Рейнольдса $Re_{L,\infty}$, следовательно, большая толщина пограничного слоя (табл. 1). При углах атаки $\alpha = 0—5°$ толщина «вязкого» слоя с малым полным давлением почти совпадает с вычисленной для бесконечной пластины толщиной пограничного слоя и вязкий слой почти заполняет подветренную область (фиг. 30). Отрыва потока от острых кромок при углах атаки до $\alpha \approx 7°$ не происхо-

Таблица 1

ПАРАМЕТРЫ ПОТОКА И ТОЛЩИНА ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ (ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННАЯ СТЕНКА)

M_∞	$Re_{L,\infty}$	δ/x	$Re_{L,\infty}M_\infty^{-6}$	Работа
5	$(6—12)\cdot10^5$	0,017—0,012	38—77	[4, 5]
5	10^6	0,014	64	[6]
6	$(1,6—19)\cdot10^5$	0,043—0,012	3,4—4,1	
10	$(4,28—3,36)\cdot10^5$	0,055—0,063	0,3—0,4	[13]
6	$(2,4—18,7)\cdot10^6$	0,011—0,004	52—400	[18]
6,8	$(2,4—3,1)\cdot10^6$	0,013—0,011	24—31	[19]
Паровой экран	$9\cdot10^6$	0,0067	91	
6,8	$2\cdot10^6$	0,014	20	[20]

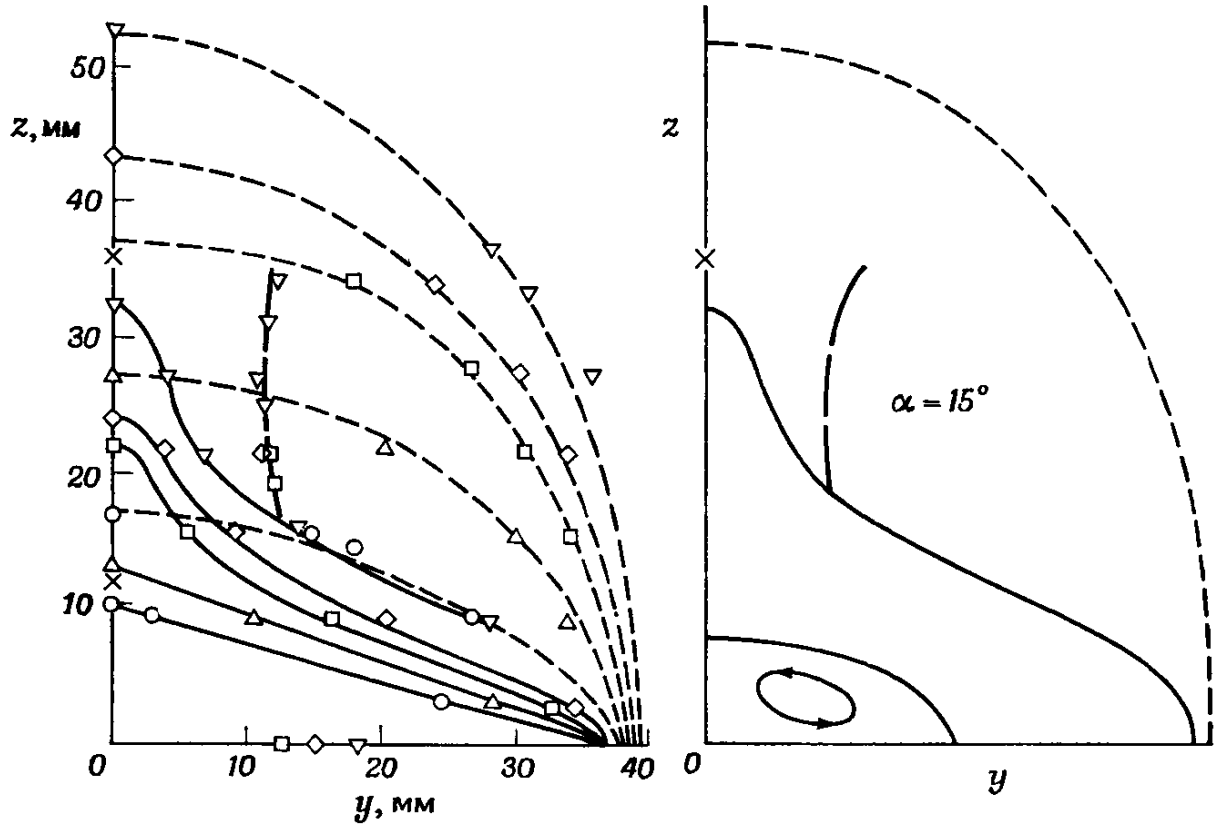
дит, течение вблизи поверхности почти параллельное. Линии отрыва появляются при $\alpha \geqslant 9°$ вблизи линий пересечения пластины с конусом Маха, вершина которого совпадает с острием пластины; с увеличением угла атаки линии отрыва перемещаются к кромкам.

Вязкий слой при всех углах атаки заполняет бо́льшую часть подветренной области, причем, начиная с $\alpha = 9°$, характер изменения его толщины по ширине пластины меняется. Путем измерений полного давления, начиная с $\alpha = 9°$, вблизи конуса Маха обнаружены слабые «внутренние» скачки уплотнения, предсказан-

---

[1]) Предельный угол атаки пластины для угла стреловидности $\Lambda = 75°$ и числа Маха $M_\infty = 10$ равен 10,3° без учета толщины вытеснения пограничного слоя. При числе $M_\infty = 5$ предельный угол атаки равен всего 1,7°.

ные теоретически [10], которые, по-видимому, вызывают отрыв. Схемы течений для $\alpha = 15°$ представлены на фиг. 31. Только в исследовании [6] были числа M_∞, Re_∞, которым соответствуют столь же большие толщины пограничного слоя, как и в работе [13], в остальных же исследованиях величины δ/x были в несколько

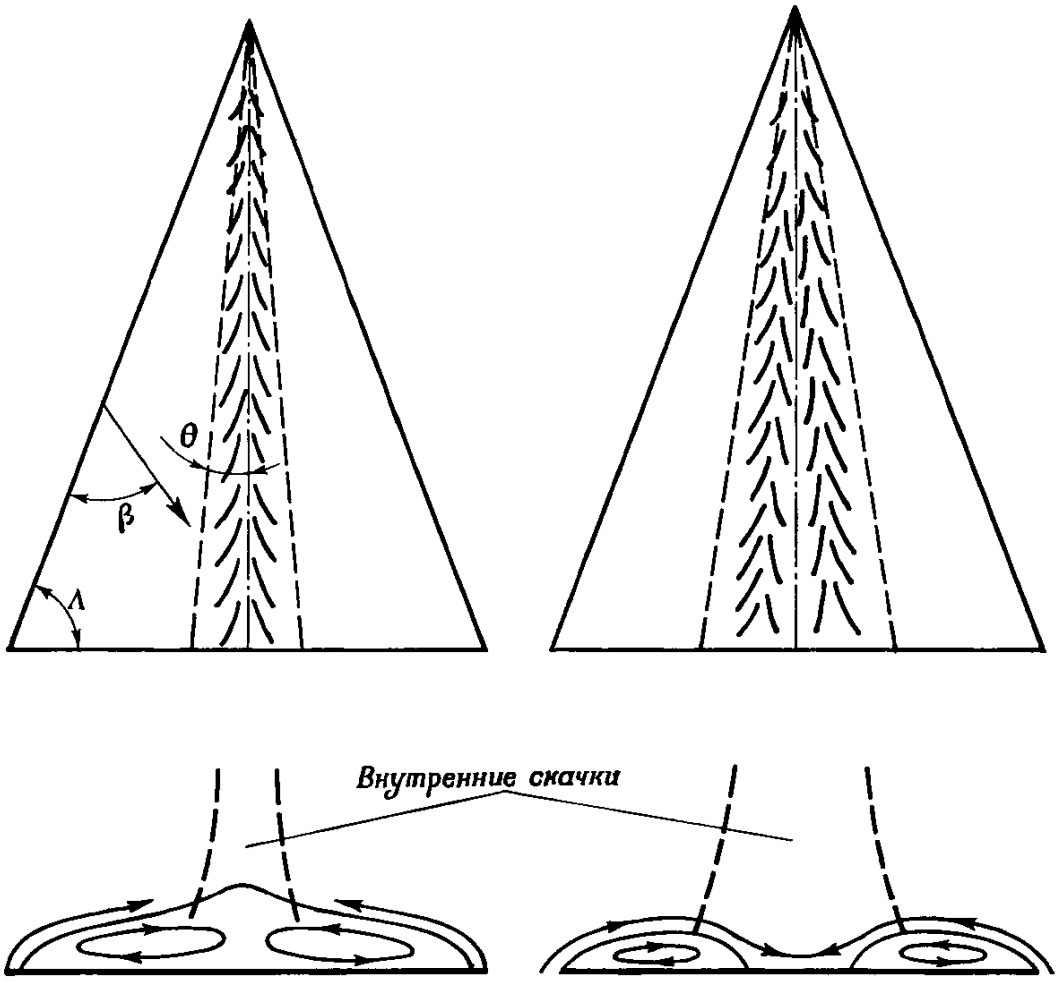


Фиг. 30. Результаты измерений и схема течения в поперечном сечении подветренной стороны треугольной пластины; $\Lambda = 75°$, $M_\infty = 10$, $Re_{\infty,L} = 2{,}48 \cdot 10^5$ [13].

○ $\alpha=0°$; △ $\alpha=5°$; □ $\alpha=9°$; ◇ $\alpha=11°$; ▽ $\alpha=15°$; ——— вязкий слой; – – – – скачок; × вершина пластины.

раз меньше (табл. 1). Следовательно, есть все основания предполагать, что в подветренных областях течения треугольных пластин, исследованных в работах [7, 18, 19], также были внутренние скачки уплотнения, причем большей интенсивности, чем наблюдаемые в работе [13], так как поворот потока у кромок происходил на больший угол. Существование висячего скачка возможно при условии, что нормальная составляющая скорости к скачку больше скорости звука. Без учета толщины вытеснения пограничного слоя это условие выполняется в работах [7, 18, 19]. Отрыв потока на пластине $\Lambda = 75°$ происходил на кромках, на пластине $\Lambda = 70°$ — на подветренной поверхности, но распределение теплового потока вблизи средней линии пластины было сходным [19]. На основании изложенного следует считать,

что в случае треугольных пластин не вихри, а внутренние скачки уплотнения индуцируют течение к средней линии пластины, которое отводит газ с малой энергией от ее середины, вызывает утоньшение пограничного слоя и появление пика теплового потока.



Фиг. 31. Схемы течений в вязком слое у подветренной стороны треугольного крыла.

Вместе с головной волной внутренние скачки определяют отрыв и все течение в подветренной области. Вихри представляют собою явление вторичное.

В работе [18] кроме высокого теплового потока также упоминаются и высокие давления в локальных зонах центральной части пластины, что соответствует течению с внутренними скачками; разрежения, соответствующие вихрям, при больших сверхзвуковых скоростях в опытах не обнаружены. Отметим также, что спектры предельных линий тока для течений на подветренной стороне, вызываемых вихрями, напоминают полученные в рассматриваемых работах только при толстых вязких слоях [13].

Безотрывное обтекание острия треугольной пластины объясняется тем, что вблизи острия существенно влияние вязкости

во всем слое возмущенного течения и внутренние скачки в нем не возникают. Уменьшение толщины вязкого слоя в центральной части пластины, определенное методом парового экрана, объясняется поперечным течением под действием скачков и повышением плотности, а появление двух линий растекания и пиков теплового потока по краям течения в центральной зоне — изменением схемы течения вследствие увеличения расстояния между скачками (фиг. 31). При больших углах атаки внутренние скачки удаляются от поверхности пластины и играют роль «замыкающих» скачков в донном течении. Слабо расширяющееся течение на плоской стороне остроносого полуконуса с местным отрывом у кромок соответствует обтеканию пластины при малых углах атаки. Безотрывное обтекание плоской подветренной стороны полуконуса при малых числах $\mathrm{Re}_{L,\infty}$ является очевидным следствием взаимодействия пограничного слоя и внешнего течения. Благодаря большой толщине пограничного слоя подветренная сторона имеет эффективную выпуклую форму, перетекание с наветренной стороны слабое и нет внутренних скачков, способных вызвать отрыв.

Что касается тупоносых полуконусов, треугольной пластины со скругленной вершиной и эллиптического цилиндра, то мы не имеем сведений о течении в подветренной области этих тел, а следовательно, не можем утверждать, что и для них определяющими являются внутренние скачки уплотнения. Отметим, однако, что расчетным путем обнаружено наличие внутренних скачков вследствие разрыва кривизны при переходе от сферического затупления к конической поверхности [14], но влияние этого разрыва слабее, чем в случае острых кромок. Возможно, что результаты работы [19, 20] обусловлены ослаблением или устранением внутренних скачков.

Отгиб конца треугольной пластины [20] и передняя кромка, имеющая форму гиперболы [19], по-видимому, вызывают поворот течения от кромок к оси пластины при непрерывном сжатии; не исключено появление внутренних скачков ниже по потоку, однако большие пики теплового потока при этом могут и не наблюдаться вследствие возросшей толщины пограничного слоя. Напомним также, что в исследованиях донного давления на осесимметричных телах были обнаружены большая разница в давлении на периферии и в центре дна при ламинарном пограничном слое и почти постоянное давление на дне при турбулентном пограничном слое. Аналогичных сведений о тепловом потоке не имеется, но, судя по результатам исследований теплопередачи в областях присоединения турбулентного слоя, можно считать, что относительная величина пиков теплового потока в случае турбулентного слоя будет меньше, чем в случае ламинарного слоя. Следовательно, большие пики теплового потока могут появляться в определенном интервале параметров M_∞, Re_∞ между областью их значений,

при которых взаимодействие вязкого и невязкого слоев приводит к исчезновению отрыва, и областью их значений, при которых слой турбулентный.

Особенности отрывных течений значительно слабее отражаются в распределении давления, чем в распределении теплового потока по поверхности тела.

ЛИТЕРАТУРА

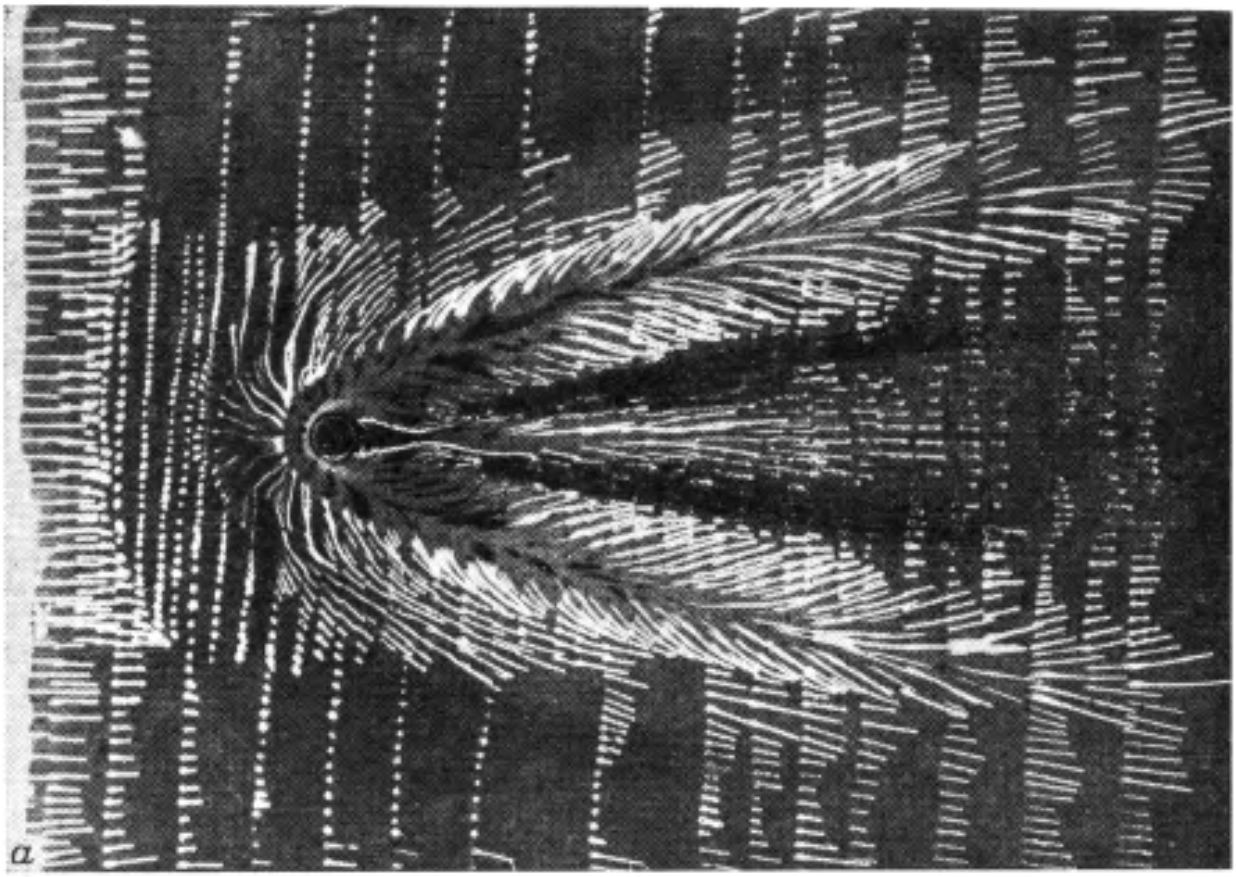
1. Авдуевский В. С., Медведев К. И., Исследование отрыва ламинарного пограничного слоя на конусе под углом атаки, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 3 (1966).
2. Алферов В. И., Окерблом Г. И., Саранцев А. И., Экспериментальное исследование вихревого течения около крыльев малого удлинения и круглых конусов при числе Маха, равном двум, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 5, (1967).
3. Ардашева М. М., Ильина С. А., Лодыгин Н. А., Майкапар Г. И., Первушин Г. Е., Толмачева К. Ф., Применение плавящихся термоиндикаторов для измерения тепловых потоков к моделям в аэродинамических трубах, *Ученые записки ЦАГИ*, № 1 (1972).
4. Боровой В. Я., Давлет-Кильдеев Р. З., Рыжкова М. В., Об особенностях теплообмена на поверхности некоторых несущих тел при больших сверхзвуковых скоростях, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 1 (1968).
5. Боровой В. Я., Давлет-Кильдеев Р. З., Рыжкова М. В., Особенности теплообмена на поверхности полуконуса, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа, *Труды ЦАГИ*, вып. 1106 (1968).
6. Боровой В. Я., Рыжкова М. В., Теплообмен на поверхности полуконуса при больших сверхзвуковых скоростях, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 4 (1969).
7. Боровой В. Я., Давлет-Кильдеев Р. З., Рыжкова М. В., Экспериментальное исследование теплообмена на крыльях и на клине, *Труды ЦАГИ*, вып. 1175 (1970).
8. Borovoy V. Ja., Davlet-Kildeev R. Z., Ryzhkova M. V., Experimental study of heat fransfer on lifting body surface in supersonic stream, Reprint of paper presented at the 4th Intern. Heat Trancf. Conf., 1970.
9. Боровой В. Я., Рыжкова М. В., Исследование теплообмена на подветренной выпуклой поверхности полуконуса, *Труды ЦАГИ*, вып. 1315 (1971).
10. Булах Б. М., Нелинейные конические течения газа, изд-во «Наука», М., 1970.
11. Давлет-Кильдеев Р. З., Особенности течения и теплопередачи на теле вращения, обтекаемом сверхзвуковым потоком газа, *Ученые записки ЦАГИ*, № 6 (1971).
12. Джонс, Хант, Использование чувствительных к изменению температуры покрытий для получения количественных данных о теплопередаче при аэродинамическом нагреве, *Ракетная техника и космонавтика*, № 7 (1964).
13. Cross E. J., Hankey W. L., Investigation of the leeward side of a delta wing at hypersonic speeds, *Journal of Spececraft and Rockets*, **6**, № 2 (1969).
14. Любимов А. Н., О существовании внутренних ударных волн при обтекании газом затупленных конусов, *ДАН* **191**, № 4 (1970).

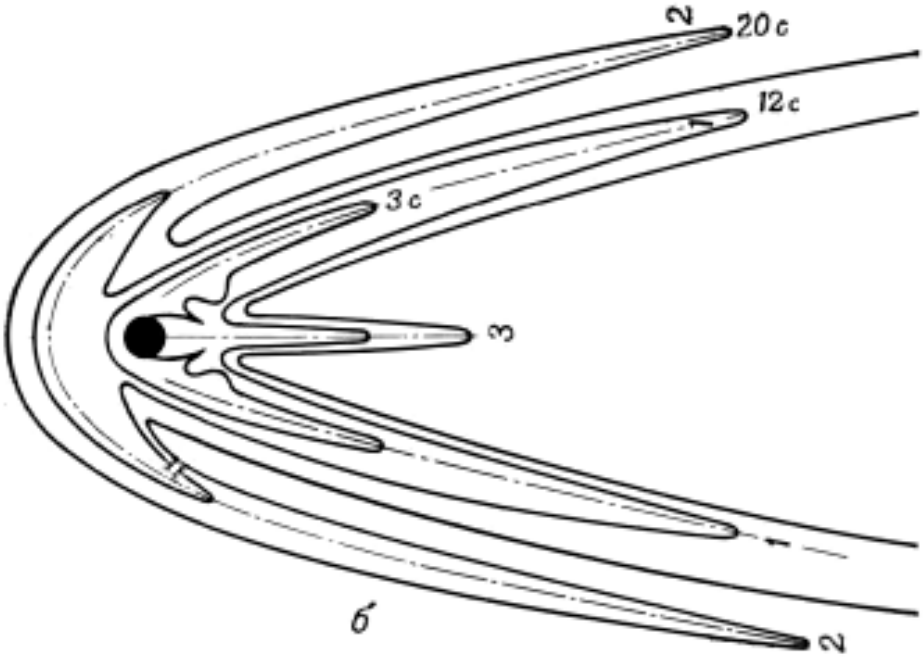
15. Майкапар Г. И., Аэродинамическое нагревание несущих тел, XIX th Intern. Astron. Congres., v. 3, 1970, Pergamon Press — Polish. Sci. Publ.
16. Майкапар Г. И., Вихри за головой ударной волной, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 4 (1968).
17. Морозов И. П., Экспериментальное исследование теплообмена на поверхности цилиндрических тел эллиптического сечения, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа в диапазоне углов атаки от 0 до 20°, *Труды ЦАГИ*, вып. 1175 (1970).
18. Уайтхед, Влияние вихрей на теплообмен вдоль подветренной поверхности стреловидного крыла при M = 6, *Ракетная техника и космонавтика*, № 3, (1970).
19. Уайтхед, Бертрам, Снижение теплового потока, вызванного вихрями на подветренной стороне тонких крыльев в гиперзвуковом потоке, *Ракетная техника и космонавтика*, № 9 (1971).
20. Рао, Уменьшение нагрева теневой поверхности треугольного крыла путем отклонения вершины при гиперзвуковых скоростях полета, *Ракетная техника и космонавтика*, № 9 (1971).
21. Whitehead A. H., Hefner J. H., Rao D. M., Lee-Surface vortex effects over configurations in Hypersonic flow, AIAA Paper № 72-77.
22. Майкапар Г. И., Аэродинамическое нагревание подветренной стороны тела при сверхзвуковых скоростях, *Ученые записки ЦАГИ*, III, № 6 (1972).

6. АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРЕВАНИЕ В ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНЫХ ВОЛН С ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Экспериментальные исследования трехмерных течений взаимодействия проводились на простейших примерах: наклонный цилиндр на пластине, цилиндр на конусе, имитирующий затупленную кромку крыла или руля [1—4, 7, 16], поперечная струя, вытекающая в сверхзвуковой поток из отверстия в пластине или конусе [5, 8, 10, 11], треугольное полукрыло, установленное на пластине или конусе [17, 18], тупоносые полуконусы, установленные на пластине [12], и др.

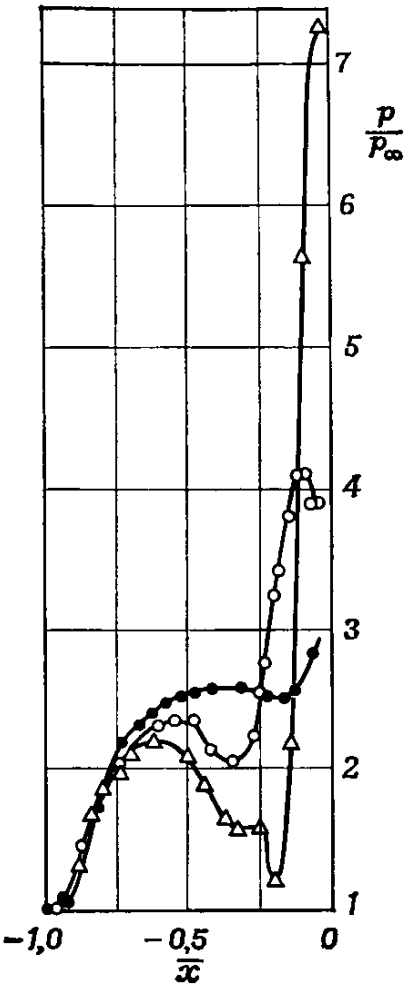
Наиболее полно исследована интерференция цилиндра с пластиной. Высота цилиндра выбиралась достаточно большой, с тем чтобы ее влияние на отрывное течение не было существенным. Область отрыва простирается далеко перед цилиндром, перпендикулярным пластине (фиг. 32), причем давление в начале области отрыва, длина области отрыва, угол наклона разделяющей линии тока в плоскости симметрии подчиняются законам «свободного взаимодействия», сходным с соответствующими законами для двумерного течения. Так, например, коэффициент давления в начале области отрыва пропорционален произведению $(M_\infty^2 - 1)^{-1/4}\mathrm{Re}_S^{-1/4}$ [4] (Re_S — число Рейнольдса, вычисленное по расстоянию S от начала области отрыва до кромки пластины), относительная длина области отрыва $l/d \sim \mathrm{Re}_{\infty,x_0}^{1/4}$, угол наклона разделяющей линии тока $\theta \sim \mathrm{Re}_{\infty,x_0}^{-1/4}$ (x_0 — расстояние до оси цилиндра от кром-





Фиг. 32. *а* — спектр предельных линий тока на пластине с перпендикулярным к ее поверхности цилиндром ($M_\infty = 5$); *б* — граница плавления термоиндикатора (линии постоянной температуры поверхности и теплового потока) для различных моментов времени [16].

ки пластины) [16]. Пересечение скачка уплотнения, исходящего из начала области отрыва, с головной волной цилиндра может привести к появлению на цилиндре и в области присоединения оторвавшегося слоя к цилиндру пиков теплового потока и давления [2]. Область присоединения характеризуется линией «растекания» в спектре предельных линий тока, переходящей с цилиндра на пластину. В области присоединения потока на пластине наблюдаются большие напряжения трения (длинные штрихи на фиг. 32).

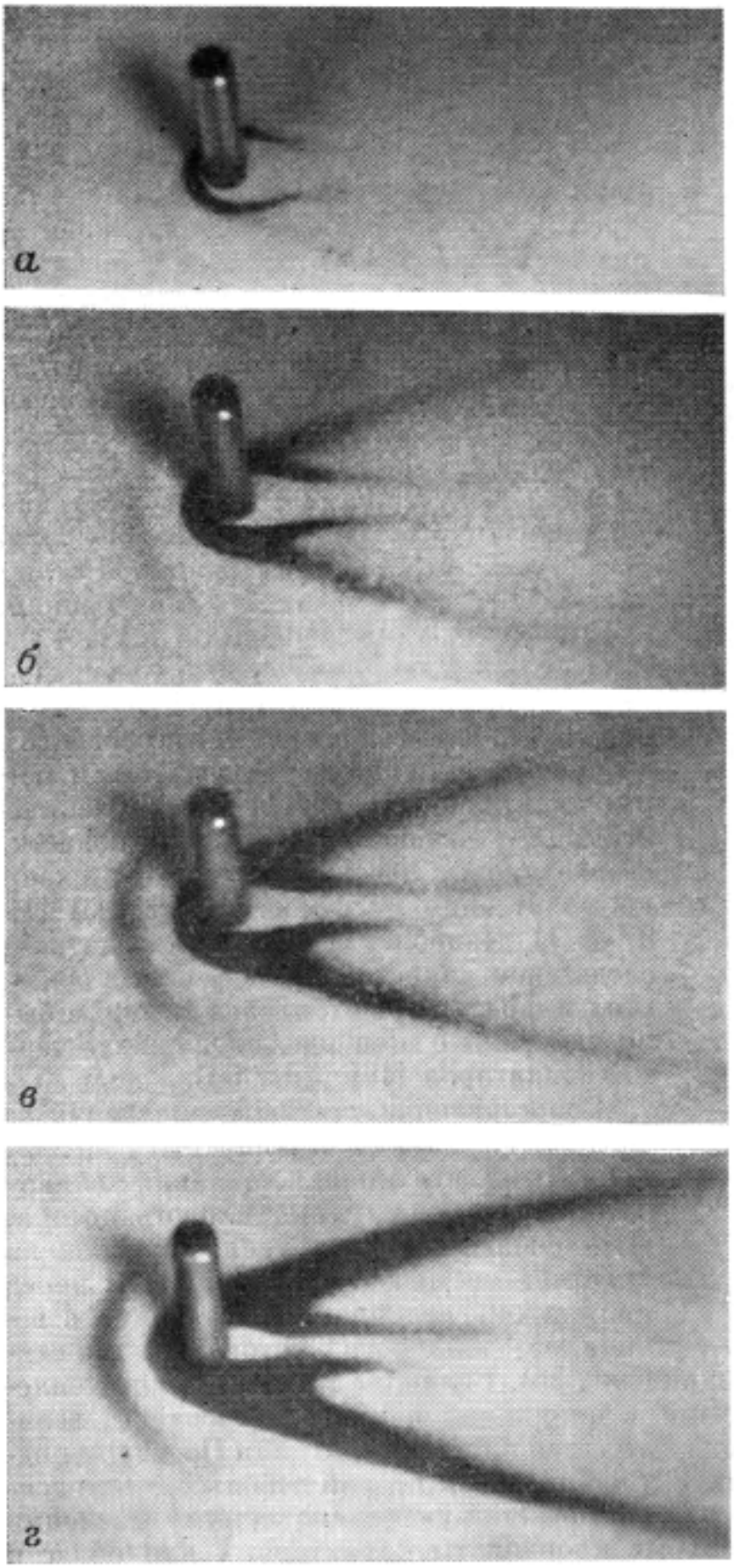


Фиг. 33. Распределение давления по пластине в плоскости симметрии перед уступом, цилиндром и струей, $M_\infty = 3$ [5].

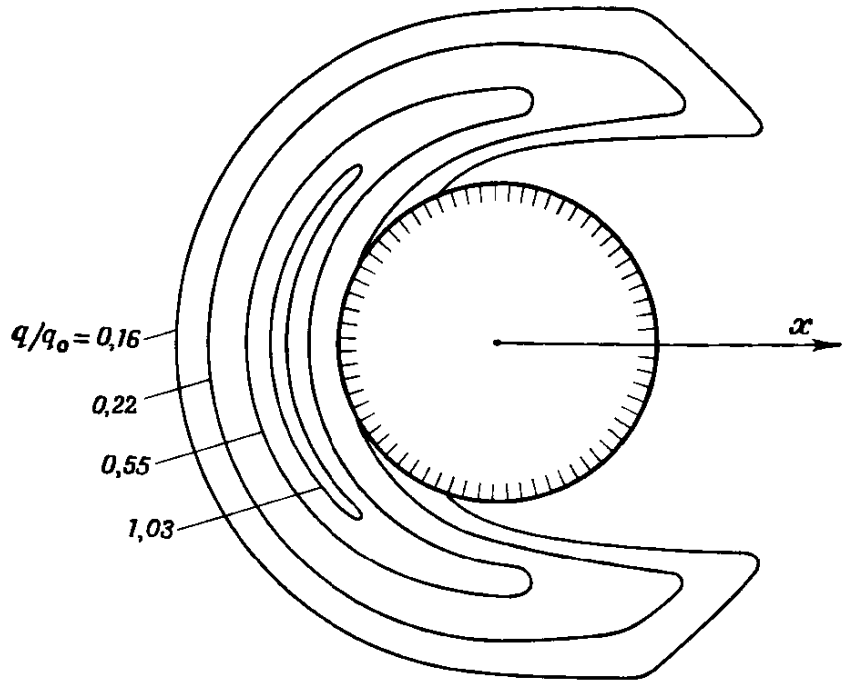
● уступ; ○ струя, $p_{0j}/p_\infty = 40$; △ цилиндр.

Распределение давления за линией отрыва в плоскости симметрии течения сначала сходно с распределением давления перед уступом, но затем появляется отличие, свидетельствующее о существенном влиянии трехмерности течения (фиг. 33). Из фиг. 33 видно также, что распределение давления перед струей занимает промежуточное положение между распределениями давления перед уступом и перед цилиндром. В трехмерных областях отрывного течения обнаружены области сверхзвуковых течений, внутренние скачки уплотнения и вторичные отрывы [1, 3, 4, 7]. Наиболее важным для практики следствием является наличие в этих областях пиков теплового потока, которые были измерены с помощью плавящихся термоиндикаторов [16] (фиг. 34).

Сопоставление границы плавления и спектра предельных линий тока (фиг. 32) показывает, что линии растекания являются линиями максимумов теплового потока. Наибольшей величины тепловой поток на пластине достигает в узкой области перед цилиндром; величина его сравнима с величиной теплового потока на критической линии цилиндра (фиг. 35). Величина максимального теплового потока к пластине с цилиндром намного превосходит величину теплового потока к гладкой пластине (фиг. 36). Перед цилиндром на линии *2* (фиг. 32) наблюдается второй небольшой пик теплового потока, возможно соответствующий максимуму давления (фиг. 33). Относительные координаты характерных для области отрыва линий слабо зависят от числа Рейнольдса и могут быть представлены в обобщенном виде (фиг. 37). В обобщенном виде

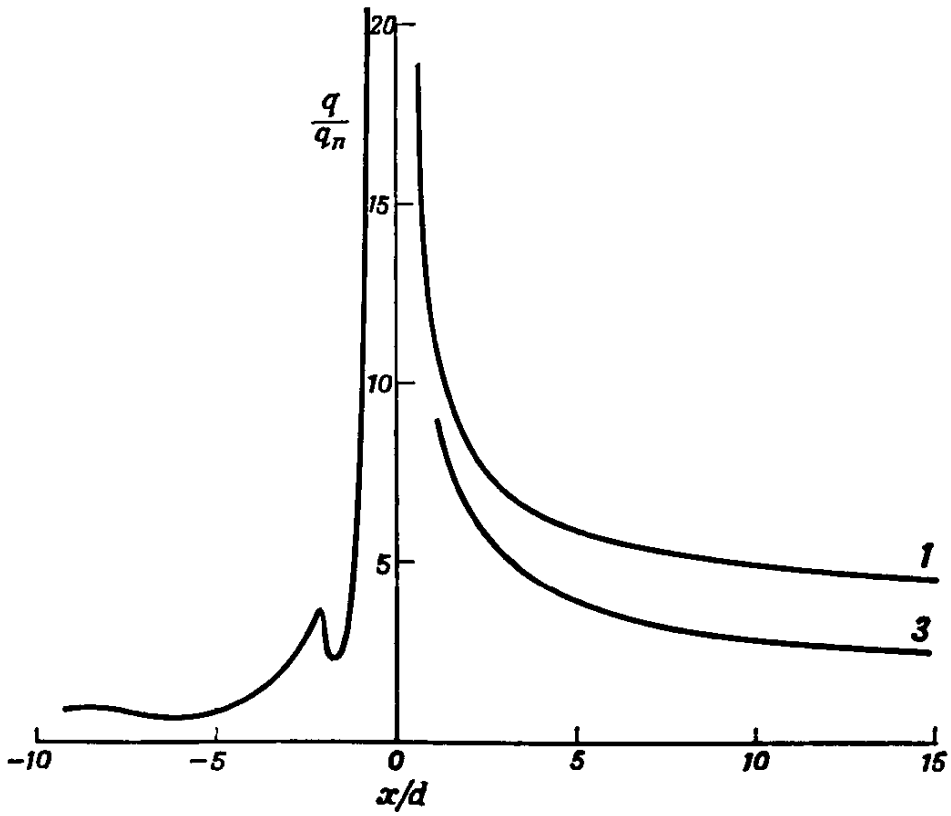


Фиг. 34. Области расплавившегося термоиндикатора, $M_\infty = 6$ [16].
а – τ=0,24 с; б – τ=1 с; в – τ=2 с, г – τ=4 с;



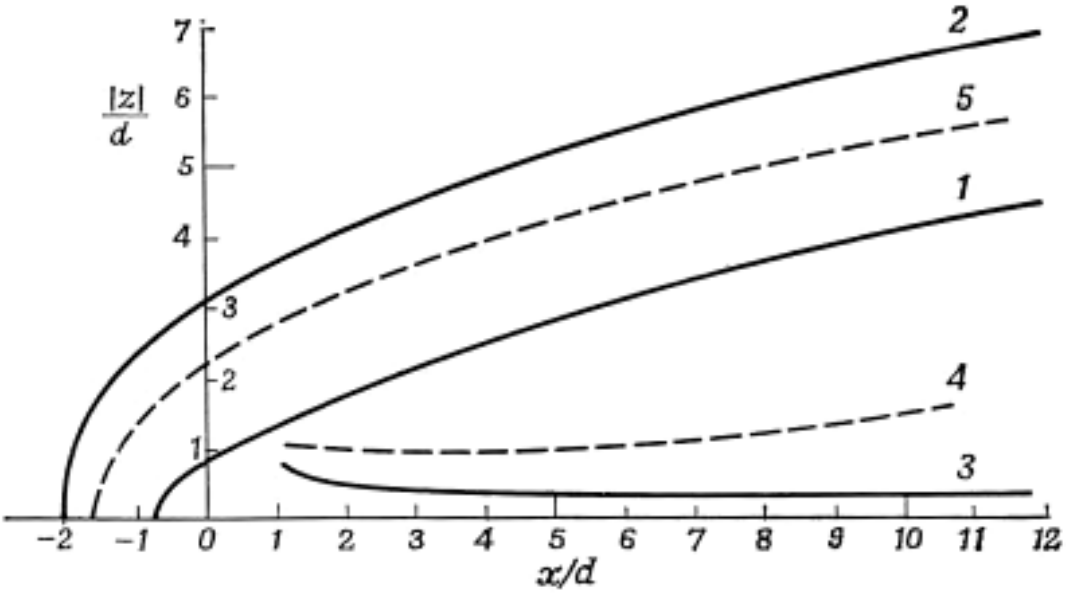
Фиг. 35. Линии равных отношений q/q_0; $M_\infty = 6$, $Re_{\infty,x_0} = 1{,}2 \cdot 10^5$, $T_w/T_0 = 0{,}6—0{,}9$ [16].

q — тепловой поток к пластине; q_0 — тепловой поток к критической линии цилиндра.

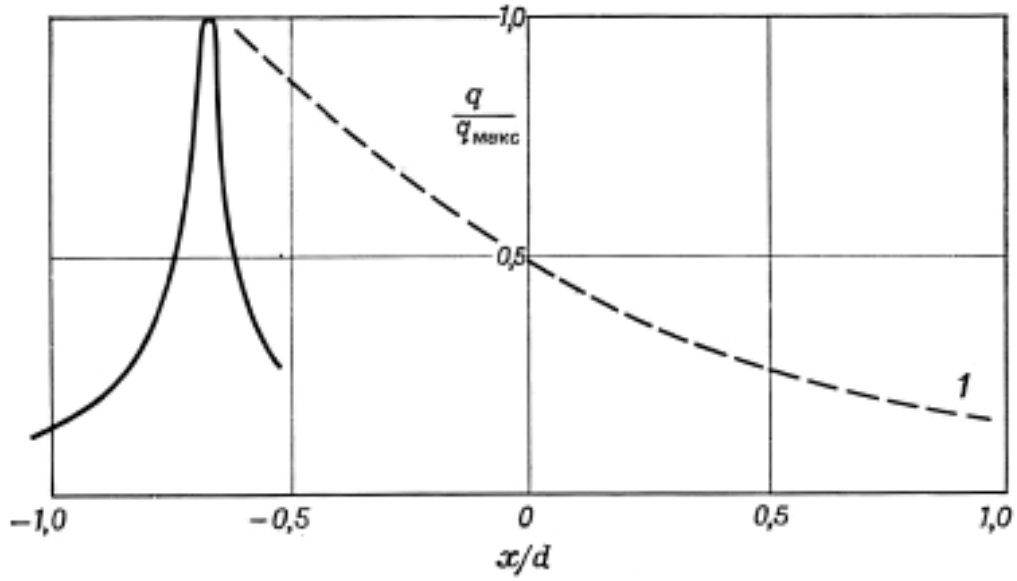


Фиг. 36. Тепловой поток к пластине в плоскости симметрии перед цилиндром и на линиях растекания за цилиндром (линии *1*, *3*, см. фиг. 32). $M_\infty = 5$, $Re_{\infty,x_0} = 1{,}1 \cdot 10^6$.

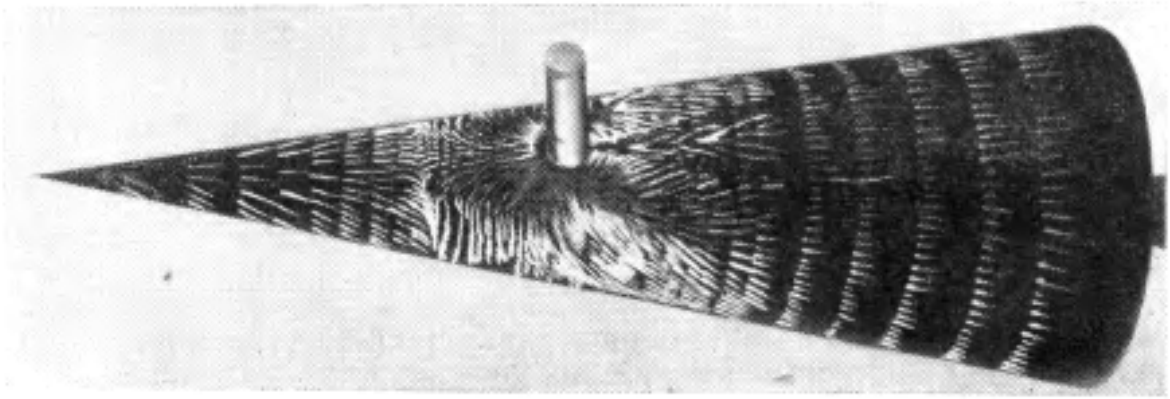
$q_п$ — тепловой поток к гладкой пластине.



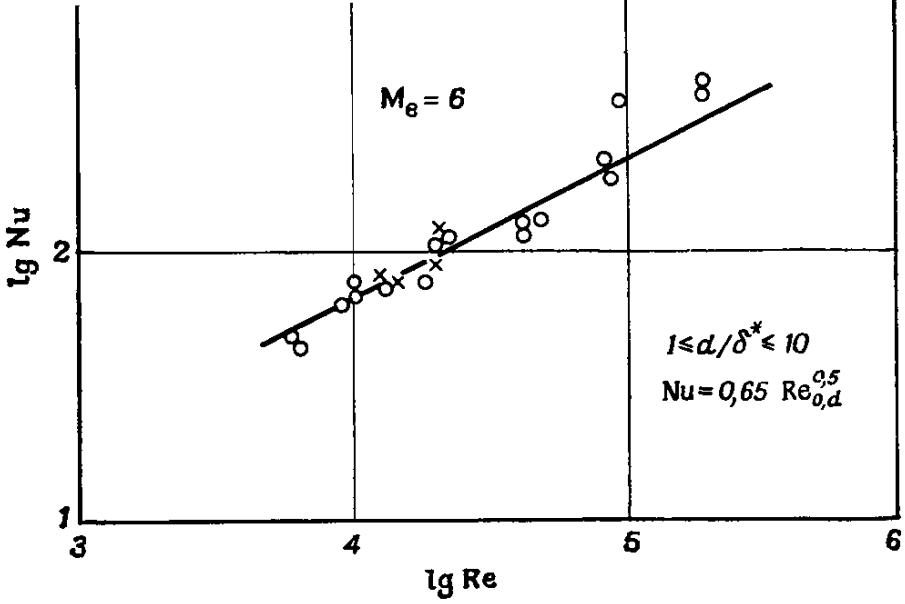
Фиг. 37. Координаты линий растекания *1*, *3*, линии второго максимума теплового потока *2* и линий минимума теплового потока *4*, *5* на пластине; $M_\infty = 6$, $Re_{\infty x_0} = 10^5 - 10^6$ [16].



Фиг. 38. Распределение теплового потока в плоскости симметрии пластины и по линии растекания *1*, $M_\infty = 6$ [16].



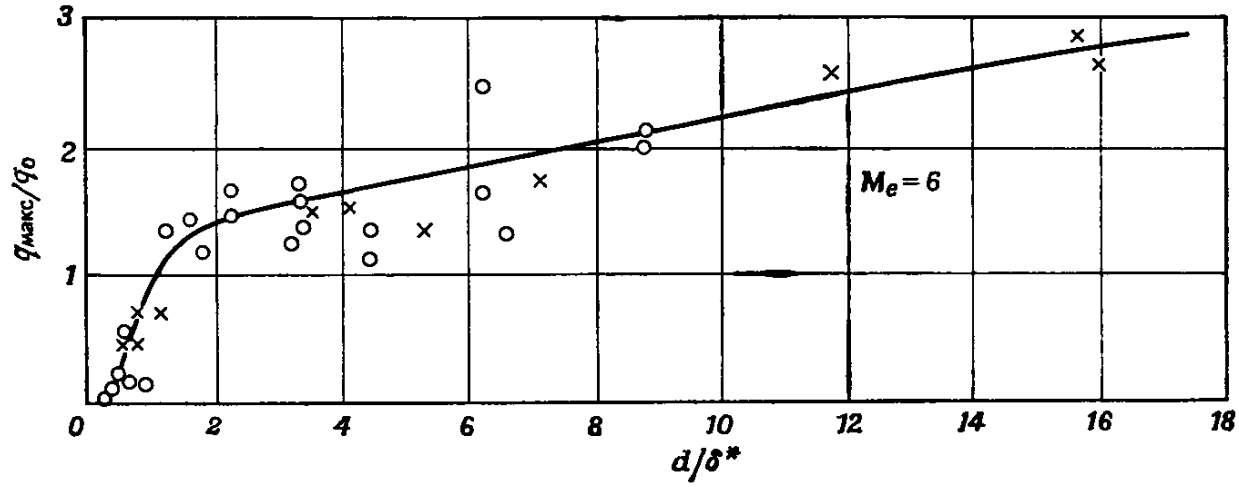
Фиг. 39. Спектр предельных линий тока для конуса $\theta_к = 10°$ под углом атаки $\alpha = 20°$ (наветренная сторона), $M_\infty = 5$ [16].



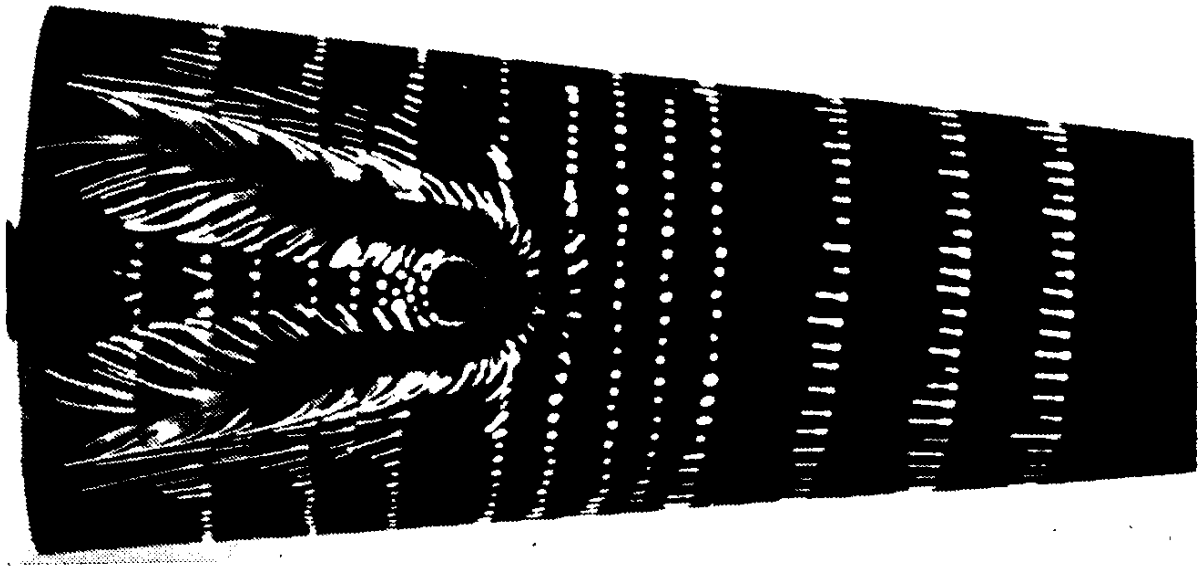
Фиг. 40. Максимальный тепловой поток перед цилиндром [16].

$$Nu = \frac{h_{макс} d}{\lambda_0}, \quad Re_{0,d} = \frac{u_\infty \rho_0' d}{\mu_0},$$

λ_0, μ_0 — коэффициенты теплопроводности и вязкости, соответствующие температуре торможения; ρ_0' — плотность воздуха за прямым скачком уплотнения; ○ — пластина; × конус.

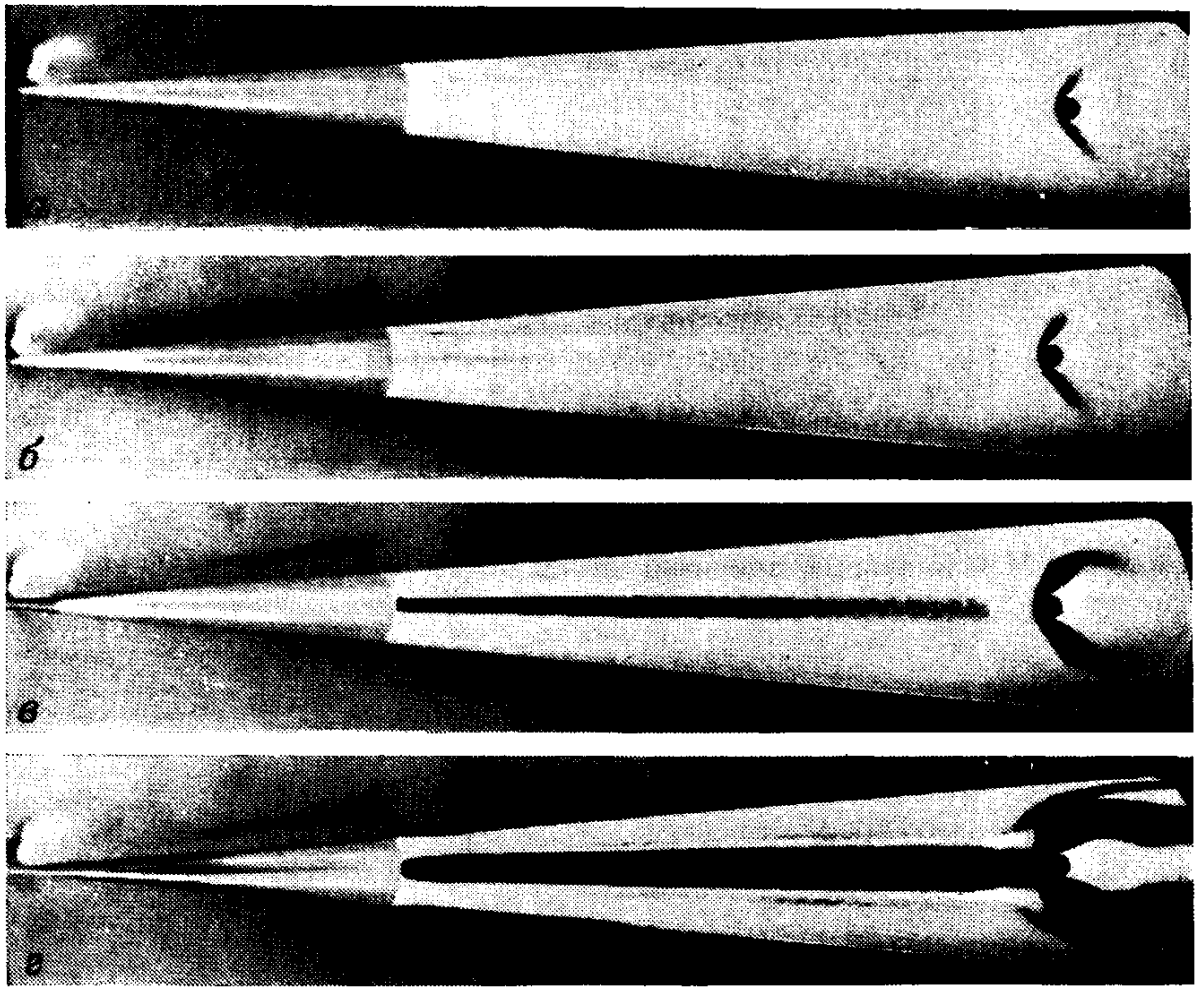


Фиг. 41. Максимальный тепловой поток перед цилиндром [18].
○ пластина; × конус.



Фиг. 42. Спектр предельных линий тока на конусе при истечении струи; $\theta_к = 5°$, $M_\infty = 5$; $\alpha = 0$, $p_{0j}/p_0 = 1$.

Фиг. 43. Спектр предельных линий тока на подветренной стороне конуса при истечении струи; $\theta_к = 5°$, $M_\infty = 5$, $\alpha = 10°$, $p_{0j}/p_0 = 1$.

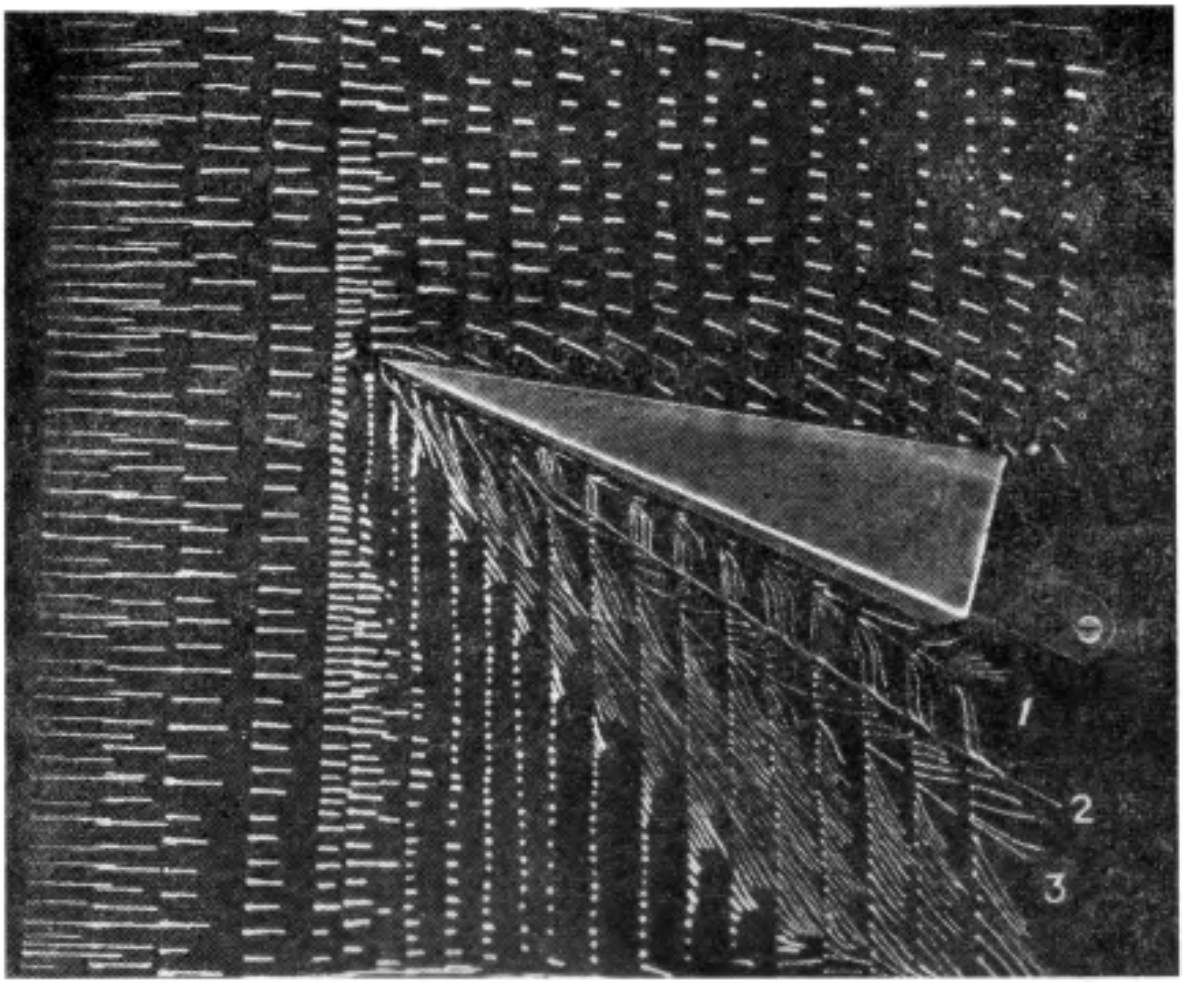


Фиг. 44. Границы изменения цвета термоиндикатора; $\theta_к = 5°$, $M_\infty = 5$, $\alpha = 10°$, $p_{0j}/p_0 = 1$.

а – τ=0,5 с; *б* – τ=1 с; *в* – τ=4 с; *г* – τ=16 с.

можно также представить распределение теплового потока в плоскости симметрии перед цилиндром и по линии растекания (фиг. 38) [16].

Отрыв потока от поверхности цилиндра диаметром D с полусферической головной частью при условии, что диаметр d установленного на нем цилиндра не превосходит 0,1 D, сходен с отры-

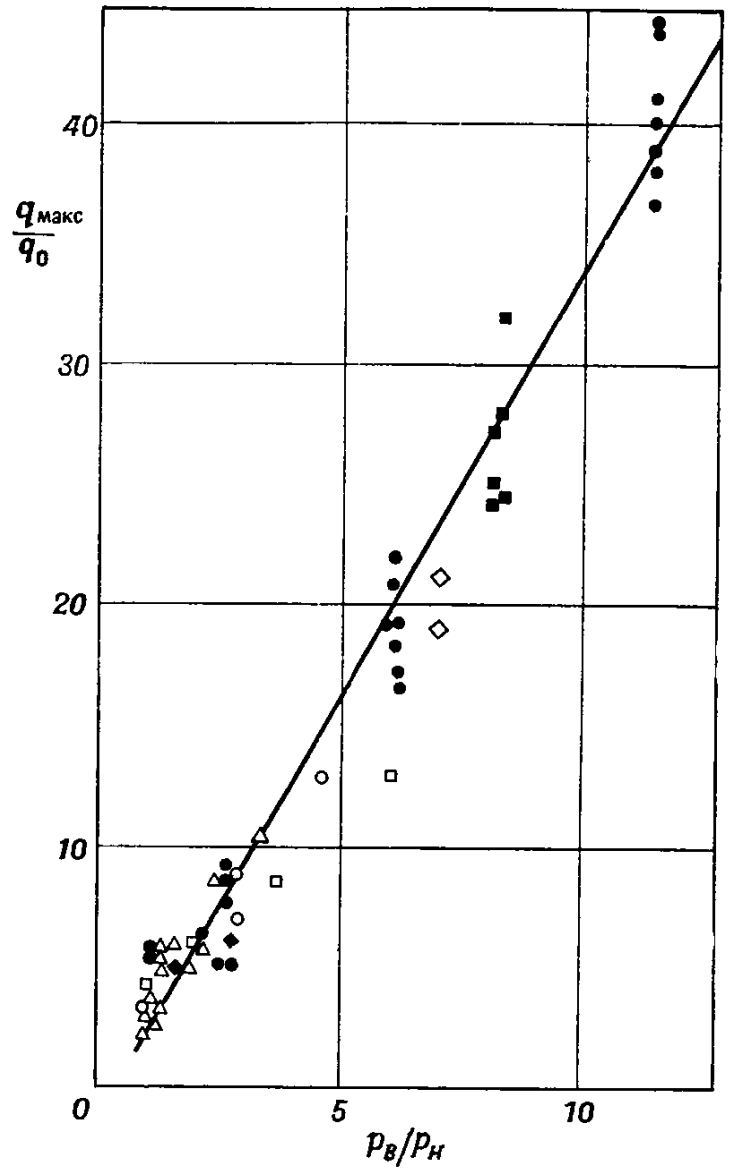


Фиг. 45. Спектр предельных линий тока на пластине с установленным на ней полукрылом, $M_\infty = 5$ [17, 18].

вом от пластины. То же самое можно сказать и об отрыве от поверхности конуса (фиг. 39). Максимальный тепловой поток перед цилиндром может быть представлен универсальной зависимостью (фиг. 40).

При уменьшении отношения диаметра цилиндра к толщине вытеснения δ^* пограничного слоя на гладкой пластине до $\sim 1-2$ описанные выше особенности отрыва сохраняются; при $d/\delta^* < 1$ область отрыва распространяется еще больше вперед, но число характерных линий в спектре предельных линий тока уменьшается, остается одна линия максимума теплового потока *1*. Максимум теплового потока перед цилиндром резко падает (фиг. 41).

Наклон цилиндра вперед не приводит к принципиальным отличиям по сравнению с вертикальным цилиндром. Наклон цилиндра назад приводит к уменьшению длины области отрыва в плоскости симметрии; при угле наклона, равном ~45°, ударная волна в плоскости симметрии доходит до основания цилиндра, область отрыва



Фиг. 46. Зависимость отношения величины максимального теплового потока на пластине в области отрыва к тепловому потоку к гладкой пластине от отношения давлений [17].

△ $\chi=0°$, $M_\infty=3$; □ $\chi=0°$, $M_\infty=5$; ■ $\chi=0°$, $M_\infty=6$; ◇ $\chi=30°$, $M_\infty=6$; ○ $\chi=60°$, $M_\infty=5$; ● $\chi=60°$, $M_\infty=6$; ◆ $\chi=80°$, $M_\infty=3$.

располагается по бокам цилиндра. Максимальный тепловой поток к пластине перед цилиндром с изменением угла его наклона изменяется так же, как и тепловой поток к цилиндру под углом скольжения [16]. Тепловой поток к подветренной поверхности конуса перед цилиндром при угле атаки $\alpha > \theta_к$ значительно

меньше, чем при угле атаки $\alpha = 0$, но и в этом случае присутствие цилиндра вызывает увеличение пика теплового потока [18].

Отрыв потока перед струей, вытекающей из круглого отверстия в пластине, имеет много общего с отрывом перед цилиндром [5, 8, 10, 11]. Качественное сходство иллюстрируется на фиг. 42—44 (эксперименты Борового и Рыжковой).

Треугольное полукрыло с острой передней кромкой при достаточно большом угле отклонения также вызывает отрыв потока от пластины, на которой оно установлено (фиг. 45). В спектре предельных линий тока наблюдается основная линия растекания *1*, линия вторичного отрыва (стекания) *2* и линия повторного присоединения (растекания) *3*. Максимум теплового потока достигается на линии *1*. Зависимость его величины от отношения давления за ударной волной, отходящей от передней кромки полукрыла, p_B к давлению на пластине вне области возмущения от полукрыла p_H при различных углах стреловидности передней кромки и углов атаки полукрыла является универсальной (фиг.46) Отношение давлений,— по-видимому, наиболее важный параметр при взаимодействии скачков уплотнения с пограничным слоем [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Войтенко Д. М., Зубков А. И., Панов Ю. А., Обтекание цилиндрического препятствия на пластине сверхзвуковым потоком газа, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 1 (1966).
2. Тетерин М. П., Исследование течения газа в области падения скачка уплотнения на цилиндр, обтекаемый потоком большой сверхзвуковой скорости, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 2 (1967).
Исследование течения газа и теплопередачи в области падения скачка уплотнения на цилиндр, обтекаемый потоком большой сверхзвуковой скорости, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 3 (1967).
3. Войтенко Д. М., Зубков А. И., Панов Ю. А., О существовании сверхзвуковых зон в пространственных отрывных течениях, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 1 (1967).
4. Авдуевский В. С., Медведев К. И., Физические особенности течения в области отрыва при трехмерном взаимодействии пограничного слоя с ударной волной, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 1 (1967).
5. Глаголев А. И., Зубков А. И., Панов Ю. А., Обтекание струйного газообразного препятствия на пластине сверхзвуковым потоком, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 3 (1967).
6. Панов, Ю. А., Взаимодействие падающего трехмерного скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 3 (1968).
7. Авдуевский В. С., Медведев К. И., Физические особенности течения в трехмерных отрывных зонах, сб. «Тепло- и массоперенос», т. 1, изд-во «Энергия», М., 1968.
8. Глаголев А. И., Зубков А. И., Панов Ю. А., Взаимодействие струи газа, вытекающей из отверстия в пластине, со сверхзвуковым потоком, *Изв. АН СССР МЖГ*, № 2 (1968).
9. Панов Ю. А., О форме области отрывного течения, вызванной падением трехмерной ударной волны на пластину с турбулентным пограничным слоем, *Вестник МГУ, Математика и механика*, № 1 (1969).

10. Кондратьев И. А., Экспериментальное исследование теплопередачи на пластине при обтекании струи сверхзвуковым потоком, *Ученые записки ЦАГИ*, № 1 (1970).
11. Авдуевский В. С., Медведев К. И., Полянский М. Н., Взаимодействие сверхзвукового потока с поперечной струей, вдуваемой через круглое отверстие в пластине, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 5 (1970).
12. Авдуевский В. С., Грецов В. К., Исследование трехмерного отрывного обтекания полуконусов, установленных на плоской пластине, *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 6 (1970).
13. Морозов М. Г., Подобие сверхзвуковых срывных зон, *Изв. АН СССР МЖГ*, № 6 (1970).
14. Зайцев Ю. И., Келдыш В. В., Особые случаи течения вблизи сверхзвуковой кромки и линии пересечения скачков уплотнения. *Ученые записки ЦАГИ, I*, № 1 (1970).
15. Кондратьев И. А., Экспериментальное исследование теплопередачи на плоской пластине при взаимодействии косого скачка уплотнения с ламинарным пограничным слоем, *Ученые записки ЦАГИ*, II, № 2 (1971).
16. Боровой В. Я., Рыжкова М. В., Теплообмен на пластине и конусе при трехмерном взаимодействии пограничного слоя с ударной волной, образующейся вблизи цилиндрического препятствия, *Труды ЦАГИ*, вып. 1374 (1972).
17. Боровой В. Я., Севастьянова Е. В., Течение газа и теплообмен в зоне взаимодействия ламинарного пограничного слоя с ударной волной вблизи полукрыла, установленного на пластине, *Труды ЦАГИ*, вып. 1374 (1972).
18. Боровой В. Я., Рыжкова М. В., Севастьянова Е. В., Экспериментальное исследование течения газа и теплообмена в зонах пространственного взаимодействия ламинарного пограничного слоя и ударных волн, образующихся вблизи цилиндрического препятствия и полукрыла, IV совещание по тепло- и массообмену, Минск, 1972.

БИБЛИОГРАФИЯ

I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ, РАСЧЕТ ОТРЫВА ОТ ТЕЛА ПОД УГЛОМ АТАКИ, ОБЗОРЫ

Верле М., Дэвис Р., Точка отрыва несжимаемого пограничного слоя на параболе при наличии угла атаки, *Прикладная механика*, Сер. Е, 39, № 1, 7—12 (1972).

Никольский А. А., Бетяев С. К., Малышев И. П., О предельной форме отрывного автомодельного течения идеальной жидкости, сб. «Проблемы прикладной математики и механики», изд-во «Наука», М., 1971, стр. 262—268.

Палак А., Расчет отрыва пограничного слоя, вызванного вдувом, *Ракетная техника и космонавтика*, **10**, № 4, 221—223 (1972).

Фишбурн Б. Д., Адамсон Т. С., Трансзвуковая зона в сверхзвуковом пограничном слое при обтекании острого угла, *Ракетная техника и космонавтика*, **10**, № 2, 14—15 (1972).

Холоднов С. К., К приближенному расчету отрывных течений вязкой несжимаемой жидкости, сб. «Труды второй Республиканской конференции по аэрогидромеханике, теплообмену и массообмену», изд-во Киевск. ун-та, 1971, стр. 107—111.

Чароут А. Ф., Отрыв сверхзвукового ускоряющегося потока при обтекании выемки, *Ракетная техника и космонавтика*, 9, № 8, 283—284 (1971).

Achenbach E., Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, **54**, № 3, 565—575 (1972).

Aircraft wake turbulence and its detection, Proc. of a Symposium on Aircraft Wake Turbulence, Siettle, Wash., 1970.

Alber I. E., Similar solution for a family of separated turbulent boundary layers, AIAA Paper № 71-203, 1971.

Bourque C., Recollement de la couche limite laminaire en supersonique, *C.A.S.I. Transactions*, **4**, № 1, 25—31 (1971).

Buckmaster J. Effect of transverse curvature on the singularity at separation for a laminar boundary layer, *Phys. of Fluids*, **14**, № 8, 1593—1595 (1971).

Cebeci T. and others, Calculation of separation point in incompressible turbulent flows, *J. Aircraft*, **9**, № 9, 618—624 (1972).

Cérésuela R., Gilbart C., Étude théorique et expérimentale de la répartition de pression et de flux thermique sur une gouverne en présence d'une épaisse couche limite turbulente hypersonique, ICAS Paper № 72-23.

Cloutier M., Eichelbrenner E. A., À propos du décollement tridimensionnel sur un ellipsoide incline, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **268**, № 4, 231—234 (1969).

Eichelbrenner E. A., Cloutier M., Influence du transfert de chaleur sur le décollement tridimensionnel, Mécanique Appliquée, **15**, № 1, 149—154 (1970).

Guiraud J.-P., À propos de la séparation d'une couche limite laminaire, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **268**, № 4, 239—241 (1969).

Hall M. G., Vortex breakdown, «Annual Review of Fluid Mechanics», **4**, 195—217 (1972).

Hieu H., Masbernat L., Décollement dans les écoulements plans incompressibles turbulents sur des corps épais, Mécanique Appliquée, **16**, № 2, 375—394 (1971).

Horton H. P., Fundamental aspects of flow separation under high-lift conditions, Assessment of Lift Augmentation Devices, AGARD LS-43-71 (1970).

Inger G. R., Dutt B., Surface curvature and lateral pressure gradient effects on boundary layer separation, AIAA Paper № 72-698.

Jacob K., Berechnung der abgelösten inkompressiblen Strömung um Tragflügelprofile und Bestimmung des maximalen Aurtriebs, *Ztschr. für Flugwissenschaften*, **17**, № 7, 221—230 (1969).

Klemp J. B., Acrivos A., A method for integrating the boundary-layer equations through a region of reverse flow, *J. Fluid Mech.*, **53**, № 1, 177—191 (1972).

Klemp J. B., Acrivos A., High Reynolds number steady separated flow past a wedge of negative angle, *J. Fluid Mech.*, **56**, № 3, 577—590 (1972).

Korkegi R. H., Viscous interactions and flight at high Mach numbers, AIAA Paper № 70-781.

Little B. H., Scaling effects of shock-induced separation, High Reynolds Number Subsonic Aerodynamics, AGARD LS-37-70, 1970.

Mabey D. G., Analysis and correlation of data on pressure fluctuations in separated flow, *J. Aircraft*, **9**, № 9, 642—645 (1972).

Moulden T. H., Wu J. M., On the conditions at the separation point of a laminar boundary-layer, *ZAMM*, **52**, № 5, 248—249 (1972).

Nishioka M., Iida S., Separation of turbulent boundary layer (wall pressure distribution near separation), *Bull. of ISME*, **15**, № 87, 1084—1092 (1972).

Reding J. P., Ericsson L. E., Delta wing separation can dominate shuttle dynamics, AIAA Paper № 72-976.

Roberts M. L., Transitional flow separation upstream of a compression corner, AIAA Paper № 70-764.

Stollery J. L., Laminar and turbulent boundary layer studies at hypersonic speeds, ICAS Paper № 72-09.

Wang K. C., Separation patterns of boundary layer over an inclined body of revolution, AIAA Paper № 71-130.

Wu Th. Yao-tsu, Cavity and wake flows, «Annual Review of Fluid Mechanics», **4**, 243—284 (1972).

II. ОТРЫВ ПЕРЕД ЩИТКАМИ, УСТУПАМИ, СТРУЯМИ И ЗА УСТУПАМИ

Антонов А. Н., Расчет взаимодействия турбулентного пограничного слоя с внешним сверхзвуковым потоком за уступом, *Изв. АН СССР, МЖГ*, **V—VI**, № 3, 33—40 (1971).

Боровой В. Я., Харченко В. Н., Экспериментальное исследование течения и теплообмена в зоне отрыва на осесимметричном теле с коническим щитком, *Изв. АН СССР, МЖГ*, **III—IV**, № 2, 35—40 (1972).

Лужанский Б. Е., Солнцев В. П., Экспериментальное исследование течения в зонах отрыва турбулентного пограничного слоя перед двумерным уступом, *Изв. АН СССР, МЖГ*, **III—IV**, № 2, 145—149 (1972).

Уэрл М., Плоское течение с отрывом, вызванным взаимодействием с боковой струей, *Ракетная техника и космонавтика*, **10**, № 2, 96—103 (1972).

Харченко В. Н., Влияние вдува газа на отрыв пограничного слоя и теплообмен в зоне отрыва перед щитком на конусе, сб. «Аэродинами-

ческое нагревание при гиперзвуковых скоростях потока», стр. 234—238 (1970).

Bathem J. P., An experimental study of turbulent separating and reattaching flows at high Mach number, *J. Fluid Mech.*, **52**, № 3, 425—435 (1972).

Charwat A. F., Supersonic flows with imbedded separated regions, «Advanced in Heat Transfer», 6, 1—132 (1970).

Elfstrom G. M., Turbulent hypersonic flow at a wedge-compression corner, *J. FLuid Mech.*, 53, № 1, 113—127 (1972).

Fong M. C., An analysis of plume-induced boundary-layer separation, *J. Spacecraft and Rockets*, 8, № 11, 1107—1113 (1971).

Hunter L. G., Reeves B. L.,Results of a strong interaction, wake-like model of supersonic separated and reattaching flows, AIAA Paper, 71-128.

Kiya Masaru, Arie Mikio, A free-streamline theory for bluff bodies attached to a plane wall, *J. Fluid Mech.*, **56**, № 2, 201—219 (1972).

Mueller T. J., O'Leary R. A., Physical and numerical experiments in laminar incompressible separating and reattaching flows, AIAA Paper № 70-763.

Rom J., Seginer A., Ariely R., Green M., Heat transfer in separated regions in supersonic and hypersonic flows, ICAS Paper № 72-14.

Werlé, Gallon M., Controle d'écoulements par jet transversal, *Aeronautique et Atronautique*, № 34, 21—33 (1972).

Wilcox D. C., Alber I. E., A turbulence model for high speed flows, «Proc. of the 1972 Heat Transfer and Fluid Mech. Institute», 231—252 (1972).

Wu Jain-Ming, Su M. W., Scherberg M. G., Experimental investigation of supersonic flow separation over a rearward facing step, AIAA Paper № 70-106.

Viviand H., Étude théorique de l'écoulement de culot supersonique avec zone de recirculation, *Recherche Aérospatiale*, № 4, 185—195 (1971).

III. ДОННОЕ ДАВЛЕНИЕ И ТЕПЛОВОЙ ПОТОК

Валентин Д. Т., Пржирембел, Осесимметричный ближний турбулентный след при наличии вдува в донную область для числа Маха невозмущенного потока, равного четырем. *Ракетная техника и космонавтика*, 8, № 12, 205—206 (1970).

Гогиш Л. В., Релаксационные колебания в турбулентном ближнем следе, *Изв. АН СССР, МЖГ*, **XI—XII**, № 6, 3—10 (1969).

Гогиш Л. В., Ельникова Л. В., Расчет взаимодействия сверхзвуковой струи с турбулентным ближним следом за уступом, *Изв. АН СССР, МЖГ*, **V—VI**, № 3, 26—32 (1971).

Гродзовский Г. Л., Лашков Ю. А., Свищев Г. П., Соколова И. Н., Исследование влияния перфорированных насадков с продольными щелями на донное сопротивление тела вращения при сверхзвуковых скоростях, *Ученые записки ЦАГИ*, III, № 2, 21 (1972).

Грузков Л. А., Коробков В. А., Донное давление при вытекании центральной и периферийной кольцевых струй несжимаемой жидкости в спутный поток. *Прикладная механика*, **7**, № 9, 99—105 (1971).

Исаев С. П., Швец А. И., Течение в донной области при сверхзвуковом обтекании тел, *Изв. АН СССР, МЖГ*, **I—II**, № 1, 25—32 (1970).

Кошевой В. Н., Козлов Ю. И., Исследование влияния струи на течение в области донного среза, «Труды второй республиканской конференции по аэрогидромеханике, теплообмену и массообмену», изд-во Киевск. ун-та, стр. 143—149 (1971).

Митчел Дж., Теплоотдача от кормовой части тела при плоских дозву-

ковых полностью отрывных течениях, *Теплопередача*, Сер. С, 93, № 4, 23—28 (1971).

Сайкс Д., Цилиндрические и суживающиеся хвостовые части в трансзвуковом потоке с вдувом газа, *Ракетная техника и космонавтика*, 8, № 3, 250—252 (1970).

Су М. В., Ву Дж. М., Корреляционная зависимость для донного давления в сверхзвуковом потоке, *Ракетная техника и космонавтика*, 9, № 7, 272—274 (1971).

Флетчер Л. С., Теплопередача в донной области при обтекании сверхзвуковым осесимметричным потоком, *Ракетная техника и космонавтика*, 8, № 5, 167—169 (1970).

Швец А. И., Исаев С. П., Структура течения в донной области, сб. «Труды I республиканской конференции по аэрогидромеханике, теплообмену и массообмену», изд-во Киевск. ун-та, 117—126 (1969).

Щербак Я. С., Григоров В. К., Исследование сопротивления тел вращения с перфорированными хвостовиками при околозвуковых и сверхзвуковых скоростях потока, Труды Высш. авиац. училища гражд. авиации, вып. 45, 35—38 (1970).

Юрченок К. Е., Давление и температура за телами со срезом в сверхзвуковом потоке при подаче инертных и реагирующих газов в донную область, *Изв. АН СССР, МЖГ*, III—IV, № 2, 48—57 (1971).

Addy A. L., Experimental-theoretical correlation of supersonic jet-on base pressure for cylindrical afterbodies, *J. Aircraft*, 7, № 5, 474—477 1970).

Addy A. L., Thrust-minus-drag optimization by base bleed and/or boattailing, *J. Spacecraft and Rockets*, 7, № 11, 1360—1362 (1970).

Cassanto J. M., Subsonic base pressure results for typical planetary entry configurations, *J. Spacecraft and Rockets*, 6, № 5, 636—637 (1969).

Cassanto J. M., Buce P., Free fall drop tests to determine low speed stability and base pressure characteristics for blunt planetary entry bodies, AIAA Paper № 70-577.

Cassanto J. M., Flight test base pressure results at hypersonic Mach numbers and high Reynolds numbers in turbulent flows: implications to ground test simulation requirements, AIAA Paper № 71-134.

Fletscher L. S., Experimental investigation of blunt base heat transfer in an axisymmetric turbulent supersonic separated flow, AFOSR Scientific Rept 69-2149 TR.

Mabey D. G., Some measurements of base pressure fluctuations at subsonic and supersonic speeds, ARC Current Papers № 1204.

Mueller T. J., Hall C. R., Roache P. J., The influence of initial flow direction on the turbulent base pressure in supersonic axisymmetric flows, AIAA Paper № 70-555.

Pick G. S., Base pressure distribution of a 10° sharp cone at hypersonic speeds and high angles of attack, AIAA Paper № 72-316.

Tanner M., Basisdruckmessungen an einer Platte und an einem Keil in dem Machzahlbereich von $M_a = 2{,}8$ bis 6,8, *Zeitschr. für Flugwissenschaften*, 20, № 11, 410—413 (1972).

Tanner M., Experimentelle Untersuchung des Widerstands und Auftriebs von Flügeln mit stumpfer Hinterkante bei kompressible Strömung, *Ztschr. für Flugwissenschaften*, № 12, 462—470 (1972).

Sirieix M., Delery J., Mirande J., Recherches experimentales fondamentales sur les écoulements séparés et applications, «Fluid Dynamics Transactions», Warszawa, 4, 295—308 (1969).

Wu J. C., Sigman R. K., Supersonic base flow of chemically reacting gas, Astronautical Research 1970, XXIst Congress of the Internat. Astronaut. Federation, Constance, October, 1970 Proc., N.Y., 172—180 (1971).

Zappa O. L., Reinecke W. G., An experimental investigation of base heating on typical Mars entry body shapes, AIAA Paper № 72-317.

IV. БЛИЖНИЙ СЛЕД

Акылбаев Ж. С., Исатаев С. И., Тарасов С. Б, Структура течения в следе за цилиндром в канале, «Вопросы общей и прикладной физики», изд-во «Наука», Алма-Ата, 128—129 (1968).

Браиловская И. Ю., Кокошинская Н. С., Кузнецова Л. В., Численное решение для плоского отрывного течения вязкого газа. «Численные методы механики сплошной среды», т. 2, № 4, Новосибирск, 4—15 (1971).

Ваман Н., Исследование обтекания двойных уступов при наличии положительного градиента давления, сб. «Некоторые вопросы аэродинамики и электрогидродинамики», Киевск. ин-т инж. гражд. авиации, вып. 7, Киев, 65—68 (1972).

Коу Д. Р. С., Интегральный метод исследования неустойчивости ламинарного следа сжимаемой жидкости за тонким телом, *Ракетная техника и космонавтика*, 9, № 9, 139—147 (1971).

Кузнецов О. М., Попов С. Г., Величины параметров головной части вихревой дорожки в плоском течении за телом, *Вестник МГУ*, Сер. I, *Математика и механика*, VII—VIII, № 4, 111—117 (1969).

Льюис Дж., Чэпкис Р., Осредненные характеристики турбулентного ближнего следа за тонким телом при наличии и отсутствии вдува в донную область, *Ракетная техника и космонавтика*, 7, № 5, 46—54 (1969).

Лыткин Ю. М., Турбулентный след за цилиндром некруглого поперечного сечения, «Динамика сплошной среды», Институт гидродинамики СО АН СССР, Вып. 5, Новосибирск, 51—55 (1970).

Маклафлин Д. К., Экспериментальное исследование устойчивости ламинарного сверхзвукового следа за конусом, *Ракетная техника и космонавтика*, 9, № 4, 191—199 (1971).

Маклафлин Д. К., Картер Дж. Е., Финстон М., Форни Дж. А., Экспериментальное исследование потока в сверхзвуковом следе за конусом при ламинарном режиме обтекания, *Ракетная техника и космонавтика*, 9, № 3, 165—172 (1971).

Мермен Е. М., Экспериментальное исследование устойчивости следа за двумерными тонкими телами при гиперзвуковых скоростях, *Ракетная техника и космонавтика*, 7, № 9, 102—111 (1969).

Скурин Л. И., Расчет плоского следа за телом, *ИФЖ*, 23, № 1, 104—111 (1972).

Шульман З. П., Покрывайло Н. А., Жданович Н. В., Влияние вихревого следа на пульсации трения в пристенной области передней критической точки поперечно обтекаемого цилиндра, *ИФЖ*, 22, № 4, 683—686 (1972).

Allen J. S., Cheng S. I., Numerical solutions of the compressible Navier—Stokes equations for the laminar near wake, *Physics of Fluids*, 13, № 1, 37—52 (1970).

Behrens W., Lewis J. E., Webb W. H., Wake stability and transition studies at Mach 4.5, AIAA Paper № 70-794.

Camel M. M., Brown C. A., Supersonic aerodynamic and wake characteristics of large-angle cones at low Reynolds numbers including effects of model support, AIAA Paper № 71-264.

Collins D. J., Lees L., Roshko A., An experimental study of the near wake of a two-dimensional hypersonic blunt body with mass addition, AIAA Paper № 69-67.

Crane R. I., A survey of hypersonic near wake studies, *Aeron. J.*, 73, № 707, 998—1006 (1969).

Crane R. I., Numerical solutions of hypersonic near-wake flow by the particle-in cell method, ARC C.P. № 1083.

Demetriades A., Heat transfer effects on supersonic wake transition, *Physics of Fluids*, 13, № 1, 204—206 (1970).
Demetriades A., Observations on the transition process of two-dimensional supersonic wakes, AIAA Paper № 70-793.
Gaviglio J., Burnage H., Sur l'intermittence de transition de l'état laminaire à l'état turbulent dans divers écoulements, *J. de Mécanique*, 9, № 1, 165—188 (1970).
Garvine R. W., Weinbaum S., The axially-symmetric throat phenomenon in interacting viscous-inviscid flows., «Viscous Interaction Phenomena in Supersonic and Hypersonic Flow. Proc. of the 1969 Symposium», Dayton, 427—461 (1970).
Gururaj P. M., Liu J. T. C., The incipient transition region of two-dimensional hypersonic wakes, AIAA Paper № 71-202.
Habert R., Trilling L., Determination of near wake shear layer by shock expansion method for axisymmetric slender body, *Intern. J. Heat and Mass Transfer*, 14, № 9, 1333—1341 (1971).
Houot C., Calcul du sillage proche laminaire d'un cylindre à M-6 (par la Méthode de Lees — Reeves), A.F.I.T.A.E. 6-e Colloque d'Aérodynamique Appliquée, 1969.
Hussaini M. Y., Laminar supersonic flow in near wakes at high values of Reynolds number, College of Engineering, Univ. of California, 1970.
Liu J. T. C., Lees L., Finite-amplitude instability of the compressible laminar wake. Strongly amplified disturbances, *Physics of Fluids*, 13, № 12, 2932—2938 (1970).
Korkan K. D., On the transition process in the two-dimensional laminar hypersonic wake, *J. Astronaut. Sciences*, 16, № 3, 136—139 (1969).
Marcillat J., Étude expérimentale du sillage proche d'un cone élancé en incidence à M = 7, *Aéronautique et Astronautique*, № 29, 49—58 (1971).
McErlean D. P., Przirembel C. E. G., The turbulent near wake of an axisymmetric body at subsonic speeds, AIAA Paper № 70-797.
McLaughlin D. K., Carter J. E., Finston M., Experimental investigation of the near wake of a magnetically suspended cone at M = 4.3, AIAA Paper № 69-186.
Merzkisch W., Der Ablösestoß bei der Expansion einer Überschall-Genzschicht, *Ztschr. für Flugwissenschaften*, № 1 (1971).
Ohrenberger J. T., Baum E., A theoretical model on the near wake of a slender body in supersonic flow, AIAA Paper № 70-792.
Ohrenberger J. T., Baum E., Laminar near wake solutions under atmospheric entry conditions, AIAA Paper № 72-116.
Peterson C. W., Bogdonoff S. M., An experimental study of laminar hypersonic blunt cone wakes, AIAA Paper № 69-714.
Pirri A. N., Decay of boundary layer turbulence in the near wake expansion region of a slender body, AIAA Paper № 71-200.
Ross B. B., Cheng Sin-u, The application of finite difference methods to the supersonic near wake, AIAA Paper № 72-115.
Shamroth S. J., McDonald H., A new solution of the turbulent near-wake recompression problem, *Aeron. Quart.* 23, № 2, 121—130 (1972).
Sirieix M., Delery T., Mennerie B., Étude expérimentale du proche silage de corps de révolution en écoulement supersonique, IAF Paper RE-48, 1968.
Thomson K D., Morrison D. F., The spacing, position and strength of vortices in the wake of slender cylindrical bodies at large incidence, *J. Fluid Mech.*, 50, № 4, 751—783 (1971).
Weiss R., Finson M., Greenberg R., The axisymmetric, hypersonic near wake with base injection, AIAA Paper № 69-66.
Wilcox D. C., Alber I. E., A turbulence model for high speed flows, «Proc. of the 1972 Heat Transfer and Fluid Mech. Institute. Held at San

Fernando Valley State College Northridge, California June 1972», 231—252 (1972).
Wu J. J., Behrens W., An experimental study of hypersonic wakes behind wedges at angle of attack, AIAA Paper № 71-563.

V. ДАЛЬНИЙ СЛЕД

Беренс В., Коу Д. Р. С. Экспериментальное исследование устойчивости следа за двумерными тонкими телами при гиперзвуковых скоростях, *Ракетная техника и космонавтика*, 9, № 5, 102—111 (1971).
Васьков В. В., О рассеянии радиоволн на следе движущегося в ионосфере тела вблизи акустики, *Геомагнетизм и аэрономия*, 9, № 5, 847—855 (1969).
Воронкин В. Г., О распределении давления на притупленных конусах при неравновесном обтекании, *Изв. АН СССР, МЖГ*, I—II, № 1, 161—164 (1970).
Гиневский А. С., Теория турбулентных струй и следов, изд-во «Машиностроение», М., 1969.
Дженкинс А. Х., Пруетт С. Л., Эмпирический анализ функций, задающих закон роста турбулентного следа, *Ракетная техника и космонавтика*, 8, № 3, 266—268 (1970).
Инуе М., Марвин Дж. Г., Шиффер И. С., Расчет характеристик следа при помощи модели для турбулентной вязкости, *Ракетная техника и космонавтика*, 10, № 2, 149—150 (1972).
Кубота Т., Теренс В., Линейная неустойчивость течения в дальнем следе, *Ракетная техника и космонавтика*, 8, № 6, 236—237 (1970).
Фокс Дж., Рунгалдьер Х., Измерения пульсаций концентрации электронов в следах за снарядами, *Ракетная техника и космонавтика*, 10, № 6, 90—98 (1972).
Онуфриев А. Т., Турбулентный след в стратифицированной среде, *ПМТФ*, IX—X, № 5, 68—72 (1970).
Хорошко К. С., Гиперзвуковой след за затупленными телами, *Изв. АН СССР, МЖГ*, III—IV, № 2, 99—103 (1969).
Эль-Ассар Р. Дж., Пейдж Р. Х., Несжимаемый турбулентный след за плоской пластиной, *Ракетная техника и космонавтика*, 7, № 7, 209—211 (1969).
Baldacci A., Calcul du sillage lointain de corps de rentrée avec ou sans cinétique chimique, A.F.I.T.A.E. 6-e Colloque d'Aérodynamique Appliquée, 1969.
Charwat A. F., Schlesinger M. E., The structure of blunt base wakes in swirling flow, *Astronautica Acta*, 17, № 4—5, 375—386 (1972).
Demetriades A., Theory of hot-wire correlation measurements in compressible flow with application to wakes, AIAA Paper № 72-117.
Dionne J. G. G., Tardif L., An application of the electron beam fluorescence probe in hyperballistic range wake studies. «International Congress on Instrumentation in Aerospace Simulation Facilities», 80—86 (1971).
Fox H., Zakkay V., Sinha R., A review of problems in the nonreacting turbulent far wake, *Astronautica Acta*, 14, № 3, 215—228 (1969).
Fox J., Rungaldier H., Turbulent scattering spectra of electron density fluctuations in Mach 16 projectile wakes, AIAA Paper № 72-673.
Fox H., Sinha R., Weinberger L., An implicit finite difference solution for jet and wake problems, *Astronautica Acta*, 17, № 3, 265—278 (1972).

Finson M. L., Hypersonic wake aerodynamics at high Reynolds numbers, AIAA Paper № 72-701.
French I. P., Arnold T. E., Hayami R. A., Ion distributions in nitrogen and air wakes behind hypersonic spheres, AIAA Paper № 70-87.
Hest S. D., Sonin A. A., Some results from a laboratory study of satellite wake structure and probe response in collisionless plasma flows, «Rarefied Gas Dynamic», v. 2, 1969, p. 1659—1670.
Kitchens C. W., Bush C. C., Low Reynolds number flow past a transverse cylinder at Mach two, AIAA J., v. 10, № 10, p. 1381—1382 (1972).
Laug M., Pierson M. J., Stern G., Les méthodes d'étude au tunnel de l'ionisation dans les sillages, «Progress in Aeronautical Sciences», v. 10, 1970, p. 337—400.
Lemay A., Research in hypersonic wakes, ICAS Paper № 70-07.
Maguire B. L., Muntz E. P., Thomas K. M., Simultaneous measurement of density and temperature fluctuations in a hypersonic wake, AIAA Paper № 72-118.
Narasimha R., Prabhu A., Equilibrium and relaxation in turbulent wakes, *J. Fluid Mech.*, 54, № 1, 1—17 (1972).
Palmer M. D., Keffer J. F, An experimental investigation of an asymmetrical turbulent wake, *J. Fluid Mech.*, 53, № 4, 593—610 (1972).
Prabhu A., Narasimha R., Turbulent non-equilibrium wakes, *J. Fluid Mech.*, 54, № 1, 19—38 (1972).
Uberoi M. S., Freymuth P., Turbulent energy balance and spectra of the axisymmetric wake, *Phys. of Fluids*, 13, № 9, 2205—2210 (1970).
Reynolds W. C., Large-scale instabilities of turbulent wakes, *J. Fluid Mech.*, 54, № 3, 481—488 (1972).
Romeo D. J., Garberoglio J. E., Hypervelocity shock tunnel investigations of wake fluid and plasma properties, AIAA Paper № 69-330.
Rotem Z., Higher approximations to the far viscous-wake solution, *J. Eng. Math.*, 4, № 1, 77—86 (1970).
Schetz J. A., Some studies of the turbulent wake problem, *Astronautica Acta*, 16, № 2, 107—117 (1971).
Schetz J. A., Favin S., Ehrlich L. W., Density stratified, viscous flow past a flat plate, AIAA Paper № 72-646.
Smigielski P., Oudin L., Kalt A., and others., Methodes strioscopiques de mesure des masses volumiques dans les sillages hypersoniques en tunnel de tir, «International Congress on Instrumentation in Aerospace Simulation Facilities, ICIASF'69 Record», 1969, p. 214—222.
Steinberg M., Kwan Sun Wen, Tung Chen, Chung Chiang Yang, Ballistics range and theoretical studies of chemiluminescent processes in hypersonic turbulent wake flows, AIAA Paper № 70-729.
Stilp A., Giesbrecht H., Merzkirch W., Die Beobachtung des Nachlaufs von Flugkörpern hoher Machzahl in einer aeroballistischen Anlage, «Fachtagung Aerodynamik Berlin — 1968», vol. 3, 1969.
Witte A. B., Fox J., Bungaldier H., Localized measurements of wake density fluctuations using pulsed laser holographic interferometry, AIAA Paper № 70-727.

VI. ОТРЫВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ТЕЛАМИ

Семенкевич Ю. П., О перестройке сверхзвукового отрывного течения между телами, «Труды первой республиканской конференции по аэрогидромеханике, теплообмену и массообмену», изд-во Киевск. ун-та, стр. 114—116, 1969.
Черкез А. Я., Карпов Ю. Л., Кудрявцев В. Н., Овчинникова Н. Ф., Семенкевич Ю. П., Шилов В. А., Приме-

нение теории турбулентных струй к анализу отрывного течения между двумя телами, «Турбулентные течения», изд-во «Наука», М., 1970, стр. 163—168.

Шилов В. А., Об особенностях течения в донной области тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью в присутствии отделяемого от тела диска, «Труды первой республиканской конференции по аэрогидромеханике, теплообмену и массообмену, изд-во Киевск. ун-та, 1969, стр. 47—51.

Хлебников В. С., Исследование течения перед сферой, помещенной в следе тела, при сверхзвуковом обтекании, *Ученые записки ЦАГИ*, 2, № 1, 42—48 (1971).

Kostic Z. G., Oka S. N., Fluid flow and heat transfer with two cylinders in cross flow, *Intern. J. Heat and Mass Transfer*, 15, № 2, 279—299 (1972).

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аббет М. (Abbett M.) 86 (3)
Аббот Д. Э. (Abbot D. E.) 66, 207 (1)
Авдуевский В. С. 130, 137 (1)
Адаркар Д. Б. (Adarkar D. B.) 190 (2)
Аззарели Т. (Azzarelli T.) 195 (2)
Айзенклам П. (Eisenklam P.) 228(1); 72 (2)
Акривос А. (Acrivos A.) 66 (1); 192 (2)
Александер А. Дж. (Alexander A. J.) 138 (1)
Альбернейзи Ф. Дж. (Albernathy F.J.) 190 (2)
Альфер Р. А. (Alpher R. A.) 83 (3)
Амик Дж. Л. (Amick J. L.) 66 (1)
Андерсон С. Э. (Anderson S. E.) 207 (1)
Андрес К. (Andres K.) 205 (1)
Аренс М. (Arens M.) 290 (1)
Атцуми С. (Atsumi S.) 70 (2)

Бадринараянан М. А. (Badrinarayanan M. A.) 34, 84 (3)
Бай Ши-и (Pai S. I.) 195 (2)
Бам-Зеликович Г. М. 207 (1)
Бамбер М. Дж. (Bamber M. J.) 64 (1)
Бартлетт Г. Э. (Bartlett G. E.) 277 (2)
Барц Д. Р. (Bartz D. R.) 290 (1)
Басс Г. (Buss H.) 193 (2)
Батлер С. Ф. Дж. (Butler S. F. J.) 71 (2)
Батско Дж. Э. (Butsko J. E.) 85 (3)
Баум Э. (Baum E.) 71, 190, 191 (2); 85, 233 (3)
Бауэр Дж. Т. (Bowyer J. M.) 71 (2)
Бейли А. Б. (Bailey A. B.) 190 (2)
Беквит И. Э. (Beckwith I. E.) 126, 195 (3)
Беккер Дж. В. (Becker J. V.) 196 (3)
Бергелин О. П. (Bergelin O. P.) 107, 194 (3)
Бергенсен А. Дж. (Bergensen A. J.) 138 (1); 230 (3)
Бергер Э. (Berger E.) 190 (2)
Беренс У. (Behrens W.) 190 (2)
Бернард Дж. Дж. (Bernard J. J.) 94, 193 (3)
Бернелл Дж. А. (Burnell J. A.) 291 (1); 230 (3)
Бернштейн Г. (Bernstein H.) 278 (2)
Берри К. Дж. (Berry C. J.) 277 (2)
Берчфилд К. Г. (Burchfield C. G.) 198 (3)
Бестолл Д. (Bestall D.) 70, 279 (2)
Бибель У. Дж. (Biebel W. J.) 206 (1)
Биллербек У. Дж. (Billerbeck W. J.) 145, 189 (2)
Биркгоф Г. (Birkhoff G.) 185 (2)
Бирлайн Дж. А. (Bierlein J. A.) 292 (1)
Бирмен П. У. (Bearman P. W.) 190, 194 (2)
Бирн Р. У. (Byrne R. W.) 197 (2)
Блазиус Г. (Blasius H.) 70, 82, 83, 95, 104, 106, 216, 218, 221—223, 226, 262, 280, 285 (1); 181 (3)
Блейх Д. Г. (Bleich D. G.) 189 (2)
Блек Дж. (Black J.) 279 (2); 232 (3)
Бленк У. (Blenk W.) 186 (2)
Блу Дж. Ф. (Blue J. F.) 71 (2)
Блум М. Г. (Bloom M. H.) 71, 149, 158, 189, 190 (2); 186, 191, 196, 197 (3)
Богдонов С. М. (Bogdonoff S. M.) 66, 288, 290 (1); 24, 30, 69, 71, 193, 222, 278 (2); 20—22, 24, 83, 166, 169, 174, 196 (3)
Боллей У. (Bollay W.) 200, 229 (3)
Больце Э. (Boltze E.) 117, 137, 220, 227 (1)
Бонд А. К. (Bond A. C.) 163, 196 (3)
Боумен Дж. Э. (Bowman J. E.) 190 (2)
Бошамп А. Р. (Beauchamp A. R.) 277 (2)
Брайер Д. У. (Bryer D. W.) 139 (1); 277 (2)
Брайсон А. Э. (Bryson A. E.) 71, 191 (2)
Брайтон Дж. А. (Brighton J. A.) 191 (2)

Браун А. К. (Brown A. K.) 191, 196 (2)
Браун Дж. (Brown J.) 85 (3)
Браун К. Э. (Brown C. E.) 136, 138 (1); 278, 279 (2); 229 (3)
Браун С. Н. (Brown S. N.) 133, 138 (1)
Браун У. К. (Browne W. C.) 193 (2)
Брауэр У. Б. (Brower W. B.) 213, 214, 216, 278 (2)
Бребнер Г. Г. (Brebner G. G.) 138 (1); 201, 230 (3)
Брей К. Н. (Bray K. N.) 289 (1); 94, 193 (3)
Брейди У. Г. (Brady U. G.) 227 (1)
Брейнерд Дж. Дж. (Brainerd J. J.) 198 (3)
Бреслин Дж. П. (Breslin J. P.) 190 (2)
Бриндл К. Г. (Brindle V. G.) 228, 232 (3)
Бринич П. Ф. (Brinich P. F.) 37, 65, 290 (1); 136, 137, 195 (3)
Брунк У. Э. (Brunk W. E.) 278 (2)
Буддингер Р. Э. (Budinger R. E.) 208 (1)
Буземан А. (Busemann A.) 50 (2); 83 (3)
Бурггграф О. Р. (Burggraf O. R.) 71 (2)
Бури А. (Buri A.) 153, 154, 204 (1)
Бусман К. (Bussmann K.) 72, 106 (1)
Бэйли Б. М. (Beily B. M.) 207 (1)
Бэнкс У. Г. Г. (Banks W. H. H.) 140 (1); 231 (3)
Бэтчелор Г. К. (Batchelor G. K.) 60, 65, 70, 190 (2), 197 (3)

Вагнер Ф. Г. (Wagner F. G.) 232 (3)
Вайдел Р. Дж. (Vidal R. J.) 277 (2)
Вайзе А. (Weise A.) 229, 288 (1)
Вайс Д. (Weiss D.) 288 (1)
Вайс Р. Ф. (Weiss R. F.) 197 (2)
Вальо-Лаурин Р. (Vaglio-Laurin R.) 189, 197 (2)
Вальц А. (Walz A.) 107 (1); 192, 197 (3)
Ван Дайк М. Д. (Van Dyke M. D.) 107 (1)
Ван Дрист Э. Р. (Van Driest E. R.) 84 (3)
Ван Хайз В. (Van Hise V.) 85 (3)
Василиу Дж. (Vasiliu J.) 65 (1); 52—60, 70 (2)
Вебб У. Г. (Webb W. H.) 64 (1); 184, 188, 190, 197 (2)
Ведерников А. Н. 174, 205 (1)
Вейк Ф. Э. (Weick F. E.) 64 (1)
Вейнбаум С. (Weinbaum S.) 197 (2); 87 (3)
Веннер К. (Wenner K.) 98, 194 (3)
Верле Г. (Werlé H.) 140 (1); 277 (2)
Верманн О. (Wehrmann O.) 185, 194 (2)
Вигардт К. (Wieghardt K.) 201, 208 (1); 11, 69 (2); 217, 231 (3)
Вигас Дж. Р. (Viegas J. R.) 66 (1); 175, 178, 197 (3)
Виктор М. (Victor M.) 86 (3)
Вилле Р. (Wille R.) 89, 185 (2)
Вилбур С. У. (Wilbur S. W.) 207, 208 (1)
Винтер К. Г. (Winter K. G.) 207 (1)
Винтерниц Ф. А. Л. (Winternitz F. A. L.) 180, 205 (1)
Висс Г. (Wiss G.) 83 (3)
Виттинг Г. (Witting H.) 64 (1)
Вольф Г. (Wolf H.) 137 (1)
Вортман Ф. Г. (Wortmann F. X.) 230 (3)
Враге Э. (Wrage E.) 107 (1)
Ву Т. Яо-цу (Wu T. Yao-Tsu) 198 (2)
Вуд К. Дж. (Wood C. J.) 273, 290 (1); 239, 279 (2); 197 (3)
Вуд К. К. (Wood C. C.) 206, 208 (1)
Вуджер М. (Woodger M.) 289 (1)
Вуллет Р. Р. (Woollet R. R.) 207 (1)
Вундт Г. (Wundt H.) 217, 226 (1)
Вэленси Дж. (Valensi J.) 83 (3)
Вэлентайн Э. Ф. (Valentine E. F.) 206 (1)
Вэн К. С. (Wan K. S.) 189, 197 (2); 87 (3)
Вэн Н. С. (Wan N. S.) 189 (2)
Вэс И. Э. (Vas I. E.) 291 (1); 69, 71, 193, 197, 222, 278 (2); 166, 169, 174, 196 (3)
Вюллерс Г. (Vüllers H.) 205 (1)
Вюст В. (Wuest W.) 231 (3)

Габо М. (Gabeand M.) 26, 83 (3)
Галвей Р. Д. (Galway R. D.) 140 (1)
Галлагер Дж. Дж. (Gallager J. J.) 126, 195 (3)
Ганн К. Г. (Gunn C. G.) 163, 196 (3)
Гарнер Г. К. (Garner H. C.) 138, 160, 164—172, 204 (1); 277 (2)
Гаугер М. (Gauger M.) 189, 190, 207 (1)
Герман Дж. (Herrmann J.) 191 (2)
Гермах К. А. (Hermach C. A.) 279 (2); 166, 168, 169, 196 (3)
Герстен К. (Gersten K.) 138 (1); 229(3)
Герцог Дж. (Herzog J.) 208 (1)
Герцог Р. Т. (Herzog R. T.) 86 (3)

Гёртлер Г. (Görtler H.) 64, 72, 84, 85, 94, 95, 102, 103, 106, 107, 119, 137, 218, 223, 227 (1); 64, 65, 84, 217, 231 (3)
Гибсон А. Г. (Gibson A. H.) 173, 191, 205, 206 (1)
Гибсон У. Э. (Gibson W. E.) 192 (2)
Гидальго Г. (Hidalgo H.) 193 (2); 86 (3)
Гидт В. Г. (Giedt W. H.) 99, 194 (3)
Гилмор Ф. Р. (Gilmore F. R.) 134, 188 (2)
Гласс И. И. (Glass I. I.) 72 (2)
Глауэрт М. Б. (Glauert M. B.) 192 (2); 211, 231 (3)
Глизон Р. Э. (Gleason R. E.) 73 (2)
Глик Г. С. (Glick H. S.) 47, 64, 65 (1)
Гойн К. Л. (Goin K. L.) 55, 84 (3)
Голт Д. Э. (Gault D. E.) 63, 70, 202, 205, 276 (2)
Гольдберг А. (Goldberg A.) 32, 64 (1)
Гольдбергер Т. (Goldberger T.) 208 (1)
Гольдбург А. (Goldburg A.) 227 (1); 184, 187, 192, 197 (2)
Гольдштейн Р. Дж. (Goldstein R. J.) 233 (3)
Гольдштейн С. (Goldstein S.) 106, 210, 217 (1); 233 (3)
Гоулд Г. (Gold H.) 192 (2)
Гоуэн Ф. Э. (Gowen F. E.) 192 (2)
Гратцер Л. Б. (Gratzer L. B.) 206 (1)
Гребер И. (Greber I.) 260, 288, 289 (1)
Грегори Н. (Gregory N.) 138 (1)
Грейндж Дж. М. (Grange J. M.) 192 (2)
Грейп Р. Г. (Grape R. G.) 111, 117, 195 (3)
Гримсон Дж. (Grimson J.) 137 (1)
Грин Г. Л. (Green G. L.) 206 (1)
Грин Л. (Green L.) 72 (2); 196, 233 (3)
Грот Э. Э. (Groth E. E.) 219, 232 (3)
Гроув А. С. (Grove A. S.) 66 (1); 186, 196 (2)
Грунов Ф. (Grunow F.) 151 (1)
Грушвиц Э. (Gruschwitz E.) 155—157, 250, 271 (1)
Грэхем У. Дж. (Graham W. J.) 291 (1); 72 (2)
Гувер У. Р. (Hoover W. R.) 73 (2)
Гудвин Ф. К. (Goodwin F. K.) 291 (1)
Гудерум П. Б. (Gooderum P. B.) 64, 65, 84, 85 (3)
Гумен У. Дж. (Guman W. J.) 291 (1); 72 (2)
Гупта Э. С. (Gupta A. S.) 192 (2)
Гуржиенко Г. А. 206 (1)
Гэвин У. Г. (Gauvin W. H.) 88, 185 (2)
Гэдд Г. Э. (Gadd G. E.) 38, 51, 65, 140, 231, 250, 263, 288, 289 (1); 69, 185 (2); 81, 84, 90—94, 122, 133, 134, 136, 193, 195, 198, 231 (3)

Даван С. (Dhawan S.) 65 (1)
Дайсслер Р. Г. (Deissler R. G.) 191 (2)
Данхэм У. Г. (Dunham W. H.) 107 (1)
Дарлинг Дж. А. (Darling J. A.) 195 (2)
Даскин У. (Daskin W.) 192 (2)
Дворжак (Dvořak) 174 (1)
Дейна Т. А. (Dana T. A.) 144, 188 (2)
Деметриадес А. (Demetriades A.) 64 (1); 139, 188, 191 (2)
Демонтис Дж. (Demontis J.) 36 (1)
Денисон М. Р. (Denison M. R.) 71, 190, 191 (2); 85, 86 (3)
Денхофф А. Э. (von Doenhoff A. E.) 82, 83, 106, 160, 163, 172, 197, 199, 234, 288 (1); 61, 69, 70 (2)
Джек Дж. Р. (Jack J. R.) 196 (3)
Джексон С. Б. (Jackson S. B.) 233 (3)
Джонс Дж. Дж. (Jones J. J.) 251, 279 (2)
Джонс Дж. П. (Jones J. P.) 277, 279 (2)
Джонс Р. Т. (Jones R. T.) 137 (1); 233 (3)
Джонс У. П. (Jones W. P.) 277 (2)
Джонсон В. Э. (Johnson V. E.) 72 (2)
Джонстон Дж. П. (Johnston J. P.) 193, 207 (1)
Джорджес Г. Э. (Jorges H. A.) 255, 278 (2)
Джорджифальви Д. (Jyörgyfalvy D.) 276 (2)
Диаконис Н. С. (Diaconis N. S.) 196(3)
Дикинсон Э. Р. (Dickinson E. R.) 65 (1)
Диксон Р. Дж. (Dixon R. J.) 194 (2)
Диммок Н. Э. (Dimmock N. A.) 71 (2)
Дин Р. К. (Dean R. C.) 42, 44, 65, 67, 143, 203, 227 (1)
Домм В. (Domm V.) 185 (2)
Домм У. (Domm U.) 185, 191 (2)
Дональдсон Дж. К. (Donaldson J. C.) 291 (1); 72 (2)
Дональдсон К. П. (Donaldson C. du P.) 266, 269, 290 (1)
Донх Ф. (Dönch F.) 206 (1)
Дор Б. Д. (Dore B. D.) 138 (1)
Дородницын А. А. 228, 238 (1); 170, 171, 175, 189 (2); 188 (3)
Доуэрти Д. (Dougherty D.) 194 (3)

Дьюи Ф. К. (Dewey F. C.) 65 (1); 69, 184 (2); 133, 195 (3)
Драйден Г. Л. (Dryden H. L.) 64 (1)
Дэви У. Т. (Davey W. T.) 130, 195 (3)
Дэймен Б. (Dayman B.) 191 (2)
Дэниельс Л. Э. (Daniels L. E.) 236, 278 (2)

Жиллет У. Б. (Gillette W. B.) 291 (1); 72 (2)
Жину Дж. Дж. (Ginoux J. J.) 291 (1); 69, 72, 216, 278 (2)
Жуковский Н. Е. 71, 72 (1)

Заат Дж. А. (Zaat J. A.) 137, 163, 204 (1)
Заккей В. (Zakkay V.) 72, 191 (2)
Зейберг С. Л. (Zeiberg S. L.) 188, 189, 198 (2)
Земпель Р. Э. (Zempel R. E.) 148, 189 (2)
Зонген (Soehngen) 101, 194 (3)
Зульцман К. Э. П. (Sulzmann K. E. P) 198 (3)

Иглиш Р. (Iglisch R.) 106 (1); 231 (3)
Иллингворт К. Р. (Illingworth C. R.) 116, 117, 120, 121, 195, 232 (3)
Йохани Т. (Johani T.) 279 (2)
Йохансен Ф. Г. (Johansen F. G.) 186 (2)
Ист Л. Ф. (East L. F.) 73 (2)

Каванау Л. Л. (Kavanau L. L.) 66 (1); 20, 22, 23, 26, 47, 83 (3)
Кавен Г. Р. (Cavén G. R.) 131—133, 195 (3)
Калинске А. А. (Kalinske A. A.) 206 (1)
Карашима К. (Karashima K.) 62, 66, 69, 84 (3)
Карбахер Г. К. (Karbacher G. K.) 186 (2)
Карбоун Р. М. (Carbone R. M.) 196 (2)
Карлсон У. О. (Carlson W. O.) 51, 65 (1); 191 (2); 85, 186—188, 197 (3)
Карман Т. (von Karman T.) 77, 78, 106, 122, 145, 237, 238, 271 (1); 89—91, 185, 279 (2); 9, 10, 26, 83, 180, 217 (3)
Каррьер Д. (Carrière D.) 68, 71 (2); 61, 75, 84 (3)
Картер П. (Carter P.) 206 (1)
Картер У. В. (Carter W. V.) 71 (2)
Кассанто Дж. М. (Cassanto J. M.) 85 (3)
Кауфман Л. Г. (Kaufman L. G.) 67, 231, 288, 291 (1); 72 (2); 198, 233 (3)
Квинси В. Г. (Quincey V. G.) 83 (3)
Кейз У. М. (Kays W. M.) 190 (2)
Кек Дж. К. (Keck J. C.) 193, 196 (2)
Кеннеди Э. (Kennedy E.) 194 (2)
Кеплер К. Э. (Kepler C. E.) 24, 30, 69 (2)
Кестер Р. Г. (Kester R. H.) 66 (1)
Кёрл Н. (Curle N.) 84, 106, 107, 254, 289 (1); 191 (2); 186, 197 (3)
Кинг Г. Г. (King H. H.) 193 (2); 86, 233 (3)
Кирк Ф. Н. (Kirk F. N.) 61, 72, 75, 84 (3)
Киркпатрик А. (Kirkpatrick A.) 193(2)
Кирхгоф Г. Р. (Kirchhoff G. R.) 82, 84, 185 (2)
Киф Р. Т. (Keef R. T.) 186 (2)
Клаймон Дж. Г. (Klaimon J. H.) 189 (2)
Клайн В. (Klein V.) 194 (3)
Клайн С. Дж. (Kline S. J.) 39, 65, 67, 185, 203, 205, 206 (1)
Клайнберг Дж. М. (Klineberg J. M.) 192 (2)
Кларке Дж. Г. (Clarke J. H.) 241, 288 (1); 111, 195 (3)
Клаузер Ф. Г. (Clauser F. H.) 163, 204, 266, 289
Клебанов П. С. (Klebanoff P. S.) 172, 205 (1); 70, 85 (3)
Клей У. Г. (Clay W. G.) 144, 188, 191, 196 (2)
Кленфер Л. (Klanfer L.) 63, 68, 70, 205, 276 (2)
Кнудсен Дж. Г. (Knudsen J. G.) 194 (3)
Кобаши И. (Kobashi I.) 116, 187 (2)
Коважный Л. С. Г. (Kovasznay L. S. G.) 80, 186 (2)
Кокс Д. К. (Cox D. K.) 277 (2)
Коллайнен Дж. (Callinen J.) 185
Кометта К. (Cometta C.) 186 (2)
Копал З. (Kopal Z.) 229, 279 (2)
Корбахер Г. К. (Korbacher G. K.) 72, 186 (2)
Коричинский П. Ф. (Korycinski P. F.) 196 (3)
Корст Г. Г. (Korst H. H.) 67 (1); 50, 69 (2); 47—49, 53—56, 60, 61, 71, 84, 198 (3)
Коул Д. (Cole D.) 205 (1); 198 (3)
Коулбрук К. Ф. (Colebrook C. F.) 151, 204 (1)
Коулмен У. С. (Coleman W. S.) 171, 172, 205 (1)

Коулс Д. (Coles D.) 66 (1); 191 (2)
Коуп У. Ф. (Cope W. F.) 65, 231, 288 (1); 69, 70 (2); 26, 29, 30, 133, 193 (3)
Кохран Д. Л. (Cochran D. L.) 39, 65, 183, 185, 205 (1)
Коэн К. Б. (Cohen C. B.) 276, 277, 280, 290 (1)
Коэн Н. Б. (Cohen N. B.) 171, 197 (3)
Крамер К. Р. (Cramer K. R.) 108 (1); 70 (2)
Крамер Р. Л. (Cramer R. L.) 191, 196(2)
Крейц Ф. (Kreith F.) 64 (1); 193 (3)
Кресвелл Дж. Д. (Cresswell J. D.) 193 (2)
Кресчи Р. Дж. (Cresci R. J.) 191 (2)
Крживоблоцкий М. З. (von Krzywoblocki M. Z.) 89, 185 (2)
Крикмор Г. С. (Creekmore H. S.) 198 (3)
Кристаутас Р. (Krystautes R.) 193 (2)
Кришнамарти К. (Krishnamurty K.) 20, 69 (2)
Крокко Л. (Crocco L.) 20, 39, 61—64, 254, 262, 263, 275, 289 (1); 52, 70 (2); 21, 24, 36, 37, 34, 41 43, 46, 47, 66, 70, 71, 83 (3)
Кронер Р. (Kröner R.) 206 (1)
Кронзон Дж. (Kronzon J.) 195 (2)
Кроуфорд Д. Г. (Crawford D. H.) 238, 239, 279 (2); 166, 171, 174, 197 (3)
Кружилин Г. Н. 194 (3)
Крэбб Р. С. (Crabbe R. S.) 137, 139 (1)
Крэбтри Л. Ф. (Crabtree L. F.) 126, 137 (1); 65, 201, 202, 276, 279 (2)
Крэнделл С. (Crandall S.) 289 (1)
Крюгер Ф. (Krüger F.) 186(2)
Кубота Т. А. (Kubota T. A.) 188, 193 (2)
Кук Дж. К. (Cooke J. C.) 66, 133, 137, 138 (1); 201, 230 (3)
Кунен А. Э. (Kunen A. E.) 230 (3)
Купер Р. Д. (Cooper R. D.) 196 (2)
Курики К. (Kuriki K.) 195 (2)
Курцвег Г. Г. (Kurzweg H. H.) 20, 24, 26, 83 (3)
Кутта (Kutta) 184 (1)
Куэн Д. М. (Kuehn D. M.) 65, 260, 288, 289 (1); 69, 73 (2); 198 (3)
Куэт А. М. (Kuethe A. M.) 71 (2); 230 (3)
Кэнтин Э. (Cantin A.) 193 (2)
Кэри Дж. Р. (Cary J. R.) 107, 109, 194 (3)
Кэррол Р. Б. (Carroll R. B.) 206 (1)
Кэрроу Д. Д. (Carrow D. D.) 232 (3)
Кюхеман Д. (Küchemann D.) 139, 208 (1)

Лав Р. Г. (Love R. H.) 194 (2)
Лав Э. М. (Love E. M.) 138 (1)
Лав Э. С. (Love E. S.) 248, 288 (1)
Лайнес Л. Л. (Lynes L. L.) 291 (1)
Лайонс У. К. (Lyons W. C.) 145, 188 (2)
Лайтхилл М. Дж. (Lighthill M. J.) 41, 289 (1); 187 (2)
Ламбурн Г. К. (Lambourne H. C.) 139 (1)
Ланбурн Г. К. (Lanbourne H. K.) 276, 278 (2)
Ланге Р. Г. (Lange R. H.) 33, 65, 269, 290 (1)
Ланкфорд Дж. Л. (Lankford J. L.) 125, 195 (3)
Ларевей У. Д. (Laraway W. D.) 193 (2)
Ларсон Г. К. (Larson H. K.) 55, 65 (1); 133, 140, 145—147, 151, 178, 179, 196 (3)
Ларсон Р. Э. (Larson R. E.) 86 (3)
Лауфер Дж. (Laufer J.) 84 (3)
Лаф А. (Lauth A.) 186 (2)
Лахман Г. В. (Lachmann G. V.) 205 (3)
Левелин-Дэвис Д. И. Т. П. (Llewelyn-Davis D. I. T. P.) 207 (1)
Левенштейн Ц. Дж. (Leventsteins Z. J.) 188, 193 (2)
Леви А. (Levy A.) 73, 196 (2); 194 (3)
Левинский Э. С. (Levinsky E. S.) 192 (2)
Леджер Дж. Д. (Ledger J. D.) 193 (2)
Лежандр Р. (Legendre R.) 139 (1); 277 (2)
Лейтон Э. В. (Laitone E. V.) 127, 137 (1)
Ленард М. (Lenard M.) 189 (2)
Ленген У. Т. (Langan W. T.) 193 (2)
Ленерт Р. (Lehnert R.) 186, 188 (2)
Леонард Д. А. (Leonard D. A.) 193 (2)
Лериан Д. Э. (Lehrian D. E.) 138 (1)
Ли Г. (Li H.) 195 (2)
Либби П. А. (Libbi P. A.) 111, 195 (3)
Либлейн Э. (Lieblein E.) 200, 208 (1)
Либерс Л. (Liebers L.) 186 (2)
Лиз Л. (Lees L.) 20, 39, 61, 62, 64, 254, 262, 263, 274—276, 283, 287, 289, 290 (1); 31, 52, 70, 73, 80, 169, 171, 184, 188—190, 193, 195, 197 (2); 36—38, 41, 43, 47, 66, 70, 71, 88, 177, 197(3)

Ликодис П. С. (Lykoudis P. S.) 184, 189, 194 (2)
Лин Г. (Lien H.) 193 (2)
Лин К. К. (Lin C. C.) 134, 185, 188 (2)
Лин С. К. (Lin S. C.) 188, 193 (2)
Линдфельд А. У. (Lindfield A. W.) 200, 229, 230 (3)
Линк У. (Link W.) 186 (2)
Липман Г. В. (Liepmann H. W.) 33, 65 (1); 279 (2); 84 (3)
Липпиш А. М. (Lippisch A. M.) 227 (3)
Литл Б. Г. (Little B. H.) 207 (1)
Логан Дж. Г. (Logan J. G.) 134, 188 (2)
Лойцянский Л. Г., 73—75, 77, 107 (1)
Локк К. Н. Г. (Lock C. N. H.) 186 (2)
Лонг М. (Long M.) 189 (2)
Лоренц Г. (Lorenz H.) 26, 83 (3)
Лоу Г. М. (Low G. M.) 224, 232 (3)
Лоусон М. В. (Lowson M. V.) 139 (1)
Лоуфорд Дж. А. (Lawford J. A.) 139 (1); 185, 192, 277 (2)
Лофтин Л. К. (Loftin L. K.) 233, 235, 288 (1); 70 (2)
Лубик Р. Дж. (Lubick R. J.) 208 (1)
Луз Г. (Loos H.) 111, 136 (1)
Лукашевич Дж. Д. (Lukasiewicz J. D.) 188 (2)
Лю К. И. (Liw C. I.) 108 (1)
Людвиг Г. (Ludwieg H.) 151, 159, 197, 204 (1); 233 (3)
Людвиг Г. Р. (Ludwig G. R.) 108, 227 (1)
Люс Р. У. (Luce R. W.) 193 (2)

Магнусон А. Г. (Magnuson A. H.) 227 (1); 194 (2)
Майерс А. У. (Myers A. W.) 291 (1); 72 (2)
Мак Адамс В. Х. (McAdams W. H.) 101, 104, 109, 193, 194 (3)
Мак Адамс К. (Adams, Mac C.) 138 (1); 278 (2); 230 (3)
Макгрегори М. (McGregor I.) 202, 204, 276 (2)
Макдональд А. Г. Дж. (MacDonald A. G. J.) 86 (3)
Макдональд Г. (McDonald H.) 86 (3)
Маккаллок Г. Б. (McCullough G. B.) 61, 70, 202, 205, 276 (2); 209, 230 (3)
Маккарти Дж. Ф. (McCarty J. F.) 188 (2)
Маккей У. (McKay W.) 195 (2)
Макконнел Д. Г. (McConell D. G.) 133, 196 (3)
Маккреди П. Б. (MacCready P. B.) 196 (2)
Мальтхопп Г. (Multhopp H.) 230 (3)
Манглер К. У. (Mangler K. W.) 117—119, 138 (1); 278 (2); 188, 230 (3)
Маркленд Э. (Markland E.) 208 (1)
Маррис А. У. (Marris A. W.) 188, 205 (1); 194 (2)
Марсден Д. Дж. (Marsden D. J.) 138 (1); 277 (2)
Мартеллучи А. (Martellucci A.) 194, 196, 197 (2)
Мартин Р. К. (Martin R. C.) 206 (1)
Мартино-Лагард А. (Martinot-Lagarde A). 205 (1)
Марфи Дж. С. (Murphy J. S.) 67 (1)
Марфи К. Г. (Murphy K. G.) 65 (1), 144, 188 (2)
Маскелл Э. К. (Maskell E. C.) 13, 42, 44, 65, 112, 114, 136, 139, 159, 204, 207 (1); 66, 67, 71, 277 (2)
Маує А. (Maue) 185 (2)
Маулл Д. Дж. (Maull D. J.) 73, 194, 245, 246, 258, 278, 279 (2)
Махони И. И. (Mahoney I. I.) 95 (1)
Медведев К. И. 130, 137 (1)
Мейер Р. Ф. (Meyer R. F.) 139 (1)
Меккель У. Э. (Moeckel W. E.) 66 (1); 221, 225, 229, 248, 250, 278 (2)
Меклер Л. А. (Meckler L. A.) 67, 288 (1); 72 (2)
Мексин Д. (Meksyn D.) 16, 64, 104, 105, 107, 137 (1)
Мермен Э. М. (Murman E. M.) 197 (2)
Миз Н. Э. (Mease N. E.) 209 (1)
Мизес (von Mises) 78 (1)
Микаэль У. Г. (Michael W. H.) 136, 138 (1); 278 (2); 229 (3)
Миллиат Дж. П. (Milliat J. P.) 208 (1)
Милликен К. Б. (Millikan C. B.) 77, 106 (1)
Михалке А. (Michalke A.) 187, 194 (2)
Михельсон И. (Michelson I.) 194 (2)
Мозес Г. Л. (Moses H. L.) 208 (1)
Моккель У. Э. (Moeckel W. E.) 66 (1)
Монсон Д. Дж. (Monson D. J.) 198 (3)
Мордухов М. (Morduchow M.) 85, 106 (1); 111, 117, 195 (3)
Моретти Г. (Moretti G.) 86 (3)
Морковин М. В. (Morkovin M. V.) 28, 64 (1); 186 (2)
Морт К. У. (Mort K. W.) 71 (2)
Моулден Т. Г. (Maulden T. H.) 86 (3)
Мунц Э. П. (Muntz E. P.) 148, 189, 194 (2)
Мур К. А. (Moore C. A.) 205 (1)

Мур Н. Б. (Moore N. B.) 83 (3)
Мур Т. У. Ф. (Moore T. W. F.) 73 (2)
Мур Ф. К. (Moore F. K.) 40, 65 (1)
Мэй А. (May A.) 73 (2)
Мэйден К. Дж. (Maiden C. J.) 189 (2)
Мэйджер А. (Mager A.) 111, 136, 200, 207 (1)
Мэйр У. А. (Mair W. A.) 66 (1); 69, 219, 233, 243, 245, 258, 278 (2); 232 (3)
Мэлиа М. Дж. (Malia M. J.) 232 (3)
Мэлчер Б. У. (Melcher B. W.) 188, 196 (2)
Мэссир П. Ф. (Massier P. F.) 209 (1)
Мышкова Л. И. 86 (3)
Мюллер Э. А. (Müller E. A.) 289 (1)

Наудашер Э. (Naudascher E.) 194 (2)
Науман А. (Naumann A.) 185 (2)
Нахр Д. (Nachr D.) 83 (3)
Нейс С. Э. (Neice S. E.) 221, 278 (2)
Нейсмит А. (Naysmith A.) 66 (1); 133, 183, 195 (3)
Нельсон У. Дж. (Nelson W. J.) 206 (1)
Несс Н. (Ness N.) 194 (2)
Николь К. М. (Nicoll K. M.) 43, 70 (2); 178, 197, 198 (3)
Никурадзе Дж. (Nikuradse J.) 151, 153, 156, 204 (1)
Нильсон Г. В. (Nielsen H. V.) 278 (2); 166, 174, 196 (3)
Нильсен Дж. Н. (Nielsen J. N.) 66, 291 (1); 279 (2)
Нитцберг Г. Э. (Nitzberg G. E.) 289 (1)
Нолл К. Л. (Nall K. L.) 72 (2)
Нонвейлер Т. А. (Nonweiler T. A.) 116, 137 (1)
Норбури Дж. Ф. (Norbury J. F.) 207 (1); 65, 71, 276 (2)
Ноттейдж Г. Б. (Nottage H. B.) 198 (3)
Нусдорфер Т. Дж. (Nussdorfer T. J.) 240, 253, 288 (1)
Ньюмен Б. К. (Newman B. C.) 86 (3)
Нэш Дж. Ф. (Nash J. F.) 86, 185 (2); 15, 17, 78, 81, 83, 86 (3)

Оденбретт К. Л. (Odenbrett C. L.) 190 (2)
Олбум Г. Г. (Album H. H.) 245, 255, 259, 261, 264, 270, 273, 276, 278, 279 (2); 232 (3)
Оман Р. А. (Oman R. A.) 288 (1)
О'Нил Р. Л. (O'Neal R. L.) 163, 196 (3)
Орнберг Т. (Örnberg T.) 277 (2)
Оуэн П. Р. (Owen P. R.) 68, 70, 276 (2)
Оуэн Э. (Owen E.) 186, 205, 276 (2)
Ох И. Г. (Oh U. H.) 121, 187 (2)

Паллоне А. (Pallone A.) 291 (1); 189, 195, 197 (2); 187, 191 196, 197 (3)
Пальц С. (Paltz S.) 193 (3)
Паппас К. Э. (Pappas C. E.) 230 (3)
Паттерсон Г. Н. (Patterson G. N.) 174, 205 (1)
Пауэрс У. Э. (Powers W. E.) 192, 197 (3)
Пекхем Д. Г. (Peckham D. H.) 139 (1)
Перкинс Э. У. (Perkins E. W.) 192 (2)
Перш Дж. (Persh J.) 206, 207 (1)
Петерс А. Р. (Peters A. R.) 67 (1)
Петерс Г. (Peters H.) 156, 174, 204, 206 (1)
Петерсен Э. Э. (Petersen E. E.) 66 (1); 186, 196 (2)
Пёбе Ж. Л. (Peube J. L.) 208 (1)
Пик Д. Дж. (Peake D. J.) 139, 140 (1)
Пипперт Г. Ф. (Pippert G. F.) 195 (2)
Пирси Г. Г. (Pearcey H. H.) 231, 288, 291 (1); 276 (2); 204, 230 (3)
Пирси Н. А. В. (Piercy N. A. V.) 186 (2)
Пол Дж. У. (Paull J. W.) 67 (1)
Польгаузен К. (Pohlhausen K.) 70, 72, 74, 95, 106, 122, 177, 189, 205, 226, 237, 262, 271 (1); 216, 217 (3)
Полцин Дж. (Polzin J.) 174, 205 (1)
Поплтон Э. Д. (Poppleton E. D.) 219, 231 (3)
Попп Э. Г. (Popp E. G.) 206 (1)
Портер Дж. Д. (Porter J. D.) 138 (1); 230 (3)
Прандтль Л. (Prandtl L.) 14, 27, 64, 104, 107, 119 (1); 81, 150, 184 (2); 210, 211, 230 (3)
Праудиен А. П. (Proudien A. P.) 195 (2)
Претш Дж. (Pretsch J.) 156, 204 (1)
Примих Р. (Primich R.) 189, 192, 197 (2)
Прюден Ф. (Pruden F.) 83 (3)
Пфайфер Г. (Pfeiffer H.) 185 (2)
Пьюзи П. С. (Pusey P. S.) 276 (2)
Пэйдж Р. Г. (Page R. H.) 291 (1); 69, 194 (2)
Пэйн Ф. Р. (Payne F. R.) 195 (2)
Пэрри Дж. Ф. У. (Parry J. F. W.) 195 (2)

Раберт К. Ф. (Rubert K. F.) 199, 207 (1)
Рабинович И. (Rabinowicz J.) 197 (3)
Райен Л. Ф. (Ryan L. F.) 193 (3)

Ранстолдер П. У. (Runstalder P. W.) 206 (1)
Рассел А. Дж. Т. (Russell A. J. T.) 185 (2)
Ревелл Дж. Д. (Revell J. D.) 73 (2)
Рейд Дж. (Reid J.) 57, 84 (3)
Рейд Э. Г. (Reid E. G.) 177, 191, 205 (1)
Рейль С. П. (Reyle S. P.) 85, 106 (1)
Рейнберд У. Дж. (Rainbird W. J.) 133, 137 (1); 277 (2)
Рейнеке У. Г. (Reinecke W. G.) 192, 279 (2)
Рейнольдс А. Дж. (Reynolds A. J.) 195 (2)
Рейхардт Г. (Reichardt H.) 187 (2); 64, 84 (3)
Релей Л. (Rayleigh L.) 184 (2)
Решетко Э. (Reshotko E.) 276, 277, 280, 290 (1)
Ривз Б. Л. (Reeves B. L.) 274, 283, 287, 290 (1); 73, 193, 195 (2)
Ринглеб Л. (Ringleb L.) 217, 231 (3)
Ринглеб Ф. О. (Ringleb F. O.) 226, 231, 232 (3)
Риттер З. (Ritter Z.) 195 (2)
Риффарт А. (Riffart A.) 206 (1)
Ричардсон П. Д. (Richardson P. D.) 101, 193 (3)
Ричардсон Э. Г. (Richardson E. G.) 93, 186 (2)
Робертс Дж. Б. (Roberts J. B.) 86 (3)
Робертсон Дж. М. (Robertson J. M.) 206, 209 (1)
Робинсон Г. (Robinson G.) 169, 204 (1)
Роджерс Э. У. Э. (Rogers E. W. E.) 277 (2)
Розенбаум Г. (Rosenbaum H.) 195 (2)
Розенхед Л. (Rosenhead L.) 41, 107, 217, 226 (1); 89, 185, 186 (2)
Рознер Д. Э. (Rosner D. E.) 67 (1)
Рой М. (Roy M.) 139 (1); 276, 278 (2)
Ром Дж. (Rom J.) 195 (2); 86 (3)
Росс Д. (Ross D.) 158, 204, 206 (1)
Ротт Н. (Rott N.) 126, 137, 139 (1)
Ротта Дж. К. (Rotta J. C.) 64, 147—153, 157, 193, 197, 204 (1)
Роуленд У. Р. (Rowland W. R.) 209 (1)
Рошке Э. Дж. (Roschke E. J.) 209 (1)
Рошко А. (Roschko A.) 65, 66 (1); 15, 69, 94, 115, 187 (2); 10, 83, 86, 231 (3)
Рошко Э. (Roshko E.) 143, 196 (3)
Рубезин М. У. (Rubesin M. W.) 271, 290 (1); 186 (3)
Руз Г. (Rouse H.) 67 (1); 73, 187 (2)
Рус Дж. Н. (Roos J. N.) 65 (1); 69 (2); 133, 195 (3)
Рухти О. (von Ruchti O.) 206 (1)
Рэгсдейл У. К. (Ragsdale W. C.) 195 (2)
Рэй А. Д. (Ray A. D.) 193 (2)
Рэй А. К. (Ray A. K.) 108, 291 (1)
Рэльф Э. Ф. (Ralf E. F.) 186 (2)
Рэмсей У. Дж. (Ramsay W. J.) 180, 205 (1)
Рэнд С. (Rand S.) 195 (2)
Рэндалл Д. Г. (Randall D. G.) 139 (1)
Рэнлет Дж. (Ranlet J.) 194, 197 (2)

Сакс А. Г. (Sacks A. H.) 291 (1); 277, 279 (2); 230 (3)
Сакураи Т. (Sakurai T.) 195 (2)
Сальников В. (Saljnikov V.) 107, 137 (1)
Санли Г. Л. Г. (Sunley H. L. G.) 209 (1)
Саратонелло Э. Г. (Zaratonello E. H.) 185 (2)
СарпКайа Т. (SarpKaya T.) 227 (1)
Сато Г. (Sato H.) 195 (2)
Сацмен Э. Дж. (Satzman E. J.) 87 (3)
Свейн Л. М. (Swain L. M.) 120, 187, 196 (2)
Себан Р. А. (Seban R. A.) 73, 196 (2); 194 (3)
Седдон Дж. (Seddon J.) 253, 289 (1)
Седжинер А. (Seginer A.) 195 (2)
Седни Р. (Sedney R.) 87 (3)
Седов Л. И. 110, 136 (1)
Сейвер Р. Э. (Seiver R. E.) 86 (3)
Сену И. (Senoo I.) 136 (1)
Силович В. (Silovic V.) 196 (2)
Симкинс П. Г. (Simkins P. G.) 196 (2)
Симмонс Л. Ф. Г. (Simmons L. F. G.) 186 (2)
Симпсон Р. У. (Simpson R. W.) 138 (1) 277 (2)
Синклер А. Р. (Sinclair A. R.) 157, 196 (3)
Синнот К. С. (Sinnott C. S.) 292 (1);
Синха Р. (Sinha R.) 72 (2)
Сирс У. Р. (Sears W. R.) 119, 121, 126, 136 (1)
Сирье М. (Sirieux M.) 71 (2); 61, 75, 85 (3)
Систрунк Р. (Siestrunk R.) 94, 193 (3)
Сквайр Г. Б. (Squire H. B.) 172, 205—207 (1); 60, 65, 70, 277 (2)
Сквайр Л. К. (Squire L. C.) 139 (1)
Скотт К. Дж. (Scott C. J.) 86 (3)

Скотт-Уилсон Дж. Б. (Scott-Wilson J. B.) 207 (1)
Скэн С. У. (Skan S. W.) 73, 84, 8,5, 106 (1)
Слэттери Р. Э. (Slattery R. E.) 144, 188, 191, 196 (2)
Смит Дж. Г. Б. (Smith J. H. B.) 138, 139 (1); 208, 278 (2); 230 (3)
Смит К. Г. (Smith C. G.) 198 (3)
Смит К. Э. (Smith C. E.) 191, 196 (2)
Смит Р. Г. (Smith R. H.) 206 (1)
Смит С. Г. (Smith S. H.) 227 (1)
Смит Т. Б. (Smith T. B.) 196 (2)
Смолл Дж. (Small J.) 193, 194 (3)
Соджин Г. Г. (Sogin H. H.) 95, 193 (3)
Соренсен Э. (Sörensen E.) 206 (1)
Сото С. (de Soto S.) 137 (1)
Спиглер Э. (Spiegler E.) 290 (1)
Стайн Г. А. (Stine H. A.) 171, 197 (3)
Стейнбек П. К. (Stainback P. C.) 163, 196 (3)
Стеррет Дж. Р. (Sterrett J. R.) 248, 288 (1)
Стефенсон Дж. Н. (Stephenson J. N.) 196 (2)
Стивенс Р. Р. (Stevens R. R.) 196 (2)
Столдер Дж. Р. (Stalder J. R.) 278 (2); 166, 174, 196 (3)
Страсберг М. (Strasberg M.) 196 (2)
Струхаль В. (Strouhal V.) 79, 184 (2)
Стрэтфорд Б. С. (Stratford B. S.) 83, 86, 106, 209, 252, 289 (1); 203, 230(3)
Стюарт К. М. (Stuart C. M.) 291(1)
Стюарт Р. У. (Stewart R. W.) 184 (2)
Стюартсон К. (Stewartson K.) 67, 139, 233, 235, 241, 242, 269, 275, 276, 279, 286, 288, 290 (2); 117, 121, 195 (3)
Су Г. (Hsu H.) 195 (3)
Сэведж С. Г. Б. (Savage S. G. B.) 290 (1); 198 (3)
Сэндборн В. А. (Sandborn V. A.) 108(1)

Тайлер Р. Д. (Tyler R. D.) 292 (1)
Тайлер Э. (Tyler E.) 186 (2)
Такер М. (Tucker M.) 143, 196 (3)
Талтс Г. (Tults H.) 178, 205 (1)
Танеда С. (Taneda S.) 184, 187 (2)
Тани И. (Tani I.) 107, 276, 290 (1); 13, 19, 63, 69, 70, 73 (2)
Таннер М. (Tanner M.) 73, 196 (2)
Таунсенд А. А. (Townsend A. A.) 67 (1); 113, 120, 184, 187 (2)
Таунсенд Дж. Э. Г. (Townsend J.E.G.) 277 (2)
Твейтс Б. (Thwaites B.) 85, 106, 137, 280, 289, 290 (1); 277 (2); 27, 231 (3)
Тейзен Дж. Г. (Theisen J. G.) 196 (2)
Тейлор Дж. (Taylor J.) 138 (1); 277 (2)
Тейлор Р. Л. (Taylor R. L.) 145, 188, 193, 196 (2)
Тейлор Э. С. (Taylor E. S.) 200, 208 (1)
Теплер (Toepler) 174 (1)
Тернер Дж. (Turner J.) 70, 279 (2)
Террил Р. М. (Terrill R. M.) 107 (1)
Тетервин Н. (Tetervin N.) 160, 163, 172, 196, 197, 204 (1)
Тилман У. (Tillman W.) 151, 159, 197, 204 (1); 11, 69 (2)
Тимман Р. А. (Timman R. A.) 107 (1)
Тимме А. (Timme A.) 185 (2)
Тир Дж. Д. (Teare J. D.) 134, 188 (2)
Тодиско А. (Todisco A.) 197 (2)
Толмин У. (Tollmien W.) 64 (1); 40 (3)
Томан Г. (Thomann H.) 56, 66 (1); 41, 70 (2); 85, 131, 163, 195, 196 (3)
Томпсон Г. Э. (Thompson G. E.) 197(2)
Торда Т. П. (Torda T. P.) 217, 231 (3)
Торилло Д. Т. (Torillo D. T.) 67 (1)
Торобин Л. Б. (Torobin L. B.) 88, 185 (2)
Треветт Э. Г. (Trevett E. G.) 86 (3)
Триллинг Л. (Trilling L.) 288 (1); 217, 231 (3)
Тринор К. Э. (Treanor C. E.) 188 (2)
Трипп У. (Tripp W.) 60, 84 (3)
Трукенбродт Э. (Truckenbrodt E.) 107, 145, 203 (1); 217, 231 (3)

Уайлд Дж. М. (Wild J. M.) 137 (1)
Уайт К. М. (White C. M.) 151, 204 (1)
Уайтекер Э. Т. (Whitaker E. T.) 169, 204 (1)
Ударт А. (Oudart A.) 65, 136, 137 (1)
Уилки Д. (Wilkie D.) 288 (1); 72 (2)
Уилсон Г. Б. (Wilson H. B.) 233, 235, 288 (1)
Уилсон Л. Н. (Wilson L. N.) 198 (2)
Уимброу У. Р. (Wimbrow W. R.) 66 (1); 57, 84 (3)
Ульрих А. (Wrich A.) 72, 106 (1)
Уоллис Р. А. (Wallis R. A.) 71, 202, 276 (2)
Уоллис У. Ф. (Wallis W. F.) 197 (2)
Уолнер Л. Ф. (Wallner L. F.) 200, 208 (1)
Уолше Д. Э. (Walshe D. E.) 277 (2)
Уолчнер О. (Walchner O.) 83 (3)
Уорд Дж. У. (Ward J. W.) 279 (2)
Уорд Г. С. (Ward H. S.) 140 (1)

Уошберн У. К. (Washburn Y. K.) 188, 197 (2)
Уэн К. С. (Wen K. S.) 197 (2)
Уэнлес К. (Wanlass K.) 171, 197 (3)

Фанг И. К. (Fung I. C.) 66 (1)
Фануччи Дж. Б. (Fannucci J. B.) 194 (2)
Фейдж Э. (Fage A.) 113, 186, 187 (2); 167, 193, 197 (3)
Фейл Р. (Fail R.) 185, 192 (2); 86 (3)
Фельдман С. (Feldman S.) 128, 131, 188, 192, 195 (2); 86 (3)
Фен Д. М. (Fan D. M.) 192 (2)
Фергюсон Г. (Ferguson H.) 140, 196 (3)
Фернандез Ф. Л. (Fernandez F. L.) 192 (2)
Ферри Э. (Ferry A.) 208 (1); 192 (2)
Ферриман В. Н. (Ferriman V. N.) 209 (1)
Феттингер Г. (Föttinger G.) 14, 64 (1); 219, 278 (2)
Филдс Э. К. (Fields A. K.) 198 (2)
Филетти Э. Г. (Filetti E. G.) 198 (3)
Финк П. Т. (Fink P. T.) 138 (1); 277 (2)
Флахсбарт О. (Flachsbart O.) 194 (3)
Флеттнер А. (Flettner A.) 230 (3)
Флигнер А. (Fliegner A.) 205 (1)
Фокс Г. (Fox H.) 72 (2)
Фокс Дж. (Fox J.) 291 (1); 198 (3)
Фокс Р. У. (Fox R. W.) 185, 205, 207 (1)
Фолдерс К. Р. (Faulders C. R.) 207 (1); 233 (3)
Фолкнер В. М. (Falkner V. M.) 16, 106 (1); 103, 186, 187 (2); 193 (3)
Фраиберг Э. Г. (Friberg E. G.) 66 (1); 72 (2)
Фрей К. (Frey K.) 206 (1); 226, 232 (3)
Френкель Л. Э. (Fraenkel L. E.) 66 (1)
Френсис У. Л. (Francis W. L.) 86, 130, 195 (3)
Фромм Дж. Э. (Fromm J. E.) 192 (2)
Фрэзер Р. П. (Fraser R. P.) 231, 288 (1), 72 (2)
Фуллер Л. (Fuller L.) 57, 84 (3)
Фуллер П. У. У. (Fuller P. W. W.) 192 (2)
Фухс Д. (Fuchs D.) 186 (2)
Фэй Дж. А. (Fay J. A.) 32, 64, 227 (1); 184, 187, 192 (2)
Фэнд Р. М. (Fand R. M.) 198 (3)
Фюри Р. Дж. (Furey R. J.) 198 (3)

Хаккинен Р. Дж. (Hakkinen R. J.) 245, 254, 261, 270, 273, 288 (1)
Хальцхаузер К. А. (Halzhauser C.A.) 207 (1)
Хаммель Д. (Hummel D.) 139 (1)
Хан Дж. С. (Hahn J. S.) 73 (2)
Хансен А. Г. (Hansen A. G.) 110, 136 (2)
Хансен К. Ф. (Hansen C. F.) 146, 189 (2)
Хант Г. К. (Hunt G. K.) 221, 255, 257, 258, 261, 264, 270, 278 (2); 232 (3)
Хант Р. Д. (Hunt R. D.) 279 (2)
Харват А. Ф. (Charwat A. F.) 51,54, 55, 65 (1); 32, 69 (2); 31, 84, 136, 151, 152, 195 (3)
Харли Д. Г. (Hurley D. G.) 231 (3)
Харлоу Ф. Г. (Harlow F. H.) 192 (2)
Харпер Дж. Ф. (Harper J. F.) 66 (1); 72 (2)
Харрингтон Дж. А. (Harrington J.A.) 196 (2)
Хартли Р. М. (Hartley R. M.) 228, 232 (3)
Хартофилис С. А. (Hartofilis S. A.) 67 (1); 233 (3)
Хартри Д. Р. (Hartree D. R.) 106, 231, 288 (1)
Хартуниан Р. А. (Hartunian R. A.) 233 (3)
Хастингс Р. К. (Hastings R. C.) 86 (3)
Хед М. Р. (Head M. R.) 217, 231 (3)
Хейз Дж. Э. (Heyes J. E.) 193 (2)
Хейз У. Д. (Heyes W. D.) 65 (1)
Хейзер У. Г. (Heiser W. H.) 67 (1)
Хейма Ф. Р. (Hama F. R.) 186 (2)
Хейнрих Г. Г. (Heinrich H. G.) 192 (2)
Хейэми Р. А. (Hayami R. A.) 189, 192, 197 (2)
Хекмен Д. (Heckman D.) 193 (2)
Хемке П. Э. (Hemke P. E.) 64 (1)
Хенган Д. М. (Henghan D. M.) 233 (3)
Хендли-Пейдж Г. (Handley-Page) 205 (3)
Хенри Дж. Р. (Henry J. R.) 208 (1)
Хесс Р. С. (Hess R. S.) 192 (2)
Хиггинботем Дж. Т. (Higginbotham J. T.) 208 (1)
Хикмен Р. С. (Hickman R. S.) 86 (3)
Хилл Дж. А. Ф. (Hill J. A. F.) 193 (2)
Хилл Ф. К. (Hill F. K.) 83 (3)
Хилсоп Г. С. (Hilsop G. S.) 187 (2)
Хименц К. (Hiemenz K.) 70, 105—107 (1); 119, 195 (3)
Химмельскамп Г. (Himmelskamp H.) 200, 208 (1); 231 (3)
Хинце И. О. (Hinze J. O.) 105, 113, 187 (2)

Хитц Дж. А. (Hitz J. A.) 69 (2); 133, 195 (3)
Холден М. С. (Holden M. S.) 291 (1); 72 (2)
Ходжер Д. У. (Holder D. W.) 231, 288, 289, 291 (1); 72 (2); 233 (3)
Холл А. А. (Hall A. A.) 187 (2)
Холл Г. Р. (Hall G. R.) 192 (2)
Холл Л. П. (Hall L. P.) 207 (1)
Холл М. Г. (Hall M. G.) 64, 133, 137, 138 (1); 209, 277 (2)
Холлоуэй П. Ф. (Holloway P. F.) 198
Холт М. (Holt M.) 66 (1)
Хорнер С. Ф. (Hoerner S. F.) 12, 13, 15, 17, 83 (3)
Хоскин Н. Э. (Hoskin N. E.) 140 (1); 233 (3)
Хоуарт Л. (Howarth L.) 77, 92, 94, 103, 112, 113, 136, 164, 204, 231, 235, 288 (1); 117, 120, 195 (3)
Хоукинс Р. (Hawkins R.) 86 (3)
Хофферт М. (Hoffert M.) 193 (2)
Хохшильд Х. (Hochschild H.) 205 (1)
Хромас Л. (Hromas L.) 64 (1); 80, 149, 169, 171, 184, 188—190 (2)
Хукер С. Г. (Hooker S. G.) 185 (2)
Хьюберт Л. Ф. (Hubert L. F.) 191 (2)
Хьюсон К. Т. (Hewson C. T.) 185, 205 (1)
Хэворт Д. Р. (Haworth D. R.) 67 (1)

Царин Н. (Zarin N.) 198 (2)
Цзян Г. С. (Tsien H. S.) 22, 83, 180 (3)
Цу Ф. К. (Tsou F. K.) 233 (3)

Чайлдс М. Э. (Childs M. E.) 69 (2)
Чанг П. М. (Chung P. M.) 66 (1); 175, 178, 197 (3)
Чжен Г. К. (Cheng H. K.) 201, 229 (3)
Чжен П. К. (Chang P. K.) 66, 107 (1); 121, 187 (2); 198, 232 (3)
Чжен С. И. (Cheng S. I.) 290 (1); 191 (2)
Чепмен Д. Р. (Chapman D. R.) 47, 48, 51, 65, 66, 245, 248, 253, 288, 290 (1); 22—24, 26, 28, 48—52, 69, 213—216, 278 (2); 21, 29, 30, 34, 41, 47, 48, 55, 62, 69—71, 83, 85, 86, 146—149, 178, 179, 186, 192, 193, 197, 222, 232 (3)
Чернецки К. Р. (Czarnecki K. R.) 157, 196 (3)
Чёрный Г. Г. 189 (2)
Чоу У. Л. (Chow W. L.) 57. 84 (3)
Чуан Р. Л. (Chuan R. L.) 184, 190, 191 (2)

Шаде Г. (Schade H.) 187 (2)
Шапиро А. Г. (Shapiro A. H.) 203, 292 (1)
Шарп А. У. (Sharp A. W.) 279 (2)
Швебе М. (Schwabe M.) 212, 226 (1)
Швец М. Э. (Shvets M. E.) 106 (1)
Швидерски Э. У. (Schwiderski E. W.) 196 (2)
Шеллер К. (Scheller K.) 292 (1)
Шермерхон У. Л. (Schermerhon U.L.) 188 (2)
Шеррер Р. (Scherrer R.) 207 (1)
Шефер Дж. У. (Schaefer J. W.) 195 (2); 140, 196 (3)
Шлезингер А. Дж. (Schlesinger A. J.) 194, 196 (2)
Шлихтинг Г. (Schlichting H.) 64, 87, 106, 107, 137, 189, 207, 210, 226, 289 (1); 112, 113, 148, 149, 187, 189 (2); 194, 217, 231 (3)
Шмидбауэр Г. (Schmiedbauer H.) 156, 204 (1)
Шмидт Э. (Schmidt E.) 98, 194 (3)
Шорт У. У. (Short W. W.) 144, 188 (2)
Шоу Р. А. (Shaw R. A.) 93, 187 (2)
Шпангенберг У. Г. (Spangenberg W. G.) 64, 209 (1); 208, 212, 231 (3)
Шпанглер С. Б. (Spangler S. B.) 230 (3)
Шпрайтер Дж. Р. (Spreiter J. R.) 277 (2)
Штайгер М. Г. (Steiger M. H.) 71, 149, 158, 189, 190 (2)
Штайнберг М. (Steinberg M.) 189 (2)
Штерн Л. Г. Г. (Sterne L. H. G.) 208 (1)
Шу Г. (Schuh H.) 289 (1)
Шубауэр Г. Б. (Schubauer G. B.) 64, 172, 205, 266, 289 (1); 70, 85, 208, 212, 231 (3)
Шульц-Грунов Ф. (Schultz-Grunow F.) 151, 204 (1)
Шэр Ф. Г. (Shair F. H.) 66 (1); 186, 196 (2)

Эванс У. Дж. (Evans W. J.) 288 (1)
Эванс У. Т. (Evans W. T.) 71 (2)
Эггерс А. Дж. (Eggers A. J.) 279 (2); 168, 169 (3)
Эгинк Г. (Eggink H.) 55, 84 (3)
Эгноун А. 194, 197 (2)
Эдвардс Р. Г. (Edwards R. H.) 138 (1); 230 (3)
Эйр Р. К. У. (Eyre R. C. W.) 185, 192 (2)
Эйфель (Eiffel) 27 (1)

Эйхельбреннер Э. А. (Eichelbrenner E. A.) 40, 65, 116, 136, 137, 140, 207, 208 (1); 68, 71 (2)
Эк (Eck B.) 64 (1)
Эккерман Дж. (Eckerman J.) 195 (2)
Эккерт К. (Eckert C.) 192
Эккерт Э. Р. Г. (Eckert E. R. G.) 101, 139, 194, 196 (3)
Эстром Д. Дж. (Eckstrom D. J.) 192 (2)
Элле Б. Дж. (Elle B. J.) 277, 279 (2)
Эльджин Д. Р. (Elgin D. R.) 86 (3)
Эмери Дж. К. (Emery J. C.) 248, 276, 288 (1)
Эмери Э. (Emery A.) 73 (2)
Эрдос Дж. (Erdos J.) 291 (1); 193, 195 (2)
Эрие М. (Arie M.) 195 (3)
Эрншоу П. Б. (Earnshaw P. B.) 138 (1); 277 (2)
Эткин Б. (Etkin B.) 186 (2)
Эттридж Дж. Л. (Attridge J. L.) 69 (2); 94, 193 (3)
Эшенродер Э. (Eschenroeder A.) 192 (2)

Юзелтон Дж. К. (Uselton J. C.) 73 (2)
Юревич Л. С. (Jurewicz L. S.) 137 (1)
Ючи М. (Iuchi M.) 69 (2)
Юрем Э. М. (Uram E. M.) 208 (1)

Якура Дж. К. (Yakura J. K.) 31, 84 (3)
Янг А. Д. (Young A. D.) 37, 172, 205, 206 (1)
Янг Г. Т. (Yang H. T.) 184, 190, 191 (2)
Янг Кван-цу (Yang Kwang-Tzu) 198 (2)
Янг Та-те (Yang Tah-Teh) 209 (1)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Блазиуса переменная 181 (3)
— профиль 215 (3)
— ряд 95, 96 (1)
Буземана интеграл 50 (2)
Бури критерий 153, 154 (1)
— метод 152 (1)

Взаимодействие со скачком уплотнения 33—39 (1)
— скачков уплотнения с пограничным слоем, разветвленный скачок 249 (1)
Винт воздушный 211 (3)
Вихри, генераторы 207—210 (3)
— динамика 58 (1)
— крупномасштабные 168 (3)
— образование 127 (1), 200 (2)
— разрушение 163—166 (3)
— распространение 32 (1)
— срывающиеся 226 (1)
Вихрь на задней кромке двумерного тела 34 (3)
— присоединенный 28 (1)
— свободный 28 (1)
Волна головная ударная (скачок уплотнения) 12, 32 (1)
Вязкость 14, 16, 20, 177 (1)
— вихревая 20 (1)
— динамическая 16, 20 (1)
— кинематическая 16 (1), 8 (3)
— ламинарная 14 (1)
— турбулентная 14, 20, 177 (1), 156 (2), 8, 63 (3)

Гарнера критерий 164—172 (1)
Гаусса распределение скорости 115 (2)
— функция распределения ошибок 114 (2)
Генераторы вихрей 207, 208 (3)
— — выступ 208 (3)
— — завихритель 208 (3)
— — клин 208 (3)
— — ковшик 208 (3)
— — крылышко 208 (3)
Генераторы вихрей, купол 208 (3)
— — лопатки 208 (3)
— — обтекатели 208 (3)
— — перегородки 208 (3)
— —«плуг» простой 208 (3)
— — — треугольный 208 (3)
— — — экранированный 208 (3)
— — ребра продольные 208 (3)
Гёртлера метод 84, 94—103 (1)
— — независимые переменные 94
— — определяющая функция 95, 104
Градиент давления положительный (обратный) 13, 14, 18, 110, 173, 183, 186, 216, 229, 234, 273 (1), 200 (2)
Грушвица критерий 155—157 (1)

Давление донное 57, 58 (1), 239, 264 (2), 7—82 (3)
— — диссипативное вязкое течение 47 (3)
— — за двумерными телами 31—82 (3)
— — — — — расчет 36—47 (3)
— — — пластиной 9—11 (3)
— — — телом вращения 26—31 (3)
— — — уступом 61 (3)
— — Карашимы теория 62—72 (3)
— — Корста теория 47—62 (3)
— — — — ограниченная 48, 56 (3)
— — Нэша исследования 72—82 (3)
— — перенос количества движения 57 (1)
— — пониженное 57 (1)
— — при дозвуковых скоростях 9—18 (3)
— — — сверхзвуковых скоростях 18—24 (3)
— — расчет 26—31 (3)
— — Харнера исследования 12—18 (3)
— отрыва 49 (1)
— повышение до «плато» 261, 262 (1)

Денхоффа и Тетервина критерий 160 164, 172 (1)
— метод 84 (1)
— — эквивалентная длина 83 (1)
Диффузоры 172—193 (1), 211, 212 (3)
— возвратно-циркуляционное течение 185 (1)
— восстановление давления 192 (1)
— коэффициент восстановления давления 181, 182, 191 (1)
— — — энергии 179 (1)
— направляющие лопатки 180, 183, 188 (1)
— оптимальные 189—192 (1)
— отрыв переходного типа 185 (1)
— полностью развитый отрыв 180, 186 (1)
— положительный градиент давления 186 (1)
— решетка профилей 189 (1)
— угол раскрытия диффузора 189 (1)
Дородницына переменная 238 (1)

Жуковского — Кутта условие 183 (1)

Завихренность 45 (1)
«Закон стенки» 252 (1)

Игла выступающая 58 (1), 219—222 (2)
— — деформация области отрыва 221 (2)
— — застойная зона 220, 225 (2)
— — затянутый отрыв 221 (2)
— — концевой отрыв 221 (2)
— — косой скачок 219, 226 (2)
— — криволинейный скачок перед телом 219 (2)
— — критическая длина 221, 258, 259, 273, 274 (2)
Интеграл вероятностей 80 (1)
Интерферометр Маха — Цендера 101 (3)

Карашимы теория 62—72 (3)
Кармана вихревая дорожка 25, 226 (1), 89—91 (2), 9, 11, 15 (3)
— интегральное уравнение количества движения 20, 21, 74, 75, 104, 145, 185, 193, 233, 238, 263, 271 (1)
— — — — — — замедляющееся течение 104 (1)
— — — — — — ускоряющееся течение 104 (1)
Кармана — Милликена метод 77—82, 94 (1)
Кармана уравнение, внешнее решение 78—80 (1)
— — внутреннее решение 78, 80 (1)
Кармана — Польгаузена метод 122, 237 (1)
Кориолиса сила 199 (1)
Корста теория 47—62 (3)
Коэффициент восстановления 166, 185, 222—224 (3)
— — давления 178, 181, 182 (1)
— поверхностного трения 251 (1)
— сопротивления 26, 201 (1), 11, 231, 236, 252 (2)
— теплопередачи 52, 55 (1)
— турбулентного перемешивания 20 (1)
— турбулентной вязкости 63 (3)
— — диффузии 111 (2)
Крокко интеграл 50, 152, 168 (2), 182 (3)
Крокко — Лиза теория смешения 39, 47, 57, 61, 275 (1), 18, 36—47, 66 (3)
Кромка задняя 13 (1)
— передняя, отрыв потока 199—276 (2)
— — — — вихри 200 (2)
— — — — влияние формы иглы 250—257 (2)
— — — — — — носовой части тела 250—257 (2)
— — — — выступающая игла 218—222 (2)
— — — — головная ударная волна 243 (2)
— — — — клиновидная форма области отрыва 223, 224 (2)
— — — — коническое течение 229 (2)
— — — — критерий 205, 206 (2)
— — — — Крэбтри теория 202—205 (2)
— — — — Макгрегора теория 202 (2)
— — — — образование пузыря 201 (2)
— — — — осесимметричное тело с иглой 239—244 (2)
— — — — пульсирующее течение 224, 243—247, 258 (2)
— — — — сверхзвуковые скорости 213—218 (2)
— — — — сопротивление 236, 252—255, 261—264 (2)
— — — — схемы течения 257—259 (2)
— — — — теплопередача 218 (2)
— — — — Чепмена — Брауэра теория 214—216 (2)
— — разрушение сходящих вихрей 208—213 (2)

Крыло треугольное 135 (1), 209—213 (2)
— щелевое 205—207 (3)
Крылья стреловидные 119 (1)
Крэбтри критерий 68 (2)
— теория 202—205 (2)
Крэнка — Никольсона метод 133 (1)

Лаваля сопло 157 (3)
Линия нулевой скорости 18, 19, 29 (1)
— тока 19, 32 (1), 61, 67, 94 (3)
— — (предельная) 42, 112, 124 (1)
— — разделяющая 286 (1), 61, 62, 66, 67, 69, 94, 184, 186, 187, 222, 224 (3)
Лойцянского метод 73—77 (1)
Льюиса число 151 (2)
— — турбулентное 156

Магнуса эффект 210 (3)
Макгрегора теория 202 (2)
Манглера преобразования 117—119 (1), 188, 191 (3)
Маскелла критерий 159, 160 (1)
Маха число 32, 244, 248—253 (1), 45—47 (2)
Метод полос интегральный 149 (2)
Мизеса преобразование 78 (1), 180 (3)
Модель с теплопередачей посредством массообмена 55 (1)
Момент продольный 273—276 (2)

«Насос струйный» 12 (3)

Области течения вихревые 45 (1)
Область замыкания 61 (3)
Обмен количеством движения 24 (1)
Обтекание тел внешнее 143 (1)
Особенность 17 (1)
Отрыв двумерный с образованием каверны 45 (1)
— обыкновенный 43 (1)
— пограничного слоя 13 (1)
— потока внутреннего 172 (1)
— — — положительный градиент давления 173 (1)
— — вызванный скачком уплотнения 230, 243, 245—247 (1), 204, 205 (3)
— — — — — докритический пограничный слой 275 (1)
— — — — — Дональдсона и Ланге исследования 266—269 (1)
— — — — — искривленная поверхность 255—260 (1)
— — — — — Крокко теория 263—266 (1)
Отрыв потока, вызванный скачком уплотнения, Лиза и Ривза метод 274—276 (1)
— — — — — на плоской пластине 253—255 (1)
— — — — — тонкой игле 273, 274 (1)
— — — — — охлажденная стенка 280 (1)
— — — — — перед уступом 260 (1)
— — — — — положительный градиент давления 273 (1)
— — — — — профиль скорости 276 (1)
— — — — — разделяющая линия тока 286 (1)
— — — — — расчет 262—287 (1)
— — — — — сверхкритический пограничный слой 275 (1)
— — — — — Хаккинена расчет 269—272 (1)
— — — — — энтальпии профиль 277 (1)
— — газа 228—287 (1)
— — — гиперзвуковые летательные аппараты 230 (1)
— — —«закон стенки» 252 (1)
— — — искривленный скачок (взаимодействие с пограничным слоем) 249 (1)
— — — ламинарный пограничный слой на плоской поверхности 244, 245 (1)
— — — Лофтина и Уилсона метод 233 (1)
— — — Мордухова и Кларке метод 237—242 (1)
— — — положительный градиент давления 229, 234 (1)
— — — прямой скачок (взаимодействие с пограничным слоем) 249—253 (1)
— — — разветвленный скачок (взаимодействие с пограничным слоем) 249 (1)
— — — теплопередача 231 (1)
— — — турбулентный пограничный слой на крыловом профиле 245—247 (1)
— — — уступы, обращенные навстречу потоку 247 (1)
— — — — расположенные по потоку 248 (1)
— — — Хоуарта метод 231—233 (1)
— — — эквивалентная длина 235 (1)
— — крыловой профиль 21—23 (1)
— — механизм 13—39 (1)

Отрыв потока на конусе под углом атаки 127—135 (1)
— — на сфере 23—29 (1)
— — — телах вращения 110, 119 (1)
— — — треугольном крыле 135, 136 (1)
— — — цилиндре 23—29 (1)
— — — — под углом скольжения 119—127 (1)
— — определение 111 (1)
— — теория пограничного слоя 61 (1)
— — — смешения Крокко — Лиза 61 (1)
— — толщина вытеснения 62 (1)
— — — потери импульса 62 (1)
— — трехмерного ламинарного 110—112 (1)
— — жидкости неустановившегося 210—226 (1)
— — — — вращающийся цилиндр 219, 223 (1)
— — — — движущаяся стенка 223—226 (1)
— — — — круговой цилиндр 211, 212, 216—218 (1)
— — — — — — — движущийся с постоянным ускорением 222 (1)
— — — — периодическое движение 213, 214 (1)
— — — — положительный градиент давления 216 (1)
— — — — при постоянном ускорении тела 221—223 (1)
— — — сфера 220, 221 (1)
— — — — эллиптический цилиндр 212, 218, 219 (1)
— — — турбулентного 141—203 (1)
— — — — Бури критерий 153—155 (1)
— — — — внезапное торможение на границе 179 (1)
— — — — внешнее обтекание 143, 144 (1)
— — — — внутреннего 172—192 (1)
— — — — внутреннее течение 144 (1)
— — — — возвратное течение на границе 179 (1)
— — — — вращающиеся тела 200 (1)
— — — — Гарнера критерий 164—172 (1)
— — — — Грушвица критерий 155—157 (1)
— — — — Денхоффа и Тетервина критерий 160—164 (1)
— — — — закрученный пограничный слой 193 (1)
Отрыв потока жидкости турбулентного, коэффициент сопротивления кормовой части тела 201 (1)
— — — — Маскелла критерий 159, 160 (1)
— — — — многоступенчатый компрессор 200 (1)
— — — — осесимметричная кормовая часть 201—203 (1)
— — — — переходного типа 180 (1)
— — — — полностью развитый 180, 188 (1)
— — — — Ротта критерий 157—159 (1)
— — — — сопротивление давления 201 (1)
— — — — — трения 201—203 (1)
— — — — толщина потери полной энергии 144 (1)
— — — — *B*-методика 152, 153 (1)
— — — — *E*-методика 152 (1)
— — ламинарного, Гёртлера метод 84, 94—103 (1)
— — — Денхоффа метод 82, 83 (1)
— — — Кармана — Милликена метод 77—82, 94 (1)
— — — критерий 92 (1)
— — — Лойцянского метод 73—77 (1)
— — — поверхностное трение 103 (1)
— — — Польгаузена метод 72, 73, 94 (1)
— — — потенциал скорости 79 (1)
— — —«потери энергии» 78 (1)
— — — Прандтля метод 90—92 (1)
— — — приближение второго порядка 84 (1)
— — — Стрэтфорда метод 83, 84 (1)
— — — Тани метод 92 (1)
— — — Твейтса — Кёрла и Скэн метод 85 (1)
— — — точка перегиба профиля скорости 78 (1)
— — — трехмерного 39—46, 109—136 (1)
— — — — картина линий тока 116 (1)
— — — — Манглера преобразования 117—119 (1)
— — — — на конусе 127—135 (1)
— — — — — треугольном крыле 135, 136 (1)
— — — — — цилиндре 119—127 (1)
— — — — поперечное течение 110 (1)
— — — — сфероид 119 (1)
— — — угол раскрытия диффузора 91 (1)

Отрыв потока ламинарного, Хоуарта метод 92—94 (1)
— — носовая полусферическая часть 232—236, 242 (2)
— — определение 111 (1)
— — с задней кромки 44 (1), 201 (2)
— сингулярный 43 (1)
Отсос пограничного слоя 14 (1), 213—222 (3)
— — — картина скачков 221 (3)
— — — напряжение трения 215 (3)
— — — скорость 215, 217 (3)

Параметр, объединяющий число Рейнольдса и геометрические характеристики 66—71 (3)
– положения 48, 51 (3)
— присоединения 76 (3)
Пластина плоская 33 (1)
— разделяющая 15, 213 (3)
— с выступающей тонкой пластиной 15 (1), 225—229 (2)
«Плато давления» 49, 245, 261 (1), 31 (2)
Польгаузена метод 72, 94 (1)
— параметр 72 (1), 216 (3)
Польгаузена — Грушвица параметр отрыва 272 (1)
Потери скорости 19 (1)
Прандтля гипотеза о переносе количества движения 113 (2)
— метод 90—92 (1)
— параметр 75 (1)
— теория смешения 104, 108 (2), 63 (3)
— число 237 (1)
— — турбулентное 156 (2)
Прандтля — Мейера соотношение 279 (1)
Профиль крыловой 21, 34, 81, 201—205, 218, 219, 225—227 (1)
— — двояковыпуклый 86, 87 (1)
— — Жуковского 71 (1)
— — тонкий 12 (1)
Пузыри отрывные 22 (1), 60—69 (2)
— — длинные 61, 201, 204, 205 (2)
— — короткие 61, 201—205 (2)
— — на задней кромке 60 (2)
— — — передней кромке 60 (2)
Пульсации отрывного течения 60 (1)

Раихардта индуктивная теория 113(2)
— теория касательных напряжений 113 (2)
Распределение скорости 72 (1)
Рейнольдса напряжение 106 (2)
— число 23—29, 32—37, 57, 58, 244(1)
Рейнольдса число критическое 26 (1), 12 (3)
— — сверхкритическое 27 (1), 11 (3)
Росса критерий 158, 159 (1)
Рунге — Кутта метод 285 (1)

Сазерленда постоянная 112 (3)
Сечение радиолокационное 148 (2)
Сила нормальная 270—273 (2)
— подъемная 12 (1), 264—270 (2), 213, 218 (3)
Скачки уплотнения в сжатом слое внутренние 130 (1)
Скачок уплотнения головной 29 (1)
Скорость динамическая (скорость трения) 149 (1)
След 7—82 (3)
— ближний 20 (1), 77, 89—94 (2)
— внешний 29, 32 (1), 170, 171 (2)
— внутренний 29 (1), 171—173 (2)
— —«горячий» 29, 32 (1)
— —«замороженная» диффузия 184 (2)
— — массовая концентрация 181 (2)
— —«поглощение» 183, 184 (2)
— — турбулентная диффузия массы 181—184 (2)
— — — — энтальпии 174—181 (2)
— —«холодный» 32 (1)
— высокотемпературное ядро 127 (2)
— высокотемпературный 126 (2)
— дальний 77, 94—96, 120 (2)
— — доля сохраняющейся завихренности 94 (2)
— замкнутый 53—55 (3)
— ламинарный двухслойный 32 (1)
— определяемый процессом теплопроводности 127 (2)
— — — расширения 127 (2)
— открытый 53, 55, 56 (3)
— равновесная ионизация 128 (2)
— развитие 32 (1), 144, 145 (2)
— турбулентный 103—123 (2)
Слой вихревой 40, 45, 130 (1), 163 (3)
— вязкий свободный 29, 32, 51 (1)
— пограничный ламинарный 33, 37 (1)
— — турбулентный, метод Клина 33 (1)
— — — — падающего скачка уплотнения 33 (1)
— сжатый 130 (1)
Сопротивление 12, 24, 116, 201—203 (1), 218, 219, 236, 251—255, 261—264 (2), 7—82, 203, 207, 213, 218—220, 228 (3)
— давления 24, 25 (1)

Сопротивление донное при дозвуковых скоростях 9—18 (3)
— — — — — осесимметричного тела 12 (3)
— — — — — пластины 10, 15 (3)
— — — — — снарядов 13 (3)
— — — — — сферы 13, 14 (3)
— — — — — фюзеляжей 13 (3)
— — — сверхзвуковых скоростях 18—24 (3)
— — — — — конуса 19 (3)
— — — — — снаряда 19 (3)
— трения 231 (1)
Срыв потока 21, 22, 46, 223 (1), 61, 201 (2)
— — с задней кромки 61 (2)
Стреловидность крыла 135 (1)
Струхаля число 32 (1), 10, 11 (3)
Стрэтфорда критерий 252 (1)
— метод 83, 84 (1)
Стэнтона число 147, 149, 150, 164, 166 (3)
Стюартсона преобразование 62, 233, 279 (1), 37 (3)
— профили обратного течения 275 (1)

Тани метод 92 (1)
Твейтса — Кёрла и Скэн метод 85 (1)
Тейлора теория о переносе завихренности 113 (2)
Тейлора — Маккола решение 239 (2)
Тело тупое 17, 29 32 (1)
Температура слоя средняя 95 (3)
Теория малых возмущений 47 (1)
Теплопередача 13, 38, 51—57, 143, 230 (1), 218 (2), 26, 88—193 (3)
— выемка 145—157 (3)
— вырез 131 (3)
— игла 166—175 (3)
— каверна «замкнутая» 152 (3)
— —«открытая» 152 (3)
— коэффициент восстановления 96, 110, 169, 192 (3)
— круговой цилиндр 97—104, 117—119 (3)
— наклонные цилиндры 161—163 (3)
— область присоединения 177 (3)
— отрыв потока сжимаемой среды 111—126 (3)
— — на верхней стороне треугольного крыла 163—166 (3)
— — при гиперзвуковых скоростях 126—175 (3)
— — — дозвуковых скоростях 126—175 (3)
— — — сверхзвуковых скоростях 126—175 (3)
Теплопередача перегородки 107 (3)
— плоская пластина 95—97 (3)
— слой смешения 175, 179, 189 (3)
— снижение путем вдува газа 222 (3)
— сфера 97, 107—110, 126—131 (3)
— тело вращения 186 (3)
— трубные пучки 106, 107 (3)
— уступ, обращенный навстречу потоку 94, 132, 139 (3)
— — расположенный по потоку 94, 109, 110, 132, 137 (3)
— уступы 109, 110, 131—145 (3)
— цилиндрические выступы 131, 157—163 (3)
— Чепмена теория 178—186 (3)
Течение в следе 29—39 (1), 8, 75—184 (2)
— — — акустическая энергия 92 (2)
— — — Блума — Штайгера метод 149—151 (2)
— — — визуальные наблюдения 145 (2)
— — — вихревая пелена 85 (2)
— — —«горло» 81 (2)
— — — двумерное 108—120 (2)
— — — за круглым диском 96, 97 (2)
— — — — плоской пластиной 98—101 (2)
— — — — сферой 96, 97 (2)
— — — — телом произвольной формы 102—104 (2)
— — — замороженное 127 (2)
— — — интенсивность турбулентного движения 116 (2)
— — — ионизационная диффузия 134 (2)
— — — ионизация 126, 134—136 (2)
— — — коэффициент корреляции 106 (2)
— — — Лиза и Хромаса теория 169—184 (2)
— — — максимальная интенсивность турбулентности 115 (2)
— — — максимальное напряжение 115 (2)
— — — несамосохраняющееся 77, 118—120 (2)
— — — перемежающаяся турбулентность 79 (2)
— — — половина ширины следа 112 (2)
— — — при гиперзвуковых скоростях 124—184 (2)
— — — — дозвуковых скоростях 81—123 (2)
— — — — сверхзвуковых скоростях 123—184 (2)

Течение в следе равновесное 127 (2)
— — — рекомбинация атомов 137, 138 (2)
— — — самосохраняющееся 77, 78, 108—118
— — — светящееся 124 (2)
— — — турбулентное 103—123 (2)
— — — — местное подобие 174 (2)
— — — физико-химические процессы 126 (2)
— — — частота плазмы 138 (2)
— — — электронно-ионная рекомбинация 136, 137 (2)
— — — эффективное начало отсчета расстояния перехода 140 (2)
— внешнее 144 (1)
— внутреннее 12, 144 (1)
— возвратно-циркуляционное 13 (2)
— вязкое 16 (1)
— — изоэнергетическое 73 (3)
— — потенциальное 16 (1)
— — свободный вихревой слой 44 (1)
— двумерное ламинарное 69—105 (1)
— — — круговой цилиндр 69, 70, 104 (1)
— — — эллиптический цилиндр 70 (1)
— диссипативное 47 (1)
— дозвуковое 81—123 (2), 9—18 (3)
— неустановившееся 55 (1)
— отрывное 7—69 (2)
— — акустическое излучение 20, 21 (2)
— — влияние геометрии выреза 45, 46 (2)
— — — толщины пограничного слоя 45, 46 (2)
— — — числа Маха 45, 46 (2)
— — вырез 15—21 (2)
— — газа 21—48 (2)
— — жидкости 10—20 (2)
— — каверна 32, 33, 35—41 (2)
— — — критическая длина 34, 35 (2)
— — коэффициент сопротивления 11 (2)
— — отрыв переходного типа 23, 24 (2)
— — распределение давления 41—43 (2)
— — — — двумерная каверна 41 (2)
— — — — осесимметричная каверна 43—45 (2)
— — — —«плато» давления 41 (2)
— — — скорости 47 (2)
— — свободная каверна 36—41 (2)
— — уступ 13—15 (2)
— — — обращенный навстречу потоку 49 (1)
Течение отрывное, уступ, расположенный по потоку 49 (1)
— потенциальное 16 (1)
— пульсирующее 224, 243—247, 258 (2)
— — гистерезис 245 (2)
— — игла 245 (2)
— — цилиндр с плоским срезом и иглой 244 (2)
— сверхзвуковое 213—218 (2), 18—31 (3)
— струйное 39 (1), 77 (2)
— трансзвуковое 12 (1)
Течения отрывные при сверхзвуковой скорости, метод Василиу 52—56 (2)
— — — — — — Чепмена 48—52 (2)
— — — — — слой смешения 53 (2)
Теория пограничного слоя 61 (1)
Толщина вытеснения 19, 62, 74, 144 (1), 37, 68, 215 (3)
— потери импульса 62, 74, 144, 271 (1), 37, 74, 75, 215 (3)
— — — вычисление 145—153 (1)
— — — Ротта метод 147—153 (1)
— — — Трукенбродта метод 145—147 (1)
— — энергии 189 (3)
— — — кинетической 8, 75 (3)
Точка задняя критическая 17 (1)
— отрыва 18 (1)
— — ламинарного потока 101, 103 (1)
— торможения 14 (1)
Трение поверхностное 15 (1)

Угол «сжатия» 16 (1), 23, 25, 26, 29 (2)
Управление отрывом потока 199—229 (3)
— — — аэродинамическая игла 228 (3)
— — — вдув газа 221—224 (3)
— — — вырезы 200 (3)
— — — генераторы вихрей 200, 207, 210 (3)
— — — диффузор с внезапным расширением 226 (3)
— — — коэффициент импульса вдуваемой струи 226 (3)
— — — крыло 201—205 (3)
— — — крыловые профили 201—205 (3)
— — — нагревание стенки 220 (3)
— — — определяющие факторы 200 (3)
— — — отсос 220, 221 (3)

Управление отрывом потока, охлаждение стенки 220, 224 (3)
— — — пластина разделяющая 213 (3)
— — — подвижные поверхности 210, 211 (3)
— — — сетки 211, 212 (3)
— — — стоячие вихри 226, 227 (3)
— — — щели 200, 205, 207 (3)
— — — щиток носовой 202 (3)
— — — эффект заполнения сетки 212 (3)
«Условие смыкания» линий тока 48, 52, 53 (3)
Уступ, обращенный навстречу потоку 48, 247 (1), 94, 132 (3)
— расположенный по потоку 48, 248 (1), 61, 81, 94, 109, 110, 132, 136 (3)
Уступы 51—57 (1), 13—15 (2)
— эффективная температура восстановления 53 (1)
— эффективный коэффициент восстановления 53 (1)

Фика закон 151 (2)
Фолкнера — Скэн уравнение 16, 104 (1)
Формпараметр 75, 144 (1), 208 (3)

Хоуарта метод 92—94 (1)
— ряд 103 (1)
Хоуарта — Дородницына переменная 171, 175 (2)
— преобразование 170 (2)

Центр давления 270—273 (2)
Цилиндр эллиптический 124 (1)

Чепмена теория смешения 214 (2)
Чепмена — Корста модель 35 (2)
Чепмена — Ларсона механизм переноса массы 51 (1)
Чепмена — Рубезина константа 271 (1)

Швеца метод 84, 85 (1)
Шумана — Рунге полоса 146 (2)

Эффективность диффузора 178, 179 (1)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные обозначения 5

Глава X. **Донное давление**, *перев. Мальмберг Н. А.* 7

1. Донное давление при дозвуковых скоростях 9
2. Донное давление при сверхзвуковых скоростях . . . 18
3. Экспериментальные исследования донного давления за двумерным телом 31
4. Расчет донного давления за двумерным телом . . . 36

Литература 83

Глава XI. **Тепловые явления в отрывных течениях**, *перев. Майкапара Г. И.* 88

1. Физические представления о теплопередаче в областях отрывного течения 90
2. Влияние теплопередачи на отрыв при дозвуковых скоростях 95
3. Положение точки отрыва потока сжимаемой среды
4. Влияние теплообмена на отрывное течение при сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростях 126
5. Расчет влияния теплопередачи на отрывное течение 175

Литература 193

Глава XII. **Управление отрывом потока**, *перев. Майкапара Г. И.* 199

1. Предотвращение или замедление отрыва потока . . . 200
2. Управление течением с помощью отрыва 225

Литература 229

Приложение. Новые результаты исследований отрывных течений . . 234

1. Расчет отрывных течений численными методами с помощью вычислительных машин, *Голубинский А. И.* 235
2. Отрыв потока с кромок крыла, *Голубинский А. И.* 240
3. Асимптотические методы в теории отрывных течений и взаимодействия пограничного слоя с невязким потоком, *Нейланд В. Я.* 242
4. Результаты исследований двумерных отрывных течений с помощью приближенных с полуэмпирических методов, полученные в Советском Союзе, *Нейланд В. Я.* 268

5. Теплопередача к подветренной стороне тела при отрывном обтекании его потоком с большой сверхзвуковой скоростью, *Майкапар Г. И.* 272
6. Аэродинамическое нагревание в трехмерных областях взаимодействия ударных волн с ламинарным пограничным слоем, *Майкапар Г. И.* 291

Библиография 303
Авторский указатель 312
Предметный указатель 324

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу:

129820, Москва, И-110, ГСП,
1-й Рижский пер., 2,
издательство «Мир».

П. ЧЖЕН

ОТРЫВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Том III

Редактор *О. Прядкина*
Художник *А. Шипов*
Художественный редактор *Ю. Урманчеев*
Технический редактор *И. Дерва*

Сдано в набор 5/I 1973 г.
Подписано к печати 22/V 1973 г.
Бумага тип. № 1 60×90 1/16=10,5 бум. л.
21 усл. печ. л. Уч. изд. л. 20,59.
Изд. № 20/6749. Цена 1 р. 74 к. Зак. 0828.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного знамени
Московская типография № 7 «Искра революции»
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли
Москва, К-1 Трехпрудный пер., 9.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Том	Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
1	33	6 снизу	$Re_\delta^{-\zeta}$	Re_δ^{-1}
1	63	Подпись к фиг. 50	— — $0,05 \leqslant u/u_e \leqslant 0,95$;	—— —— $0,05 \leqslant u/u_e \leqslant$ $\leqslant 0,95$
			—— —— экстраполяция	— — экстраполяция
1	65	1 сверху	Морфи	Марфи
1	67	6 снизу	22 April 1961, pp. 117—128	Fluid Mechanics, **12**. Pt 1 (1962)
1	97	Уравнение (25)	$(0 \leqslant \hat{\xi} \leqslant \hat{\xi})s)$.	$(0 \leqslant \hat{\xi} \leqslant \hat{\xi}_s)$.
1	111	11 сверху	Мейгер	Мэйджер
		26 сверху		
1	131	Подпись к фиг. 15	конус 75°	конус 7,5°
1	134	Подпись к фиг. 19	— расчет	—— расчет
1	136	19 сверху	Майк	Микаэль
1	141	2 снизу	динамическая скорость;	динамическая скорость (скорость трения);
		4 снизу	энергия турбулентного движения скорость трения);	энергия турбулентного движения
1	171	3 снизу	эскперимент.	эксперимент.
		Подпись под фиг. 10	смещена	
1	191	3 снизу	разритии	развитии
1	205	21 сверху	Martinot—Largarde	Martinot—Lagarde
1	207	24 снизу	Abott	Abbot
1	209	9 сверху	Stratford D. S.	Stratford B. S.
1	240	4 сверху	уравнение (32)	уравнения (32)
1	247	Подпись к фиг. 6	точка отрыва (приблизительно) $\delta=5$ мм;	точка отрыва (приблизительно); $\delta=5$ мм;
1	250	13 снизу	$p=0,528\ p_S$	$p=0,528\ p_s$
1	288	4 снизу	Mach Number of 6—5	Mach Number of 6.5
1	290	4 сверху	Schock Waves	Shock Waves
1	291	6 снизу	Ray Kumar A.,	Ray, Kumar A.,
2	43	9 снизу	Николл	Николь
2	68	14 снизу	Каррье	Каррьер
2	184	21 сверху	Уэбб	Вэбб
2	186	25 снизу	Karbacher	Korbacher
2	187	19 снизу	124 1949	124 (May 1949).
2	195	9 снизу	Zeinerg	Zeiberg
2	205	10 снизу	66=2=016	66=2=516
2	276	18 снизу	Norburg	Norbury
2	277	11 снизу	Radius Sweepback	Radius and Sweepback